חבורות Chevalley

אלעד זלינגר

תקציר

רשימות אלו מבוססות על ההרצאות בקורס "חבורות Chevalley" (סימול 0366-5066) שהועבר על ידי פרופסור דוד סודרי בסמסטר ב' שנת הלימודים תשע"ז באוניברסיטת תל אביב. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה ברשימות אלה. לתגובות, תיקונים ועוד, אנא פנו לelad88 בgmail.

תוכן עניינים

1 החבורות הקלאסיות

1.1 החבורות הלינאריות

יהי k שדה. $\mathrm{GL}_n(k)$ חבורת המטריצות ההפיכות $n\times n$ מעל k. המרכז של חבורה זו

$$Z = Z(\mathrm{GL}_n(k)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in k^*\}$$

מסמנים

$$\mathrm{PGL}_n(k) = {}^{\mathrm{GL}_n(k)}/_{Z(\mathrm{GL}_n(k))}$$

הגרעין של ההומומורפיזם $\det : \mathrm{GL}_n(k) \to k^*$ מסומן $\ker(\det) = \mathrm{SL}_n(k) \lhd \mathrm{GL}_n(k)$.
מתקיים

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{GL}_n(k)}/_{\mathrm{SL}_n(k)} &\cong k^* \\ Z(\mathrm{SL}_n(k)) &= \{\lambda I_n \mid \lambda^n = 1\} \end{aligned}$$

מסמנים

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}_n(k) &= {}^{\mathrm{SL}_n(k)}/_{Z(\mathrm{SL}_n(k))} \\ &= {}^{\mathrm{SL}_n(k)}/_{Z\cap \mathrm{SL}_n(k)} \end{aligned}$$

נניח כי $k=\mathbb{F}_q$ ־ שדה סופי בעל q איברים. אז

$$\begin{aligned} |\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| &= (q^n-1)\cdot(q^n-q)\cdot\left(q^n-q^2\right)\cdot\dots\cdot\left(q^n-q^{n-1}\right) \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n-1)\left(q^{n-1}-1\right)\cdot\dots\cdot(q-1) \end{aligned}$$

$$|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)| = |\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n-1)\left(q^{n-1}-1\right)\cdot\dots\cdot\left(q^2-1\right)$$

$$|\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n-1)\left(q^{n-1}-1\right)\cdot\dots\cdot\left(q^2-1\right)}{\gcd(n,q-1)}$$

(כי $\gcd(n,q-1)$ מספר שורשי היחידה מסדר n ב־$\mathbb{F}_q$)

משפט 1.1 1. אם k שדה אינסופי, אז $\mathrm{PSL}_n(k)$ היא חבורה פשוטה. $(n\geq 2)$

2. $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ היא חבורה פשוטה פרט למקרים $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$, $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_3)$.

1.2 החבורה הסימפלקטית

תהי $S \in \mathrm{M}_m(k)$ הפיכה ואנטי־סימטרית ($S^t = -S$). נניח כי $\mathrm{char}k \neq 2$, $m = 2n$.
נגדיר פעולה של $\mathrm{GL}_{2n}(k)$: $S \mapsto {}^t gSg$ ולכן, נוכל להשתמש בנציג $J_{2n} = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{SP}_{2n}(k) = \left\{g \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid {}^t gJ_{2n}g = J_{2n}\right\}$$
$$Z(\mathrm{SP}_{2n}(k)) = \{\pm I_{2n}\}$$

נשים לב כי $\mathrm{SP}_2(k) = \mathrm{SL}_2(k)$. נגדיר

$$\mathrm{PSP}_{2n}(k) = {}^{\mathrm{SP}_{2n}(k)}/_{Z(\mathrm{SP}_{2n}(k))}$$

נשים לב כי

$$\mathrm{SP}_{2n}(k) \supseteq \left\{\begin{pmatrix} g & \\ & -{}^t g^{-1}\end{pmatrix} \mid g \in \mathrm{GL}_n(k)\right\}$$
$$\mathrm{SP}_{2n}(k) \supseteq \left\{\begin{pmatrix} I_n & X \\ & I_n\end{pmatrix} \mid {}^t X = X\right\}$$

בלשון מרחבים וקטוריים: V מרחב וקטורי מעל k. $b : V \times V \to k$ תבנית לינארית אנטי סימטרית לא מנוונת ($\forall v, b(v_0, v) = 0 \iff v_0 = 0$) $\Longleftarrow$ נובע כי $\dim V$ זוגי.
$\Longleftarrow$ קיים בסיס לV: $B = \{v_1, \ldots, v_n, v_{-1}, \ldots, v_{-n}\}$ כך ש

- $b(v_i, v_j) = 0$, $1 \leq i, j \leq n$
- $b(v_{-i}, v_{-j}) = 0$, $1 \leq i, j \leq n$
- $b(v_i, v_{-j}) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v_i, v_j) & b(v_i, v_{-j}) \\ b(v_{-i}, v_j) & b(v_{-i}, v_{-j})\end{pmatrix}$$

ומסמנים

$$\mathrm{Sp}(V, b) = \{T \in \mathrm{Aut}_k(V) \mid b(T(u), T(v)) = b(u, v)\ \forall u, v \in V\}$$

באופן כללי: $b(u, v) = {}^t[u]_B (B(w_i, w_j))_{ij} [v]_B$ כאשר $B = (w_i)$ ולכן החבורה לעיל יוצאת כמו קודם.

משפט 1.2 $\mathrm{PSP}_{2n}(k)$ פשוטה לכל $n \geq 2$, פרט ל$\mathrm{PSP}_4(\mathbb{F}_2)$.

הערה 1.3 כאשר $\mathrm{char}k = 2$ אפשר להגדיר $\mathrm{SP}_{2n}(k)$ (ביחס לJ_{2n}). כאן לא ניתן לעשות אנלוגיה למרחבים וקטוריים.

משפט 1.4 $\mathrm{SP}_{2n}(k) \subseteq \mathrm{SL}_{2n}(k)$

1.3 החבורות האורתוגונליות

$S \in \mathrm{M}_n(k)$ הפיכה וסימטרית. $\mathrm{char}(k) \neq 2$. גם כאן ניתן להגדיר את פעולת החפיפה של $\mathrm{GL}_n(k)$:

$$S \mapsto {}^t g S g$$

מיון מחלקות החפיפה תלוי בשדה. S חופפת למטריצה אלכסונית. אם k סגור אלגברית, S חופפת לI_n. אם $k = \mathbb{R}$, S חופפת ל $\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_s \end{pmatrix}$ וr, s נקבעים באופן יחיד (משפט סילבסטר).

נקח את המטריצות הבאות:

$$S = \begin{cases} \begin{pmatrix} & I_l \\ I_l & \end{pmatrix} & n = 2l \\ \begin{pmatrix} & & I_l \\ & 1 & \\ I_l & & \end{pmatrix} & n = 2l+1 \end{cases}$$

הגדרה 1.5 חבורת המטריצות האורתוגונליות:

$$\mathrm{O}_n(k) = \mathrm{O}_n(k, S) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_n(k) \mid {}^t g S g = S \right\}$$

מתקיים

$$Z(\mathrm{O}_n(k)) = \{\pm I_n\}$$

ומסמנים

$$\mathrm{SO}_n(k) = \mathrm{O}_n(k) \cap \mathrm{SL}_n(k)$$
$$\Omega_n(k) = \langle [\mathrm{O}_n(k), \mathrm{O}_n(k)] \rangle$$

המרכז של $\Omega_n(k)$: $Z(\Omega_n(k)) = \Omega_n(k) \cap \{\pm I_n\}$.

משפט 1.6 החבורה $\Omega_n(k) / Z(\Omega_n(k))$ פשוטה לכל $n \geq 5$.

2 חבורות Weyl

2.1 מערכות שורשים (Root Systems)

יהי $(V, (\cdot,\cdot))$ מרחב מכפלה פנימית ממימד l מעל $\mathbb{R}$. לוקטור $u \neq 0$ נסמן בw_u את העתקת שיקוף (reflection) על V ביחס לעל־מישור הניצב לu. זאת העתקה לינארית המקיימת

- $w_u(v) = v$ לכל $v \perp u$.

- $w_u(u)=-u$.

ולכן ל־$v\in V$

$$\begin{aligned}w_u(v)&=w_u\left(\underbrace{v-\frac{(u,v)}{(u,u)}u}_{\perp u}+\frac{(u,v)}{(u,u)}u\right)\\&=v-\frac{2(u,v)}{(u,u)}u\end{aligned}$$

בפרט w_u היא איזומטריה.

הגדרה 2.1 תהי ϕ תת־קבוצה סופית של וקטורים שונים מאפס. נאמר כי ϕ מערכת שורשים ב־V אם:

1. ϕ פורשת את V.
2. $w_u(\phi)=\phi$ לכל $u\in\phi$ (מספיק לדרוש הכלה מאיזשהו כיוון כי $w_v^2=\mathrm{id}_V$ ואז אפשר להפעיל את w_v על שני האגפים ולקבל את ההכלה ההפוכה).
3. $\frac{2(u,v)}{(u,u)}u\in\mathbb{Z}$ לכל $u,v\in\phi$.
4. אם $u,\lambda v\in\phi$ $\Longleftarrow$ $\lambda=\pm1$.

דוגמאות

1. ב־$\mathbb{R}^{l+1}$ ($\{e_1,\dots,e_{l+1}\}$ הבסיס הסטנדרטי) ניקח $V=\{\sum x_ie_i\mid\sum x_i=0\}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נסמן

$$\phi=\{e_i-e_j\mid i\neq j\}$$

זאת מערכת שורשים (בעלת $l(l+1)$ שורשים) המסומנת A_l. נראה זאת:

1: ברור.

3: ל־$i\neq j$ ו־$r\neq s$:

$$\frac{2(e_i-e_j,e_r-e_s)}{(e_i-e_j,e_i-e_j)}=(e_i-e_j,e_r-e_s)=\delta_{ir}-\delta_{is}-\delta_{jr}+\delta_{js}\in\mathbb{Z}$$

2:

$$\begin{aligned}w_{e_i-e_j}(e_r-e_s)&=e_r-e_s-(\delta_{ir}-\delta_{is}-\delta_{jr}+\delta_{js})(e_i-e_j)\\&=\begin{cases}e_r-e_s & i,j\neq r,s\\ e_r-e_s-2(e_r-e_s)=e_s-e_r & i=r\ (\Longrightarrow\ j\neq r,i\neq s),j=s\\ e_r-e_s-(e_r-e_j)=e_j-e_s & i=r\,,j\neq s\\ e_r-e_s-(e_i-e_s)=e_r-e_i & j=s\,(\Longrightarrow\ j\neq r,i\neq s),i\neq r\end{cases}\\&\in\phi\end{aligned}$$

4: ברור.

הערה 2.2 נראה בהמשך שדוגמה זו מתאימה ל$\mathrm{SL}_{l+1}(F)$.

2. $V=\mathbb{R}^l$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$\phi=\{\pm e_i\pm e_j \mid 1\le i<j\le l\}\cup\{\pm e_i \mid 1\le i\le l\}$$

(בעלת $2l^2$ שורשים)

זאת מערכת שורשים המסומנת B_l. באופן שקול

$$\phi=\left\{v=\sum x_ie_i \mid \|v\|^2=1,2\right\}$$

נבדוק שזו אכן מערכת שורשים:

1: ברור.

3: ברור: $u,v\in\phi \impliedby \{2(u,v),(u,v)\}\subseteq\mathbb{Z}\ni\frac{2(u,v)}{(u,u)}$

2: $u,v\in\phi \impliedby w_u(v)=v-\frac{2(u,v)}{(u,u)}u\in\sum\mathbb{Z}e_i$ ומתקיים $\|w_u(v)\|^2=\|v\|^2\in$
$\{1,2\}\impliedby w_u(v)\in\phi$

4: ברור.

3. $V=\mathbb{R}^l$, $\phi=\{\pm e_i\pm e_j \mid 1\le i<j\le l\}\cup\{\pm 2e_i \mid 1\le i\le l\}$. זאת מערכת שורשים המסומנת C_l (תרגיל).

4. $V=\mathbb{R}^l$. $\phi=\{\pm e_i\pm e_j \mid 1\le i<j\le l\}$. זאת מערכת שורשים המסומנת D_l (תרגיל).

5. $V=\left\{\sum_{i=1}^3 x_ie_i\in\mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i=0\right\}$.

$$\phi=\{e_i-e_j \mid 1\le i\ne j\le 3\}\cup\{\pm(2e_{i_1}-e_{i_2}-e_{i_3}) \mid i_1\ne i_2\ne i_3\}$$

זאת מערכת שורשים המסומנת G_2 בעלת 12 איברים. נראה זאת: באופן שקול

$$\phi=\left\{v=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z},\ x_1+x_2+x_3=0,\ \|v\|^2=2,6\right\}$$

1: ברור כי ϕ פורשת את V.

3: $u,v\in\phi$,

$$\frac{2(u,v)}{\|u\|^2}=\begin{cases}(u,v) & u=e_i-e_j\\ \frac{(2e_{i_1}-e_{i_2}-e_{i_3},v)}{3} & u=2e_{i_1}-e_{i_2}-e_{i_3}\end{cases}\in\mathbb{Z}$$

כאשר במקרה השני זה נכון כי סכום הקואורדינטות של v הוא 0, והמקדמים של u שווים (ל2) מודולו 3, ולכן המונה הוא מספר שלם המתחלק ב3.

:2

$$w_u(v) = v - \frac{2(u,v)}{\|u\|^2} u \in \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3$$
$$\|w_u(v)\|^2 = \|v\|^2 = 2, 6$$

$\Longleftarrow$ $w_u(v) \in \phi$.

4: ברור.

משפט 2.3 תהי ϕ מערכת שורשים במרחב V. אז קיימת תת־קבוצה בת"ל $\Pi \subseteq \phi$ כך שכל איבר בϕ הוא צירוף לינארי של איברי Π במקדמים שהם כולם ≤ 0 או כולם ≥ 0.

הגדרה 2.4 תת־קבוצה כזאת נקראת מערכת יסודית (איברי Π נקראים שורשים יסודיים ולפעמים גם שורשים פשוטים).

הוכחה: נגדיר תת־קבוצה $V^+ \subseteq V$ באופן הבא: נבחר בסיס $\{v_1, \ldots, v_l\}$ לV.

$$V^+ = \left\{ 0 \neq v = \sum_{i=1}^{l} x_i v_i \mid \text{the first } i \text{ with } x_i \neq 0 \text{ satisfies } x_i > 0 \right\}$$

תכונות

1. V^+ סגור ביחס לחיבור.
2. V^+ סגור ביחס לכפל בסקלר חיובי.
3. $V = V^+ \mathbin{\dot\cup} (-V^+) \mathbin{\dot\cup} \{0\}$.

נגדיר ל $u, v \in V$, $u \geq v$ אם $u - v = 0$ או $u - v \in V^+$ ובמקרה השני נכתוב $u > v$. זהו יחס סדר מלא על V. כמו כן, אם $u > v$, $u' > v'$ אז $u + u' > v + v'$. ואם $u > v$ ו $\lambda > 0$ אז $\lambda u > \lambda v$.

נגדיר $\phi^+ = \phi \cap V^+$ ונשים לב כי $\phi = \phi^+ \mathbin{\dot\cup} (-\phi^+)$ וכי $-\phi^+ = \phi \cap (-V^+)$.

קבוצה מהצורה $\phi^+ = \phi \cap V^+$ כאשר V^+ מקיימת את התכונות 1, 2, 3 תקרא מערכת שורשים חיובית.

נוכיח כי ϕ^+ מכילה Π כמו במשפט. תהי $\Pi \subseteq \phi^+$ המקיימת את הדרישות הבאות:

1. כל איבר של ϕ^+ הוא צירוף לינארי של איברי Π במקדמים ≥ 0.
2. אין תת־קבוצה ממש של Π המקיימת את 1.

נשים לב כי קבוצה כזאת קיימת תמיד: ϕ^+ מקיימת את 1 באופן טריוואלי, ולכן נוכל לקחת תת־קבוצה מגודל מינימלי המקיימת את 1. נראה כי Π היא כמבוקש.

יהי $\xi \in \phi$. אם $\xi \in \phi^+$ אז מ1 נקבל כי ξ צירוף לינארי של איברי Π במקדמים ≥ 0. אם $-\xi \in \phi^+$ אז נקבל מ1 כי ξ צירוף לינארי של איברי Π במקדמים ≤ 0.

נותר להראות כי Π בת"ל. זה ינבע מהתכונה הבאה שנוכיח מיד:

$$(r, s) \leq 0 \; \forall r, s \in \Pi, \; r \neq s \tag{1}$$

נראה כי מ(1) נובעת אי־תלות Π. נקח צירוף לינארי של איברי Π אשר שווה לאפס. אפשר לכתוב צירוף זה בצורה הבאה: $\sum_{i=1}^{k} x_i v_i = \sum_{j=1}^{k'} y_j u_j$ כאשר $x_i, y_j \geq 0$ ואיברי Π הם $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_{k'}\}$. שני אגפי השוויון מגדירים וקטור v במרחב V.

$$0 \leq \|v\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i, \sum_{j=1}^{k'} y_j u_j \right) = \sum_{i,j} \underbrace{x_i y_j}_{\geq 0} \underbrace{(v_i, u_j)}_{\leq 0} \leq 0$$

לכן $v = 0$. לפי הבנייה $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_{k'} \in V^+$. אם יש $i_0 \leq k$ כך ש $x_{i_0} > 0$ אז $x_{i_0} v_{i_0} \in V^+$ ולכן $0 = v = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i \in V^+$. סתירה (כי $0 \notin V^+$). לכן $x_i = 0$ לכל i ובאותו אופן $y_j = 0$ לכל j.

נוכיח את (1): יהיו $u, v \in \Pi$ עם $u \neq v$. נניח בשלילה כי $(u,v) > 0$. נתבונן ב $w_u(v) \in \phi$ ולכן $w_u(v) \in \phi^+$ או $-w_u(v) \in \phi^+$. נניח כי $w_u(v) \in \phi^+$.

$$w_u(v) = v - \underbrace{\frac{2(u,v)}{(u,u)}}_{=\lambda > 0} u$$

מצד שני $w_u(v) = \sum_{r \in \Pi} x_r \cdot r$ כאשר $x_r \geq 0$ לכל $r \in \Pi$. לכן

$$\sum_{r \in \Pi} x_r r + \lambda u - v = 0$$

המקדם של u בצירוף לינארי זה הוא $x_u + \lambda > 0$. המקדם של v הוא $x_v - 1$. אם $x_v - 1 \geq 0$ אז אגף שמאל בV^+ ואז נקבל כי $0 \in V^+$. סתירה. לכן $x_v - 1 < 0$ ואז נקבל

$$(1 - x_v) v = \sum_{u,v \neq r \in \Pi} x_r r + (x_u + \lambda) u$$

מכאן v הוא צירוף לינארי במקדמים ≤ 0 של יתר איברי Π. סתירה למינימליות Π.
נניח כי $-w_u(v) \in \phi$ ונקבל סתירה באופן דומה. ■

משפט 2.5 1. תהי $\Pi \subseteq \phi$ מערכת יסודית. אז יש מערכת חיובית יחידה המכילה את Π.

2. תהי ϕ^+ מערכת חיובית. אז ϕ^+ מכילה מערכת יסודית יחידה.

הוכחה:

1. תהי $\Pi \subseteq \phi$ מערכת יסודית. כיוון ש $\Pi = \{v_1, \ldots, v_l\}$ בסיס של V, אפשר להגדיר V^+ באמצעות Π, ואז $\Pi \subseteq V^+ \cap \phi = \phi^+$ היא מערכת חיובית המכילה את Π. נניח כי V^{pos} היא תת־קבוצה המקיימת את התכונות 1, 2, 3 מההוכחה של משפט 2.3 המקיימת $\Pi \subseteq V^{\mathrm{pos}} \cap \phi$. נראה כי

$$V^{\mathrm{pos}} \cap \phi = V^+ \cap \phi$$

יהי $\xi \in \phi$ אז $\xi = \sum_{i=1}^{l} x_i v_i$ כאשר $x_i \geq 0$ לכל i או $x_i \leq 0$ לכל i. ברור כי במקרה הראשון $\xi \in \phi^+$ ובמקרה השני $-\xi \in \phi^+$. לכן

$$\phi^+ = V^+ \cap \phi = \left\{ \phi \ni \sum_{i=1}^{l} x_i v_i \mid x_i \geq 0 \, \forall i \right\}$$

כיוון ש $\Pi \subseteq V^{\text{pos}}$, אם $x_i > 0$ אז $x_i v_i \in V^{\text{pos}}$, ואילו אם $x_i < 0$ אז מתקיים $-x_i v_i \in V^{\text{pos}}$. יהי $\xi \in V^{\text{pos}} \cap \phi$. נכתוב $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ כאשר x_i כולם מקיימים $x_i \geq 0$ או כולם מקיימים $x_i \leq 0$. במקרה השני נקבל $-\xi \in V^{\text{pos}}$ ולכן $0 \in V^{\text{pos}}$. סתירה. עכשיו ברור $V^{\text{pos}} \cap \phi = \left\{ \phi \ni \sum_{i=1}^{l} x_i v_i \mid x_i \geq 0 \, \forall i \right\}$ ולכן $V^{\text{pos}} \cap \phi = V^+ \cap \phi$. כנדרש.

2. תהי ϕ^+ מערכת חיובית. נניח כי

$$\Sigma = \{u_1, \ldots, u_l\} \subseteq \phi^+$$
$$\Pi = \{v_1, \ldots, v_l\} \subseteq \phi^+$$

שתי מערכות יסודיות. צריך להוכיח $\Sigma = \Pi$. נכתוב $u_j = \sum_{i=1}^{l} x_{ij} v_i$ עם $x_{ij} \geq 0$ ו $v_j = \sum_{i=1}^{l} y_{ij} u_i$ עם $y_{ij} \geq 0$. אז נקבל $I_l = \underbrace{\left(x_{ij}\right) \cdot \left(y_{ij}\right)}_{\text{Transformation matrices}}$. לכן

$$\sum_{j=1}^{l} \underbrace{x_{ij} y_{jk}}_{\geq 0} = \delta_{ik}$$

נניח כי $i \neq k$, ולכן $x_{ij} y_{jk} = 0$ לכל $1 \leq j \leq l$ ולכל $i \neq k$. נקבע i. יש $1 \leq j \leq l$ כך ש$x_{ij} > 0$ (כי המטריצה $\left(x_{ij}\right)$ הפיכה) ואז $y_{jk} = 0$ לכל $k \neq i$ (ובהכרח $y_{ji} > 0$ אחרת המטריצה $\left(y_{ij}\right)$ אינה הפיכה). אם יש $j_1 \neq j_2$ כך ש $0 < x_{ij_1}, x_{ij_2} \neq 0$ אז נקבל כי $y_{j_1 k} = y_{j_2 k} = 0$ לכל $k \neq i$ ולכן השורות הj_1 והj_2 של $\left(y_{ij}\right)$ פרופורציוניות וזאת סתירה. לכן המטריצה $\left(x_{ij}\right)$ היא מטריצת תמורה, במובן שבכל שורה שלה יש רק איבר אחד השונה מאפס. ע"י סידור מחדש של Π, אפשר להניח שמהמטריצה $\left(x_{ij}\right)$ אלכסונית ואז גם $\left(y_{ij}\right)$ כזאת. לכן $u_i = x_i v_i$ ל $i = 1, \ldots, l$. כיוון ש $u_i, v_i \in \phi$ נקבל כי $x_i = \pm 1$ וכיוון ש $x_i > 0$ נקבל $x_i = 1$ ולכן $u_i = v_i$ לכל $1 \leq i \leq l$.

■

מסקנה 2.6 (מהוכחת משפט 2.3): תהי $\Pi \subseteq \phi$ מערכת יסודית, אז לכל $u, v \in \Pi$ עם $u \neq v$ מתקיים $(u, v) \leq 0$.

טענה 2.7 לכל $u \in \Pi \subseteq \phi^+$ מתקיים

$$w_u\left(\phi^+ \setminus \{u\}\right) = \phi^+ \setminus \{u\}$$
$$w_u\left(u\right) = -u$$

הוכחה: נניח כי $u \neq \xi \in \phi^+$. נכתוב

$$\xi = \sum_{v\in\Pi} x_v v \qquad\qquad x_v \geq 0$$

(מאחר ו$\xi \neq u$, יש $v \neq u$ עם $x_v > 0$)

$$\phi \ni w_u(\xi) = \xi - \frac{2(u,\xi)}{(u,u)}u = \sum_{u\neq v\in\Pi} x_v v + \left(x_u - \frac{2(u,\xi)}{(u,u)}\right)u$$

כיוון שיש מקדם של איזשהו $u \neq v \in \Pi$, $x_v > 0$ וכיוון ש$w_u(\xi)$ איבר בϕ, נקבל כי כל שאר המקדמים ≥ 0. ולכן $w_u(\xi) \in \phi^+ \setminus \{u\}$ (למשל בגלל ש$x_v > 0$ או לחלופין בגלל ש $w_u(\xi) = u \iff \xi = -u \in -\phi^+$).

הראנו $w_u(\phi^+ \setminus \{u\}) \subseteq \phi^+ \setminus \{u\}$. כיוון ש$\phi^+ \setminus \{u\}$ סופית וw_u פונקציה חד־חד־ערכית, נקבל שוויון (אפשר גם להפעיל את w_u על ההכלה ולהשתמש בעובדה ש $w_u^2 = \mathrm{id}_V$).
■

משפט 2.8 נקבע $\Pi \subseteq \phi^+ \subseteq \phi$ מערכת שורשים יסודית. אז כל איבר בϕ הוא צירוף לינארי של איברי Π במקדמים <u>שלמים</u>.

הוכחה: די להוכיח את המשפט ל$\xi \in \phi^+$. אם $\xi \in \Pi$, אז אין מה להוכיח. נניח כי $\xi \in \phi^+ \setminus \Pi$. נכתוב

$$\xi = \sum_{v\in\Pi} x_v v \qquad\qquad x_v \geq 0$$
$$0 < \|\xi\|^2 = \sum_{v\in\Pi} \underbrace{x_v}_{\geq 0}(\xi, v)$$

לכן יש $u \in \Pi$ כך ש $(\xi,u) > 0$. מאחר ו$\xi \notin \Pi$, $u \neq \xi$ ולכן $w_u(\xi) \in \phi^+$ נתבונן ב

$$\begin{aligned}\phi^+ \ni w_u(\xi) &= \xi - \frac{2(u,\xi)}{(u,u)}u \\ &= \sum_{u\neq v\in\Pi} x_v v + \left(x_u - \frac{2(\xi,u)}{(u,u)}\right)u\end{aligned}$$

הגדרה 2.9 הגובה של $\xi \in \phi^+$ הוא $h(\xi) = \sum_{v\in\Pi} x_v$.

מתקיים

$$\begin{aligned}h(w_u(\xi)) &= \sum_{u\neq v\in\Pi} x_v + \left(x_u - \frac{2(\xi,u)}{(u,u)}\right) \\ &= h(\xi) - \underbrace{\frac{2(\xi,u)}{(u,u)}}_{\geq 0} < h(\xi)\end{aligned}$$

הראנו כי לכל $\xi \in \phi^+$ יש $\xi' \in \phi^+$, כך ש $h(\xi') < h(\xi)$. אם $\xi' \in \Pi$ אז $h(\xi') = 1$ ונעצור. אם $\xi' \in \phi^+ \setminus \Pi$, נחזור על התהליך ונמצא $\xi'' \in \phi^+$ כך ש $h(\xi'') < h(\xi')$. התהליך יסתיים כיוון שϕ^+ סופית. ברור עכשיו כי לכל $r \in \phi^+$, $h(r) \geq 1$ ו $h(r) = 1$ $\Longleftrightarrow r \in \Pi$.

כיוון שϕ^+ סופית, קבוצת הגבהים סופית. נפעיל אינדוקציה על $h(\xi)$. כיוון ש $h(w_u(\xi)) < h(\xi)$, באינדוקציה

$$w_u(\xi) = \sum_{v \in \Pi} y_v v \qquad\qquad y_v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$w_u(\xi) = \xi - \frac{2(u,\xi)}{(u,u)} u$$

$$\xi = \sum_{v \in \Pi} y_v v + \underbrace{\frac{2(u,\xi)}{(u,u)}}_{\in \mathbb{Z}} u$$

כנדרש. ■

הגדרה 2.10 החבורה הנוצרת ע"י $\{w_r \mid r \in \phi\}$ נקראת חבורת Weyl של ϕ ומסומנת $W = W(\phi)$.

W פועלת על ϕ. הפעולה נאמנה, כלומר אם $w(\xi) = \xi$ לכל $\xi \in \phi$ אז $w = \mathrm{id}_V$ (כיוון שϕ פורשת את V).

משפט 2.11 נקבע $\phi \supseteq \phi^+ \supseteq \Pi$ מערכת יסודית. אז

1. $W \cdot \Pi = \phi$
2. $W = W_0 = \langle w_u \mid u \in \Pi \rangle$

הוכחה: נראה כי $W_0 \cdot \Pi = \phi$. נניח כי $\xi \in \phi^+$. אם $\xi \in \Pi$ אז $\xi = \mathrm{id}_V \cdot \xi \in W_0 \cdot \Pi$. נניח כי $\xi \in \phi^+ \setminus \Pi$. בהוכחה של משפט 2.8 מצאנו שורש פשוט $u \in \Pi$ כך ש $h(w_u(\xi)) < h(\xi)$.

באינדוקציה על הגובה, $w_u(\xi) \in W_0 \cdot \Pi$. נפעיל w_u עוד פעם:

$$\xi = w_u(w_u(\xi)) \in \underbrace{w_u \cdot W_0}_{\substack{=W_0 \\ (u \in \Pi)}} \cdot \Pi$$

נניח כי $-\xi \in \phi^+$. מהחלק הקודם יש $w \in W_0$, $r \in \Pi$ כך ש $-\xi = w(r)$. מכאן

$$\xi = w(-r) = w(w_r(r)) = \left(\underbrace{w w_r}_{\substack{\in W_0 \\ (r \in \Pi)}} \right)(r) \in W_0 \cdot \Pi$$

הראנו כי $\phi \subseteq W_0 \cdot \Pi \subseteq \phi$ ולכן $W_0 \cdot \Pi = \phi$.

נראה כי $W = W_0$. די להראות כי לכל $\xi \in \phi$ מתקיים $w_\xi \in W_0$. נכתוב $\xi = w(s)$ כאשר $w \in W_0$ ו$s \in \Pi$. נראה $w_\xi = w \cdot w_s \cdot w^{-1}$:

$$\begin{aligned}(v \in V)\ \ w \cdot w_s \cdot w^{-1}(v) =& w\left[w_s\left(w^{-1}(v)\right)\right] \\ =& w\left[w^{-1}(v) - \frac{\left(s, w^{-1}(v)\right)}{(s,s)} s\right] \\ \underbrace{}_{w \text{ is an isometry}} =& w\left[w^{-1}(v) - \frac{(w(s), v)}{(w(s), w(s))} s\right] \\ =& v - \frac{(w(s), v)}{(w(s), w(s))} w(s) \\ =& w_{w(s)}(v) = w_\xi(v)\end{aligned}$$

כיוון ש $w, w_s, w^{-1} \in W_0$, גם $w_\xi \in W_0$. ∎

הערה 2.12 המטריצות המייצגות של איברי W ביחס לΠ הן ב

$$\mathrm{GL}_l(\mathbb{Z}) = \{X \in \mathrm{M}_l(\mathbb{Z}) \mid \det X = \pm 1\}$$

($l = \dim V = |\Pi|$)

דוגמאות

1. במערכת A_l

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{l+1} \supseteq V = & \left\{\sum_{i=1}^{l+1} x_i e_i \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \sum_{i=1}^{l+1} x_i = 0\right\} \\ \phi = & \{v_{ij} = e_i - e_j \mid 1 \le i \neq j \le l+1\} \\ \Pi = & \{v_{12}, v_{23}, \ldots, v_{l,l+1}\}\end{aligned}$$

נראה שΠ מערכת יסודית. (ברור שΠ בלתי תלויה לינארית ואפילו בסיס של V). נניח כי $i < j$

$$\begin{aligned}v_{ij} = e_i - e_j =& (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j) \\ =& v_{i,i+1} + v_{i+1,i+2} + \cdots + v_{j-1,j}\end{aligned}$$

נניח כי $i > j$ אז

$$v_{ij} = -v_{ji} = -v_{j,j+1} - v_{j+1,j+2} - \cdots - v_{i-1,i}$$

כאן

$$\begin{aligned}\phi^+ =& \{v_{ij} \mid i < j\} \\ -\phi^+ = \phi^- =& \{v_{ij} \mid i > j\}\end{aligned}$$

חבורת Weyl נוצרת ע"י

$$\left\{w_{v_{i,i+1}} \mid 1 \le i \le l\right\}$$

נתאר את פעולת $w_{v_{i,i+1}}$ על הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{l+1}$:

$$\begin{aligned} w_{v_{i,i+1}}(e_j) &= e_j - \frac{2(e_j, v_{i,i+1})}{\underbrace{(v_{i,i+1}, v_{i,i+1})}_{2}} v_{i,i+1} \\ &= e_j - (e_j, e_i - e_{i+1})(e_i - e_{i+1}) \\ &= e_j - (\delta_{ij} - \delta_{i+1,j})(e_i - e_{i+1}) \\ &= \begin{cases} e_j & j \ne i, i+1 \\ e_{i+1} & i = j \\ e_i & i+1 = j \end{cases} \end{aligned}$$

לכן $w_{v_{i,i+1}}$ פועל כמו תמורת החילוף $(i, i+1)$ בחבורת התמורות S_{l+1}. המטריצה המייצגת של $w_{v_{i,i+1}}$: $\begin{pmatrix} I_{i-1} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I_{l-i} \end{pmatrix}$.

ברור כי החבורה הנוצרת ע"י $w_{v_{i,i+1}} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^{l+1}\right)$ איזומורפית ל-S_{l+1}. נשים לב כי $V = (e_1 + e_2 + \cdots + e_{l+1})^{\perp}$ וכן כי איברי S_{l+1} קובעים את $e_1 + \cdots + e_{l+1}$ ולכן S_{l+1} פועלת ב-V בצורה נאמנה. זה מראה שהעתקת הצמצום $\underset{w \mapsto w\restriction_V}{S_{l+1} \to W}$ היא איזומורפיזם ולכן $S_{l+1} \cong W$.

לבסוף נכתוב את האיזומורפיזם מפורשות:

$$\begin{aligned} S_{l+1} \ni \sigma \mapsto w(\sigma) &= \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & \dots & e_{\sigma(l+1)} \end{pmatrix} \\ w(\sigma)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{l+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(l+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. המערכת B_l.

$$\begin{aligned} &V = \mathbb{R}^l \\ &\phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i \le j \le l\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \le i \le l\} \end{aligned}$$

נסמן $v_{ij} = e_i - e_j$ (ל-$i \ne j$), $u_{ij} = e_i + e_j$.

$$\Pi = \{v_{12}, v_{23}, \dots, v_{l-1,l}, e_l\}$$

זהו בסיס ל-V. נראה כי Π מערכת שורשים פשוטה.

$$\begin{aligned} v_{ij} &= v_{i,i+1} + v_{i+1,i+2} + \cdots + v_{j-1,j} && (i < j) \\ v_{ij} &= -v_{ji} = -v_{j,j+1} - v_{j+1,j+2} - \cdots - v_{i-1,i} && (i > j) \end{aligned}$$

בנוסף

$$\begin{aligned} e_i &= (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \cdots + (e_{l-1} - e_l) + e_l \\ &= v_{i,i+1} + v_{i+1,i+2} + \cdots + v_{l-1,l} + e_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{ij} = e_i + e_j = & v_{i,i+1} + v_{i+1,i+2} + \cdots + v_{l-1,l} + 2e_l + \qquad (i \neq j) \\ & + v_{j,j+1} + v_{j+1,j+2} + \cdots + v_{l-1,l} \\ -u_{ij} = -e_i - e_j = & \dots \end{aligned}$$

רואים עכשיו כי

$$\phi^+ = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

חבורת Weyl: נוצרת ע"י

$$\left\{w_{v_{i,i+1}} \mid 1 \leq i \leq l-1\right\} \cup \{w_{e_l}\}$$

ראינו כי $w_{v_{i,i+1}}$ פועל על הבסיס הסטנדרטי כמו החילוף $(i, i+1)$ ואלה יוצרים את S_l. מההגדרה של השיקוף מתקיים

$$w_{e_l}(e_j) = \begin{cases} e_j & j \neq l \\ -e_l & j = l \end{cases}$$

לw_{e_l} הייצוג המטריציוני $\begin{pmatrix} I_{l-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}$. באותו אופן,

$$\rho_i = w_{e_i} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ -x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$$

W נוצרת ע"י S_l ו $\rho_l = w_{e_l}$.

$\{\rho_1, \dots, \rho_l\}$ יוצרים חבורה האיזומורפית ל$\mathbb{Z}_2^l$. נראה כי בזיהויים הנ"ל, S_l מנרמלת את $\mathbb{Z}_2^l$.

ל$\sigma \in S_l$ התאמנו

$$\sigma \mapsto w(\sigma) \in \left\langle w_{v_{i,i+1}} \right\rangle$$

תרגיל $w(\sigma)\rho_i w(\sigma)^{-1}=\rho_{\sigma(i)}$ (דומה למה שעשינו בהוכחה של משפט 2.11).
לכן $W\cong S_l\ltimes\mathbb{Z}_2^l$ ו $|W|=2^l\cdot l!$.

תרגיל: $W(C_l)\cong S_l\ltimes\mathbb{Z}_2^l$

תרגיל: $W(D_l)\cong S_l\ltimes\mathbb{Z}_2^{l-1}$

טענה 2.13 יהיו $r,s\in\phi$ בת"ל ($r\neq\pm s$)

1. אם $(r,s)>0$ אז $r-s\in\phi$
2. אם $(r,s)<0$ אז $r+s\in\phi$

הוכחה:

$$(r,s)=\|r\|\cdot\|s\|\cdot\cos\theta_{r,s}$$

נסמן $A_{r,s}=\frac{2(r,s)}{(r,r)}\in\mathbb{Z}$,$A_{s,r}=\frac{2(s,r)}{(s,s)}\in\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}\ni A_{r,s}\cdot A_{s,r}=4\cos^2\theta_{r,s}\in\{0,1,2,3\}$$

נכתוב את טבלת האפשרויות לכך שמכפלה של שני מספרים שלמים היא בתחום $\{0,1,2,3\}$ (נכתוב את המקרים עד כדי סימטריה, כדי לקבל את היתר יש להחליף את התפקידים של $A_{r,s}$ ו$A_{s,r}$):

$A_{r,s}$	$A_{s,r}$	$\theta_{s,r}$
0	0	$\pi/2$
1	1	$\pi/3$
-1	-1	$2\pi/3$
1	2	$\pi/4$
-1	-2	$3\pi/4$
1	3	$\pi/6$
-1	-3	$5\pi/6$

טבלה 1: טבלת האפשרויות למכפלה

לפי הטבלה:

1. אם $(r,s)>0$ (אז גם $A_{r,s}>0$) אז $A_{r,s}=1$ (או $A_{s,r}=1$) ואז
$$\phi\ni w_r(s)=s-\frac{2(r,s)}{(r,r)}r=s-A_{r,s}r=s-r$$
(ואם $A_{s,r}=1$ אז נקבל $r-s\in\phi$ ולכן $r-s\in\phi$ ולכן גם $s-r\in\phi$)
2. אם $(r,s)<0$ אז $(r,-s)>0$ ולכן $r+s=r-(-s)\in\phi$.

■

יהיו $r,s\in\phi$ בת"ל ($r\neq\pm s$). נסתכל על הוקטורים הבאים:

$$-pr+s,\ldots,-2r+s,-r+s,s,r+s,2r+s,\ldots,qr+s$$

נניח כי $p,q\geq 0$ מקסימליים כך ש $pr+s,\ qr+s\in\phi$.

טענה 2.14 לכל $-p\leq i\leq q$, $ir+s\in\phi$.

הוכחה: נניח בשלילה כי יש $-p<i<q$ כך $ir+s\notin\phi$. כיוון ש $-pr+s,\ qr+s\in\phi$. נמצא $-p<j'\leq i<i'<q$ כך ש $i'r+s\notin\phi$ אבל $(i'+1)r+s\in\phi$, $j'r+s\notin\phi$, אבל $(j'-1)r+s\in\phi$.

מתקיים לכן $(i'+1)r+s-r\notin\phi$. לכן מטענה 2.13, $0\leq((i'+1)r+s,r)$. כלומר

$$(i'+1)\|r\|^2+(s,r)\leq 0$$

באופן דומה $(j'-1)r+s+r\notin\phi$ ולכן שוב מטענה 2.13, $0\geq((j'-1)r+s,r)$. כלומר

$$(j'-1)\|r\|^2+(s,r)\geq 0$$

כעת נקבל $j'\leq i'$ $\Longleftarrow$ $j'-1<i'+1$ $\Longleftarrow$ $(j'-1)\|r\|^2<(i'+1)\|r\|^2$ $\Longleftarrow$ $0\leq(j'-1)\|r\|^2+(s,r)<(i'+1)\|r\|^2+(s,r)\leq 0$. סתירה. ■

הגדרה 2.15 קבוצת השורשים $(ir+s)_{-p\leq i\leq q}$ נקראת שרשרת r דרך s.

טענה 2.16 בסימונים הנ"ל שרשרת r דרך s נשמרת תחת השיקוף w_r. מתקיים $p-q=\frac{2(r,s)}{(r,r)}$. האורך המקסימלי של שרשרת הוא 4.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\phi\ni w_r(ir+s)&=-ir+w_r(s)\\&=-ir+\left(s-\frac{2(r,s)}{(r,r)}\cdot r\right)\\&=\left(\underbrace{-i-\frac{2(r,s)}{(r,r)}}_{\in\mathbb{Z}}\right)r+s\\&=j(i)\,r+s\end{aligned}$$

שייך לשרשרת. השרשרת סופית וw_r חד־חד־ערכית ולכן w_r מעביר את השרשרת לעצמה. כיוון ש $-i-\frac{2(r,s)}{(r,r)}$ יורד כאשר i עולה, w_r הופך את השרשרת. בפרט

$$\left(-q-\frac{2(r,s)}{(r,r)}\right)r+s=-pr+s$$

ע"י השוואת מקדמי r נקבל $p-q=\frac{2(r,s)}{(r,r)}$.
נתבונן בשרשרת r דרך $s'=-pr+s$:

$$s',r+s',2r+s',\ldots,(p+q)\,r+s'$$

כאן $p'=0$, $q'=p+q$ ולכן

$$p+q=p'-q'=\frac{2\,(r,s')}{(r,r)}$$

($r\neq\pm s'$).
ראינו בהוכחה של טענה 2.13 כי $\frac{2(r,s')}{(r,r)}\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$ ולכן אורך השרשרת הוא

$$p+q+1=\left|\frac{2\,(r,s')}{(r,r)}\right|+1\leq 4$$

■

דוגמאות

1. A_l - כאן שרשרת היא שרשרת באורך ≥ 2. כי כאן לשני שורשים $s=e_{i'}-e_{j'}$, $r=e_i-e_j$,

$$\frac{2\,(r,s)}{\underbrace{(r,r)}_{2}}=(r,s)\in\{0,\pm1\}$$

למשל שרשרת כזאת:

$$e_i-e_j,\ \underbrace{e_i-e_j+(e_j-e_k)}_{e_i-e_k}$$
$$(i<j)\ \ (j<k)$$

2. B_l - שרשרת היא באורך 3 לכל היותר:

$$\{\pm e_i\pm e_j\mid 1\leq i<j\leq l\}\cup\{\pm e_i\}_{i=1}^{l}$$

(תרגיל: לבדוק שהאורך הוא לכל היותר 3)
דוגמא לשרשרת באורך 3:

$$e_i-e_j,\underbrace{(e_i-e_j)+e_j}_{e_i},\underbrace{(e_i-e_j)+2e_j}_{e_i+e_j}$$
$$(i<j)$$

3. G_2 - ניתן להשיג את האורך המקסימלי 4:

$$s = 2e_2 - e_1 - e_3$$
$$r = e_1 - e_2$$
$$s, \underbrace{s+r}_{e_2-e_3}, \underbrace{s+2r}_{e_1-e_3}, \underbrace{s+3r}_{2e_1-e_2-e_3}$$

טענה 2.17 נגדיר

$$\phi^* = \left\{ h_r = \frac{2r}{(r,r)} \mid r \in \phi \right\} \subseteq V$$

זאת מערכת שורשים הנקראת המערכת הדואלית ל-ϕ.

מתקיים $\phi^{**} = (\phi^*)^* = \phi$. מתקיים ל-$r, s \in \phi$, $\|r\| > \|s\| \iff \|h_r\| < \|h_s\|$.

הוכחה: כיוון ש-h_r הוא כפולה בסקלר של r, גם ϕ^* פורשת את V.

$$\frac{2(h_r, h_s)}{(h_r, h_r)} = \frac{2 \cdot \frac{4(r,s)}{\|r\|^2\|s\|^2}}{\frac{4\|r\|^2}{\|r\|^4}} = \frac{2(r,s)}{(s,s)} \in \mathbb{Z}$$

בנוסף

$$\begin{aligned} w_{h_r}(h_s) &= h_s - \frac{2(h_r,h_s)}{(h_r,h_r)}h_r = \frac{2s}{(s,s)} - \frac{2(r,s)}{(s,s)} \cdot \frac{2r}{(r,r)} \\ &= \frac{2}{(s,s)}\left(s - \frac{2(r,s)}{(r,r)}r\right) = \frac{2w_r(s)}{(s,s)} = \frac{2w_r(s)}{(w_r(s), w_r(s))} = h_{w_r(s)} \in \phi^* \end{aligned}$$

אם $\lambda h_r \in \phi^*$ אז $\lambda h_r = h_s$ ולכן $\frac{2\lambda r}{(r,r)} = \frac{2s}{(s,s)}$ ובפרט r, s פרופורציוניים ולכן $r = \pm s$ ואז $h_r = \pm h_s$ ולכן $\lambda = \pm 1$.

נבדוק ש $\phi^{**} = \phi$:

$$h_{h_r} = \frac{2h_r}{(h_r,h_r)} = \frac{2 \cdot \frac{2r}{(r,r)}}{4\frac{(r,r)}{\|r\|^2 \cdot \|r\|^2}} = r$$

■

דוגמאות

1. A_l דואלית לעצמה:

$$h_{e_i - e_j} = \frac{2(e_i - e_j)}{(e_i - e_j, e_i - e_j)} = e_i - e_j$$

2. B_l דואלית לC_l:

$$h_{\pm e_i \pm e_j} = \frac{2\left(\pm e_i \pm e_j\right)}{\left(\pm e_i \pm e_j, \pm e_i \pm e_j\right)} = \pm e_i \pm e_j$$
$$(i<j)$$
$$h_{\pm e_i} = \frac{\pm 2 e_i}{\left(\pm e_i, \pm e_i\right)} = \pm 2 e_i$$

3. G_2 לא דואלית לG_2 אבל בדפי התרגיל הוגדר איזומורפיזם של מערכות שורשים. מסתבר שG_2 איזומורפית למערכת הדואלית שלה.

4. D_l דואלית לעצמה לפי אותו חישוב כמו של B_l.

הגדרה 2.18 ל$r, s \in \phi$ עם $r \neq \pm s$ נסמן

$$n_{r,s} = A_{r,s} \cdot A_{s,r} = \frac{2\left(r,s\right)}{\left(r,r\right)} \cdot \frac{2\left(s,r\right)}{\left(s,s\right)} \in \{0,1,2,3\}$$

נניח כי $r, s \in \Pi$. כאן $(r,s) \leq 0$. נכתוב טבלה לאפשרויות של $A_{r,s},\ A_{s,r}$ (עד כדי סימטריה, כלומר החלפת תפקידי $A_{r,s}$ ו$A_{s,r}$):

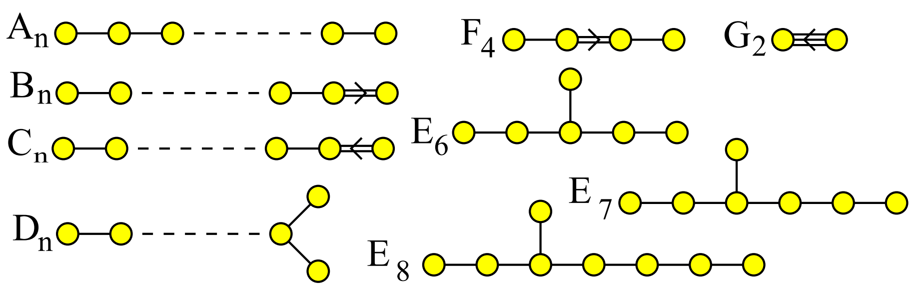
$A_{r,s}$	$A_{s,r}$
0	0
-1	-1
-1	-2
-1	-3

טבלה 2: האפשרויות של $A_{r,s},\ A_{s,r}$

אם $-1 = \frac{2(r,s)}{\|s\|^2} = \frac{2(r,s)}{\|r\|^2}$ (כלומר, כאשר $n_{r,s} = 1$) אז $\|s\| = \|r\|$.
אם $n_{r,s} = 2$ אז $-1 = \frac{2(r,s)}{\|r\|^2}$, $-2 = \frac{2(r,s)}{\|s\|^2}$ (או להפך), כלומר $2 = \frac{\|r\|^2}{\|s\|^2}$ (או $2 = \frac{\|s\|^2}{\|r\|^2}$) כלומר $\frac{\|r\|}{\|s\|} = \sqrt{2}$ (או $\frac{\|s\|}{\|r\|} = \sqrt{2}$).
אם $n_{r,s} = 3$ אז $\frac{\|r\|}{\|s\|} = \sqrt{3}$ (או $\frac{\|s\|}{\|r\|} = \sqrt{3}$).

דיאגרמת דינקין (Dynkin) של ϕ

$\Pi \subseteq \phi$ מערכת יסודית. נקח גרף שקודקודיו הם בהתאמה עם Π. ל$r, s \in \Pi$ שונים נקשר את r לs ב $n_{r,s} = \frac{4(r,s)^2}{\|r\|^2\|s\|^2}$ צלעות. כאשר $n_{r,s} > 1$, ראינו כי לאחד השורשים נורמה גדולה מהשני. במקרה הזה, נסמן גם חץ המצביע לשורש בעל הנורמה הגדולה יותר.



איור 1: דיאגרמות דינקין של מערכות שורשים מוכרות. בציור החץ מופנה מהשורש עם האורך הגדול לשורש עם האורך הקטן.

הערה 2.19 קיים מושג של מערכת שורשים אי־פריקה: זאת מערכת שורשים שלא ניתן להציגה כאיחוד של שתי תת־מערכות שורשים ניצבות. מסתבר שאלו דיאגרמות דינקין של כל מערכות השורשים האי־פריקות (לא נוכיח ולא נשתמש בזה).

2.2 פונקציית האורך

$\Pi \subseteq \phi$, $W = W(\phi)$.

ל־$w \in W$ נגדיר $l(w)$ להיות האורך של מכפלה מינימלית של שיקופים פשוטים אשר שווה ל־w.

ל־$w \in W$ נגדיר

$$\begin{aligned} \phi_w^+ &= \phi^+ \cap w^{-1}\left(\phi^-\right) \\ &= \left\{\xi \in \phi^+ \mid w(\xi) \in \phi^-\right\} \\ n(w) &= \left|\phi_w^+\right| \end{aligned}$$

למה 2.20 יהיו $w \in W$, $r \in \Pi$.

1. אם $w^{-1}(r) \in \phi^+$ אז $n(w_r w) = n(w) + 1$
2. אם $w^{-1}(r) \in \phi^-$ אז $n(w_r w) = n(w) - 1$
3. אם $w(r) \in \phi^+$ אז $n(w w_r) = n(w) + 1$
4. אם $w(r) \in \phi^-$ אז $n(w w_r) = n(w) - 1$

הוכחה: לפי טענה 2.7 מתקיים $w_r\left(\phi^+ \setminus \{r\}\right) = \phi^+ \setminus \{r\}$ ולכן גם $w_r\left(\phi^- \setminus \{-r\}\right) = \phi^- \setminus \{-r\}$. לכן w_r מחליף סימן לשני שורשים בדיוק ואלה הם $\pm r$.

$$\begin{aligned} \phi_{w_r w}^+ &= \phi^+ \cap w^{-1} w_r\left(\phi^-\right) \\ &= \phi^+ \cap w^{-1}\left(\left(\phi^- \setminus \{-r\}\right) \cup \{r\}\right) \\ &= \left(\phi^+ \cap w^{-1}\left(\phi^- \setminus \{-r\}\right)\right) \cup \left(\phi^+ \cap \left\{w^{-1}(r)\right\}\right) \end{aligned}$$

1. נניח כי $w^{-1}(r) \in \phi^+$, אז $w^{-1}(-r) \in \phi^-$ ואז

$$\phi^+ \cap w^{-1}\left(\phi^- \setminus \{-r\}\right) = \phi^+ \cap w^{-1}\left(\phi^-\right) = \phi_w^+$$

לכן

$$\phi_{w_r w}^+ = \phi_w^+ \cup \left\{w^{-1}(r)\right\}$$

ולכן $n(w_r w) = n(w) + 1$.

2. אם $w^{-1}(r) \in \phi^-$ נקבל

$$\begin{aligned}\phi_{w_r w}^+ &= \left(\phi^+ \cap w^{-1}\left(\phi^- \setminus \{-r\}\right)\right) \cup \left(\phi^+ \cap \left\{w^{-1}(r)\right\}\right) \\ &= \left(\phi^+ \cap w^{-1}\left(\phi^-\right)\right) \setminus \left(\left\{w^{-1}(-r)\right\}\right) \\ \underbrace{}_{w^{-1}(-r)\in\phi^+} \\ &= \phi_w^+ \setminus \left(\left\{w^{-1}(-r)\right\}\right)\end{aligned}$$

ולכן $n(w_r w) = n(w) - 1$.

כדי להראות את 3, 4, נבצע חישוב דומה לקודם:

$$\begin{aligned}\phi_{ww_r}^+ &= \phi^+ \cap w_r w^{-1}\left(\phi^-\right) \\ &= w_r\left[w_r\left(\phi^+\right) \cap w^{-1}\left(\phi^-\right)\right] \\ &= w_r\left[\left(\{-r\} \cup w_r\left(\phi^+ \setminus \{r\}\right)\right) \cap w^{-1}\left(\phi^-\right)\right] \\ &= w_r\left[\left(\left(\phi^+ \setminus \{r\}\right) \cap w^{-1}\left(\phi^-\right)\right) \cup \left(\{-r\} \cap \left\{w^{-1}\left(\phi^-\right)\right\}\right)\right]\end{aligned}$$

וממשיכים באופן דומה לקודם. ■

משפט 2.21 $l(w) = n(w)$.

הוכחה: נרשום $w = w_{r_1} w_{r_2} \cdot \cdots \cdot w_{r_k}$ כאשר $r_1, \ldots, r_k \in \Pi$ ו $l(w) = k$.

$$\begin{aligned}n(w) &= n\left(\left(w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{k-1}}\right) \cdot w_{r_k}\right) \\ &= n\left(w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{k-1}}\right) \pm 1 \\ &\le n\left(w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{k-1}}\right) + 1 \\ &\le n\left(w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{k-2}}\right) + 2 \\ &\le \ldots \\ &\le n\left(w_{r_1}\right) + k - 1 = k = l(w)\end{aligned}$$

לכן $n(w) \le l(w)$.

נניח בשלילה כי $n(w) < l(w)$. לכן בשרשרת אי־השוויונים יש לפחות אי־שוויון חזק אחד. לכן יש j כך ש

$$n\left(\left(w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_j}\right) \cdot w_{r_{j+1}}\right) = n\left(w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_j}\right) - 1$$

לפי למה 2.20 זה מחייב $w_{r_1} \cdot \dots \cdot w_{r_j}(r_{j+1}) \in \phi^-$. מתקיים $r_{j+1} \in \phi^+ \setminus \{r_j\}$ כי אחרת $r_{j+1} = r_j$ ואז $w_{r_j} w_{r_{j+1}} = 1$ וזה מקצר את המכפלה של w ב2 וזו סתירה. לכן $w_{r_j}(r_{j+1}) \in \phi^+ \setminus \{r_j\} \subseteq \phi^+$. לכן קיים $i < j$ כך ש $w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j}(r_{j+1}) \in \phi^+$ וכך ש $w_{r_i}\left[w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j}(r_{j+1})\right] \in \phi^-$. מכאן $w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j}(r_{j+1}) = r_i$.

במקרה כזה ראינו (ראו סוף ההוכחה של משפט 2.11) כי

$$\begin{aligned} w_{r_i} &= w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j} w_{r_{j+1}} \left(w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j}\right)^{-1} \\ &= w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j} w_{r_{j+1}} w_{r_j} \cdot \dots \cdot w_{r_{i+1}} \\ &\Longrightarrow \\ w_{r_i} w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j} &= w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j} w_{r_{j+1}} \end{aligned}$$

נציב בw:

$$\begin{aligned} w &= w_{r_1} w_{r_2} \cdot \dots \cdot w_{r_{i-1}} \left(w_{r_i} \cdot \dots \cdot w_{r_j}\right) \cdot w_{r_{j+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_k} \\ &= w_{r_1} w_{r_2} \cdot \dots \cdot w_{r_{i-1}} \left(w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j} w_{r_{j+1}}\right) \cdot w_{r_{j+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_k} \\ &= w_{r_1} w_{r_2} \cdot \dots \cdot w_{r_{i-1}} w_{r_{i+1}} \cdot \dots \cdot w_{r_j} \cdot w_{r_{j+2}} \cdot \dots \cdot w_{r_k} \end{aligned}$$

וזו מכפלה קצרה יותר (ב2 איברים). סתירה. ■

מסקנה 2.22 נניח כי $w(\Pi) = \Pi$. אז $w = 1$.

הוכחה: כיוון שכל איבר בϕ^+ הוא צירוף לינארי של איברי Π במקדמים $0 \leq$, נסיק כי $w(\phi^+) = \phi^+$ ואז

$$\begin{aligned} l(w) = n(w) = \left|\phi_w^+\right| &= \left|\phi^+ \cap w^{-1}\left(\phi^-\right)\right| \\ &= \left|w\left(\phi^+\right) \cap \phi^-\right| \\ &= \left|\phi^+ \cap \phi^-\right| = 0 \end{aligned}$$

וזה מחייב $w = 1$. ■

הערה 2.23 נזכר כי $W(A_l) \cong S_{l+1}$. כאן

$$\begin{aligned} \phi^+ &= \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq l+1\} \\ \phi^- &= \{e_i - e_j \mid 1 \leq j < i \leq l+1\} \end{aligned}$$

ויש איזומורפיזם $\sigma \mapsto w(\sigma)$. במקרה זה $l(w(\sigma)) = n(w(\sigma))$ הוא אורך הקצר ביותר של σ כמכפלת חילופים, שגם שווה למספר הזוגות (i,j) עם $i < j$ כך ש $\sigma(i) > \sigma(j)$.

משפט 2.24

1. תהי $\Pi \subseteq \phi$ מערכת יסודית. אז לכל $w \in W$ גם $w(\Pi) \subseteq \phi$ היא מערכת יסודית.
2. לכל שתי מערכות יסודיות $\Pi_1, \Pi_2 \subseteq \phi$ יש $w \in W$ יחיד כך ש $w(\Pi_1) = \Pi_2$.

הוכחה:

1. ברור כי $W(\Pi)$ בת"ל. יהי $\xi \in \phi$. נכתוב $\xi = w(\xi')$, כאשר $\xi' \in \phi$. נכתוב

$$\xi' = \sum_{r \in \Pi} x_r \cdot r$$

ו$x_r \geq 0$ או $x_r \leq 0$ לכל $r \in \Pi$. אז

$$\xi = \sum_{w(r) \in \Pi} x_r \cdot w(r)$$

כל המקדמים ≤ 0 או כולם ≥ 0.

נרצה להראות קצת יותר. תהי ϕ^+ מערכת השורשים החיוביים (היחידה) המכילה את Π. ראינו כי $\phi^+ = \phi \cap V^+$ כאשר $V^+ \subseteq V$ הוא סגור ביחס לחיבור, לכפל בסקלר חיובי, וכן כך ש $V = V^+ \uplus V^- \uplus \{0\}$. ברור כי $w(V^+)$ בעל אותן תכונות כמו V^+ ולכן

$$\phi \cap w\left(V^+\right) = w\left(\phi \cap V^+\right) = w\left(\phi^+\right) \supseteq w(\Pi)$$

לכן $w(\phi^+)$ היא המערכת החיובית היחידה המכילה את המערכת היסודית $w(\Pi)$.

2. נניח כי $\Pi_1 \subseteq \phi_1^+$, $\Pi_2 \subseteq \phi_2^+$ (המערכות החיוביות המתאימות). נוכיח את הטענה באינדוקציה על

$$n = \left|\phi_1^+ \cap \phi_2^-\right|$$

אם $n = 0$ אז $\phi_1^+ \subseteq \phi_2^+$ ולכן מיחידות המערכת השורשים החיובית המכילה את Π_1 נקבל כי $\phi_1^+ = \phi_2^+$. מיחידות המערכת השורשים המוכלת בϕ_1^+ נקבל $\Pi_1 = \Pi_2$ ולכן הטענה נכונה ע"י בחירת $w = 1$.

נניח כי $n \geq 1$. נראה כי $\Pi_1 \cap \phi_2^-$ לא ריקה. אחרת $\Pi_1 \subseteq \phi_2^+$. כאן $\phi_1^+ \subseteq \phi_2^+$ ולכן $\phi_1^+ = \phi_2^+$ ומכאן $\phi_1^+ \cap \phi_2^-$ ריקה. סתירה.

נבחר $r \in \Pi_1 \cap \phi_2^-$. נתבונן ב

$$\begin{aligned} w_r\left(\phi_1^+\right) \cap \phi_2^- &= w_r\left(\phi_1^+ \setminus \{r\} \cup \{r\}\right) \cap \phi_2^- \\ &= \left(\phi_1^+ \setminus \{r\} \cup \{-r\}\right) \cap \phi_2^- \\ \underbrace{\qquad}_{-r \in \phi_2^+} &= \left(\phi_1^+ \setminus \{r\}\right) \cap \phi_2^- \\ &= \left(\phi_1^+ \cap \phi_2^-\right) \setminus \{r\} \end{aligned}$$

ולכן

$$\left|w_r\left(\phi_1^+\right) \cap \phi_2^-\right| = \left|\left(\phi_1^+ \cap \phi_2^-\right) \setminus \{r\}\right| = n - 1$$

באינדוקציה (כיוון ש$w_r\left(\phi_1^+\right)$ היא המערכת החיובית היחידה היחידה שמכילה את $w_r(\Pi_1)$), יש $w' \in W$ כך ש $\Pi_2 = w'\left(w_r\left(\phi_1^+\right)\right)$. נקח $w = w' w_r$.

לבסוף, אם $w_1(\Pi_1) = \Pi_2$, $w_2(\Pi_1) = \Pi_2$ אז $w_2^{-1} w_1(\Pi_1) = \Pi_1$. ממסקנה 2.22 נובע כי $w_2^{-1} w_1 = 1$ ולכן $w_1 = w_2$.

$\blacksquare$

מסקנה 2.25 מספר המערכות היסודיות בϕ הוא $|W|$.

משפט 2.26 נקבע מערכת יסודית $\Pi \subseteq \phi^+ \subseteq \phi$. יש איבר יחיד $w_0 \in W$ כך ש

$$w_0\left(\phi^+\right) = \phi^-$$

w_0 הוא מסדר 2. w_0 הוא בעל אורך מקסימלי מבין איברי W. מתקיים $l(w) = \frac{1}{2}|\phi|$.

הוכחה: $-\Pi \subseteq \phi^-$ היא מערכת יסודית והמערכת החיובית היחידה המכילה את $-\Pi$ היא ϕ^-. ממשפט 2.24 יש $w_0 \in W$ כך ש $w_0(\Pi) = -\Pi$ ולכן ברור ש $w_0(\phi^-) = \phi^+$.

נניח כי $w_0' \in W$ גם מקיים $w_0'(\phi^+) = \phi^-$. מההוכחה של משפט 2.24, $w_0(\Pi)$ היא המערכת היסודית החלקית לϕ^- . זה מחייב ש $w_0'(\Pi) = -\Pi$. מהיחידות במשפט 2.24, $w_0' = w_0$.

ברור כי $w_0^2(\Pi) = \Pi$. שוב מהיחידות במשפט 2.24 נקבל $w_0^2 = 1$.

$$\begin{aligned} l(w_0) = n(w_0) &= \left|\phi^+ \cap w_0^{-1}\left(\phi^-\right)\right| \\ &= \left|w_0\left(\phi^+\right) \cap \phi^-\right| \\ &= \left|\phi^- \cap \phi^-\right| = \left|\phi^-\right| = \frac{1}{2}|\phi| \end{aligned}$$

וזה המקסימום שיכול להתקבל שכן הקבוצה $\phi^+ \cap w_0^{-1}(\phi^-)$ היא קבוצה חלקית לϕ^+, ולכן לכל היותר מגודל ϕ^+. $\blacksquare$

דוגמה

בA_l

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}_{(l+1)\times(l+1)}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} w_0(e_i - e_j) &= e_{l+1-i} - e_{l+1-j} \\ i < j &\iff l+1-i > l+1-j \\ e_i - e_j \in \phi^+ &\iff e_{l+1-i} - e_{l+1-j} \in \phi^- \end{aligned}$$

ולכן $w_0(\phi^+) = \phi^-$.

2.3 יוצרים ויחסים בחבורת Weyl

נקבע $\phi \supseteq \Pi$ מערכת יסודית. לכל $r, s \in \Pi$ יהי $m_{r,s}$ הסדר של האיבר $w_r w_s$ בW ($m_{r,r} = 1$ לכל $r \in \Pi$).

משפט 2.27 W היא החבורה הנוצרת ע"י $\{w_r \mid r \in \Pi\}$ עם היחסים $(w_r w_s)^{m_{r,s}} = 1$ לכל $r, s \in \Pi$.

הוכחה: תהי $F(\Pi)$ החבורה החופשית על איברי Π. נסמן ל$r \in \Pi$ את היוצר המתאים לr בw'_r.

תהי $R \subseteq F(\Pi)$ תת־החבורה הנורמלית הקטנה ביותר ביותר אשר מכילה את הקבוצה

$$\left\{ (w'_r w'_s)^{m_{r,s}} \mid r, s \in \Pi \right\}$$

יש הומומורפיזם על (ויחיד)

$$\begin{aligned} F(\Pi) &\to W \\ w'_r &\mapsto w_r \end{aligned}$$

לכל $r \in \Pi$. ברור שR חלקית לגרעין. לכן יש הומומורפיזם על

$$F(\Pi)/R \to W$$

המשפט אומר שזה איזומורפיזם.

נניח כי $w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_k} = 1$ כאשר $r_i \in \Pi$ ללא חזרות רצופות. צריך להראות ש$w'_{r_1} \cdot \cdots \cdot w'_{r_k} \in R$. ההוכחה באינדוקציה על k. הבסיס $k = 0$ טריוואלי.

כיוון ש $\det w_{r_i} = -1$, נקבל כי $(-1)^k = 1$ ולכן $k = 2m$ זוגי. נרשום

$$\underbrace{w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{m+1}}}_{m+1 \text{ terms}} = \underbrace{w_{r_{2m}} \cdot \cdots \cdot w_{r_{m+2}}}_{m-1 \text{ terms}}$$

ולכן $n\left(w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{m+1}}\right) = l\left(w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{m+1}}\right) \leq m - 1 < m + 1$.

כמו בהוכחה של משפט 2.21 בדבר $l = n$, יש $i < j \leq m$ כך ש

$$w_{r_{i+1}} \cdot \cdots \cdot w_{r_j}(r_{j+1}) = r_i$$

וכמו בהוכחה זו נסיק כי

$$w_{r_i} w_{r_{i+1}} \cdot \cdots \cdot w_{r_j} = w_{r_{i+1}} \cdot \cdots \cdot w_{r_j} w_{r_{j+1}}$$

זהו יחס באורך $2(j - i + 1) \leq 2m = k$.

אם $2(j - i + 1) < k$, נפעיל אינדוקציה ואז

$$w'_{r_i} w'_{r_{i+1}} \cdot \cdots \cdot w'_{r_j} = w'_{r_{i+1}} \cdot \cdots \cdot w'_{r_j} w'_{r_{j+1}} \pmod R \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 1 = w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_k} &= w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{i-1}} \left(w_{r_{i+1}} \cdot \cdots \cdot w_{r_{j+1}}\right) w_{r_{j+1}} \cdot \cdots \cdot w_{r_{2m}} \\ &= w_{r_1} \cdot \cdots \cdot w_{r_{i-1}} \left(w_{r_{i+1}} \cdot \cdots \cdot w_{r_j}\right) w_{r_{j+2}} \cdot \cdots \cdot w_{r_k} \end{aligned}$$

באינדוקציה

$$w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_{i-1}}\left(w'_{r_{i+1}}\cdot\dots\cdot w'_{r_j}\right)w'_{r_{j+2}}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}\in R$$

ולפי (2) נקבל

$$R\ni w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_{i-1}}\left(w'_{r_{i+1}}\cdot\dots\cdot w'_{r_j}\underbrace{w'_{r_{j+1}}w'_{r_{j+1}}}_{1}\right)w'_{r_{j+2}}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}=$$
$$=w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_{i-1}}\left(w'_{r_i}w'_{r_{i+1}}\cdot\dots\cdot w'_{r_j}w'_{r_{j+1}}\right)w'_{r_{j+2}}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}$$

נניח כי $m=j-i+1$. זה ייתכן רק כאשר $j=m$, $i=1$, ואז

$$w_{r_2}\cdot\dots\cdot w_{r_m}\left(r_{m+1}\right)=r_1 \tag{3}$$

נצמיד את השוויון

$$w_{r_1}\cdot\dots\cdot w_{r_k}=1$$

ב w_{r_1} ונקבל

$$w_{r_2}\cdot\dots\cdot w_{r_k}w_{r_1}=1$$

נחזור על הארגומנט: או $w'_{r_2}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}w'_{r_1}\in R$ או $w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+1}}\left(r_{m+2}\right)=r_2$.
במקרה הראשון נצמיד ב w'_{r_1} (כזכור R תת־חבורה נורמלית) ונקבל $w'_{r_1}w'_{r_2}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}\in R$.
במקרה השני

$$w_{r_2}=\left(w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+1}}\right)w_{r_{m+2}}\left(w_{r_{m+1}}\cdot\dots\cdot w_{r_3}\right)$$

(לפי הזהות $w\left(s\right)=r\implies w_r=ww_sw^{-1}$ המופיעה בסוף ההוכחה של משפט 2.11)
לכן

$$w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+2}}=w_{r_2}w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+1}}$$

נכפול ב$w_{r_3}w_{r_2}$ מצד שמאל ונקבל

$$w_{r_3}w_{r_2}w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+2}}=w_{r_4}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+1}}$$
$$\Longrightarrow$$
$$w_{r_3}w_{r_2}w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+2}}w_{r_{m+1}}\cdot\dots\cdot w_{r_4}=1$$

נחזור על הארגומנט: או

$$w'_{r_3}w'_{r_2}w'_{r_3}\cdot\dots\cdot w'_{r_{m+2}}w'_{r_{m+1}}\cdot\dots\cdot w'_{r_4}\in R$$

או (האנלוג של (3))

$$w_{r_2}w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_m}\left(r_{m+1}\right)=r_3 \tag{4}$$

במקרה הראשון,

$$\begin{aligned} w'_{r_3}w'_{r_2}w'_{r_3}\cdot\dots\cdot w'_{r_{m+2}} &= w'_{r_4}\cdot\dots\cdot w'_{r_{m+1}} \pmod R \\ w'_{r_3}\cdot\dots\cdot w'_{r_{m+2}} &= w'_{r_2}w'_{r_3}w'_{r_4}\cdot\dots\cdot w'_{r_{m+1}} \pmod R \end{aligned} \tag{5}$$

כמו קודם

$$\begin{aligned} 1 &= w_{r_1}\cdot\dots\cdot w_{r_k} \\ &= w_{r_1}\cdot\left(w_{r_2}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+1}}\right)\cdot w_{r_{m+2}}\cdot\dots\cdot w_{r_k} \\ &= w_{r_1}\cdot\left(w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+2}}\right)\cdot w_{r_{m+2}}\cdot\dots\cdot w_{r_k} \\ &= w_{r_1}\cdot\left(w_{r_3}\cdot\dots\cdot w_{r_{m+1}}\right)\cdot w_{r_{m+3}}\cdot\dots\cdot w_{r_k} \end{aligned}$$

באינדוקציה נקבל

$$w'_{r_1}\cdot\left(w'_{r_3}\cdot\dots\cdot w'_{r_{m+1}}\right)\cdot w'_{r_{m+3}}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}\in R$$

ומשוויון 5 נקבל $w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}\in R$.

במקרה השני, נסיק מ(3) ו(4) כי $r_1=r_3$.

נחזור על הארגומנט שוב ושוב אז או שנוכיח כמו קודם כי $w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}\in R$ כי יכולנו להפעיל אינדוקציה ואם זה לא יצליח, נקבל לבסוף

$$r:=r_1=r_3=r_5=\dots=r_{2m-1}$$

נחזור על כל הצעדים האלה ל

$$w_{r_2}\cdot\dots\cdot w_{r_m}\cdot w_{r_1}=1$$

אם באיזה שלב הוכח המשפט, אז טוב. אחרת נקבל

$$s:=r_2=r_4=\dots=r_{2m}$$

אז

$$\begin{aligned} w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_{2m}} &= w'_rw'_sw'_rw'_s\cdot\dots\cdot w'_rw'_s \\ &= \left(w'_rw'_s\right)^m \end{aligned}$$

וכן

$$\left(w_rw_s\right)^m=1$$

ולכן $m_{r,s}\mid m$ ולכן $w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_{2m}}=\left(w'_rw'_s\right)^{m_{r,s}e}\in R$. ■

משפט 2.28 חבורת Weyl היא החבורה הנוצרת ע"י $\{w_r\mid r\in\phi\}$ עם היחסים $w_r^2=1$ ו$w_rw_sw_r=w_{w_r(s)}$ לכל $r,s\in\phi$.

הוכחה: תהי $F(\phi)$ החבורה החופשית על ϕ. נסמן את היוצרים ב $\{w'_r\}_{r\in\phi}$. תהי $S\subseteq F(\phi)$ תת־החבורה הנורמלית הקטנה ביותר אשר מכילה את $w'_r w'_s w'_r \left(w'_{w_r(s)}\right)^{-1}$ לכל $r,s\in\phi$. המשפט אומר ש $W \cong {}^{F(\phi)}/_S$.

נראה כי ${}^{F(\phi)}/_S$ נוצרת ע"י $\{w'_r S \mid r\in\Pi\}$. יהי $r\in\phi$. ממשפט 2.11 יש

$$r_1,\ldots,r_k,s\in\Pi$$

כך ש $r = w_{r_1}\cdot\cdots\cdot w_{r_k}(s)$. שוב פעם מסוף ההוכחה של משפט 2.11 נובע ש

$$w_r = w_{r_1}\cdot\cdots\cdot w_{r_k}\cdot w_s\cdot w_{r_k}\cdot\cdots\cdot w_{r_1}$$

מתקיים

$$w'_{r_k}w'_s w'_{r_k} \equiv w'_{w_{r_k}(s)} \pmod S$$
$$\Longrightarrow$$
$$\begin{aligned} w'_{r_{k-1}}\left(w'_{r_k}w'_s w'_{r_k}\right)w'_{r_{k-1}} &\equiv w'_{r_{k-1}}w'_{w_{r_k}(s)}w'_{r_{k-1}} \pmod S \\ &\equiv w'_{w_{r_{k-1}}w_{r_k}(s)} \pmod S \end{aligned}$$

וכך נמשיך. לבסוף

$$\begin{aligned} w'_{r_1}\cdot\cdots\cdot\left(w'_{r_k}w'_s w'_{r_k}\right)\cdot\cdots\cdot w'_{r_1} &\equiv w_{w_{r_1}\cdot\cdots\cdot w_{r_k}(s)} \pmod S \\ &\equiv w_r \pmod S \end{aligned}$$

זה מראה ש ${}^{F(\phi)}/_S$ נוצרת ע"י תמונת $\{w'_r \mid r\in\Pi\}$ מודולו S.

נניח כי $w_{\xi_1}\cdot\cdots\cdot w_{\xi_n}=1$ כאשר $\xi_1,\ldots,\xi_n\in\phi$. צ"ל $w'_{\xi_1}\cdot\cdots\cdot w'_{\xi_n}\in S$.

נכתוב את w_{ξ_i} כמכפלת שיקופים ביחס לשורשים מΠ וכנ"ל לגבי w'_{ξ_i}. לכן יש $r_1,\ldots,r_k\in\Pi$ כך ש

$$w'_{\xi_1}\cdot\cdots\cdot w'_{\xi_n} = w'_{r_1}\cdot\cdots\cdot w'_{r_k} \pmod S$$
$$\Longrightarrow$$
$$1 = w_{\xi_1}\cdot\cdots\cdot w_{\xi_n} = w_{r_1}\cdot\cdots\cdot w_{r_k}$$

ואפשר להניח שאין חזרות. צריך להוכיח כי $w'_{r_1}\cdot\cdots\cdot w'_{r_k}\in S$. ההוכחה באינדוקציה על k. הבסיס $k=0$ טריוואלי.

בדיוק כמו קודם $k=2m$ ויש $i<j\le m$ כך ש

$$w_{r_{i+1}}\ldots w_{r_j}(r_{j+1}) = r_i$$

ולכן

$$w_{r_i} = \left(w_{r_{i+1}}\ldots w_{r_j}\right)w_{r_{j+1}}\left(w_{r_j}\ldots w_{r_{i+1}}\right)$$

כמו קודם

$$\begin{aligned} \left(w'_{r_{i+1}}\ldots w'_{r_j}\right)w'_{r_{j+1}}\left(w'_{r_j}\ldots w'_{r_{i+1}}\right) &\equiv w'_{w_{r_{i+1}}\ldots w_{r_j}(r_{j+1})} \pmod S \\ &\equiv w'_{r_i} \pmod S \end{aligned}$$

מכאן

$$w'_{r_i}w'_{r_{i+1}}\dots w'_{r_j}\equiv w'_{r_{i+1}}\dots w'_{r_j}w'_{r_{j+1}}\pmod S \tag{6}$$
$$\Longrightarrow$$
$$w_{r_i}w_{r_{i+1}}\dots w_{r_j}=w_{r_{i+1}}\dots w_{r_j}w_{r_{j+1}}$$

ולכן

$$\begin{aligned}1=w_{r_1}\cdot\dots\cdot w_{r_k}&=w_{r_1}\cdot\dots\cdot w_{r_{i-1}}\left(w_{r_i}\cdot\dots\cdot w_{r_j}\right)w_{r_{j+1}}\cdot\dots\cdot w_{r_k}\\&=w_{r_1}\cdot\dots\cdot w_{r_{i-1}}\left(w_{r_{i+1}}\dots w_{r_j}w_{r_{j+1}}\right)w_{r_{j+1}}\cdot\dots\cdot w_{r_k}\\&=w_{r_1}\cdot\dots\cdot w_{r_{i-1}}\left(w_{r_{i+1}}\dots w_{r_j}\right)w_{r_{j+2}}\cdot\dots\cdot w_{r_k}\end{aligned}$$

ומהנחת האינדוקציה נקבל כי

$$w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_{i-1}}\left(w'_{r_{i+1}}\dots w'_{r_j}\right)w'_{r_{j+2}}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}\in S$$

מ(6) נקבל $w'_{r_1}\cdot\dots\cdot w'_{r_k}\in S$ ולכן קיבלנו $W\cong {}^{F(\phi)}/_S$ (ע"י ההעתקה $w_r\mapsto w'_rS$, $r\in\phi$). ■

דוגמאות

1. A_l. כאן $W\cong S_{l+1}$.

$$\Pi=\{e_1-e_2,e_2-e_3,\dots,e_l-e_{l+1}\}\subseteq\{e_i-e_j\mid 1\le i\ne j\le l+1\}=\phi$$

וראינו את ההתאמה

$$\underbrace{w_{e_i-e_{i+1}}}_{\in W}\leftrightarrow\underbrace{(i,i+1)}_{\in S_{l+1}}$$

$m_{i,j}=$ הסדר של האיבר $w_{e_i-e_{i+1}}\cdot w_{e_j-e_{j+1}}$ ב$\mathcal{W}$ אז

$$m_{i,j}=\begin{cases}2 & |i-j|\ge 2\\3 & |i-j|=1\\1 & i=j\end{cases}\implies (k,k+1)(k+1,k+2)=(k,k+1,k+2)$$

S_{l+1} היא החבורה נוצרת ע"י $\sigma_i=(i,i+1)$ עם היחסים

$$\begin{cases}\sigma_i^2=1\\(\sigma_i\sigma_{i+1})^3=1\\(\sigma_i\sigma_{i-1})^3=1\\(\sigma_i\sigma_j)^2=1 & |i-j|\ge 2\end{cases}$$

2. G_2.

$$\Pi=\{a=e_1-e_2,\ b=2e_2-e_1-e_3\}\subseteq$$
$$\subseteq\phi\subseteq V=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1+x_2+x_3=0\right\}$$

אפשר לממש את W במייצב של $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ב-$\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$

$$w_a=\begin{pmatrix}0&1&\\1&0&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
w_b(v)&=v-\frac{2(b,v)}{(b,b)}b\\
&=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\frac{2\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\frac{1}{3}(-x_1+2x_2-x_3)\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x_1+2x_2-x_3\\2x_1-x_2+2x_3\\-x_1+2x_2+2x_3\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\
\implies w_b&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

מתקיים

$$w_a^2=w_b^2=I_3$$
$$w_aw_b=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}\qquad (w_aw_b)^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$
$$(w_aw_b)^3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}\qquad (w_aw_b)^4=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$
$$(w_aw_b)^6=I_3$$

מכאן $\langle w_a w_b\rangle \subseteq W$ תת־חבורה ציקלית מסדר 6. מתקיים

$$w_a\left(w_a w_b\right) = w_b$$

ולכן W נוצרת ע"י $\left\{\underbrace{w_a}_{\text{ord}=2}, \underbrace{w_a w_b}_{\text{ord}=6}\right\}$.

נשים לב כי $\langle w_a\rangle$ פועלת על $\langle w_a w_b\rangle$:

$$w_a\left(w_a w_b\right) w_a^{-1} = w_a\left(w_a w_b\right) w_a = w_b w_a = \left(w_a w_b\right)^{-1}$$

לכן

$$\underbrace{\langle w_a w_b\rangle}_{\cong \mathbb{Z}_6} \rtimes \langle w_a\rangle \cong D_{12}$$

החיתוך טריוואלי כי $\det w_a = -1$ ואילו $\det\left(w_a w_b\right) = 1$.

נתבונן באיבר

$$\left(w_a w_b\right)^3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

נסתכל לאן איברי Π עוברים תחת העתקה זו

$$a \mapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -a$$

$$b \mapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -b$$

קיבלנו כי $\left(w_a w_b\right)^3$ מעביר כל שורש חיובי לשורש שלילי. כלומר, זהו האיבר היחיד $w_0 = \left(w_a w_b\right)^3$ לפי משפט 2.26.

2.4 פירוש גיאומטרי

תהי $\phi \subseteq V$ מערכת שורשים במרחב מכפלה פנימית. נקבע $\Pi \subseteq \phi^+ \subseteq \phi$. לכל $r \in \phi$ נסמן

$$H_r = \langle r\rangle^{\perp} = \{v \in V \mid (v, r) = 0\}$$

תת־מרחב של V מקו־מימד 1 (על מישור). נסמן

$$E = V \setminus \left(\bigcup_{r \in \phi^+} H_r\right) = \bigcap_{r \in \phi^+}\left(V \setminus H_r\right)$$

E קבוצה פתוחה ב־V. נכתוב

$$V \setminus H_r = \{v \in V \mid (v,r) > 0\} \cup \{v \in V \mid (v,r) < 0\}$$

יהי $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (כאשר $\phi^+ = \{r_1, \dots, r_n\}$, $|\phi^+| = n$ ו $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ ונסמן גם $\varepsilon_i = \varepsilon_{r_i}$). נסמן

$$C_{\overline{\varepsilon}} = \left\{v \in V \mid \text{sign}\,(v,r) = \varepsilon_r,\ \forall r \in \phi^+\right\}$$

זאת אולי קבוצה ריקה, כי ϕ^+ בד"כ תלויה לינארית.

מתקיים $E = \bigcup_{C_{\overline{\varepsilon}} \neq \emptyset} C_{\overline{\varepsilon}}$. קל לראות כי $C_{\overline{\varepsilon}}$ פתוחה וקשירה. אם $u, v \in C_{\overline{\varepsilon}}$ אז

$$[u,v] = \{tu + (1-t)\,v \mid 0 \le t \le 1\} \subseteq C_{\overline{\varepsilon}}$$

מתקיים כי $E = \dot{\bigcup}_{C_\varepsilon \neq \emptyset} C_\varepsilon$ איחוד זר של קבוצות פתוחות וקשירות. אלה הם המרכיבים הקשירים של E. אלה הם החדרים (Chambers) של E (המתאימים ל־ϕ).

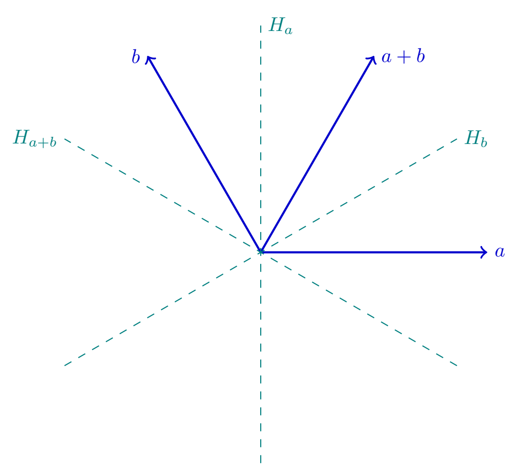
נתון חדר C. על מישור H_r ($r \in \phi^+$) יקרא קיר (Wall) של C אם $H_r \cap \partial C$ אינו מוכל בתת־מרחב חלקי ממש ל־H_r.

דוגמא

$\phi = A_2$. $\phi^+ = \left\{\underbrace{e_1 - e_2}_{a}, \underbrace{e_2 - e_3}_{b}, \underbrace{e_1 - e_3}_{a+b}\right\}$.

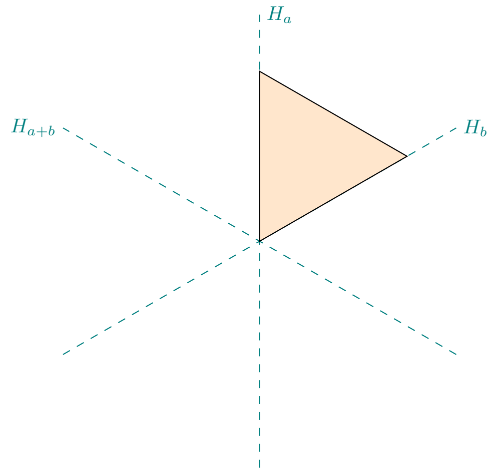
$$2\cos\theta = (a,b) = -1 \implies \theta = 120^\circ$$

A_2



איור 2: הדגמת המושגים על A_2.

A_2



איור 3: H_a וH_b קירות של החדר בציור, אך H_{a+b} אינו כזה.

באופן כללי תהי $\phi \supseteq \phi^+ \supseteq \Pi$ מערכת יסודית. נסמן $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\}$. נגדיר

$$C_\Pi = \{v \in V \mid (v, r_i) > 0,\ i = 1, \dots, l\}$$

ברור כי לכל $v \in C_\Pi$ ו $r \in \phi^+$ מתקיים $(v, r) > 0$, ולכן בסימונים הקודמים $C_\Pi = C_{(1,1,\dots,1)}$. לכן זהו חדר (לא ריק. החדר היסודי המתאים לΠ).
נראה כי הקירות של C_Π הם בדיוק העל מישורים H_{r_i}, $1 \leq i \leq l$. **הוכחה:**

$$H_{r_i} \cap \partial C_\Pi = \{v \in V \mid (v, r_i) = 0 \mid (v, r_j) = 0\ \forall j \neq i\}$$

נניח בשלילה כי $H_{r_i} \cap \partial C_\Pi$ מוכל בתת־מרחב חלקי ממש לH_{r_i}, ולכן יש $v_0 \in V \setminus \mathbb{R}r_i$ כך ש

$$H_{r_i} \cap \partial C_\Pi \subseteq v_0^\perp$$

נכתוב $v_0 = \sum_{t=1}^{l} x_t r_t$. לכל $j \neq i$ נבחר $v^j \in V$ כך ש

$$\begin{aligned} \left(v^j, r_j\right) &= 1 \\ \forall j \neq j' \ \ \left(v^j, r_{j'}\right) &= 0 \end{aligned}$$

בפרט $\left(v^j, r_i\right) = 0$. ברור ש $v^j \in H_{r_i} \cap \partial C_\Pi$. בפרט מתקיים $\left(v^j, v_0\right) = 0$. מצד שני

$$0 = \left(v^j, v_0\right) = \left(v^j, \sum_{t=1}^{l} x_t r_t\right) = \sum_{t=1}^{l} x_t \left(v^j, r_t\right) = x_j$$

כלומר $x_j = 0$ לכל $j \neq i$ $\Longleftarrow$ $v_0 = x_i r_i$. בסתירה.

עתה יהי $r \in \phi^+ \setminus \Pi$. נראה כי H_r אינו קיר של C_Π. נכתוב $r = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i r_i$ עם $\lambda_i \geq 0$, לכל i ולפחות 2 מקדמים > 0.

נניח כי $v \in H_r \cap \partial C_\Pi$

$$0 = (v, r) = \sum_{i=1}^{l} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{(v, r_i)}_{\geq 0}$$

מכאן $\lambda_i (v, r_i) = 0$ ולכן $(v, r_i) = 0$ (לו i עבורם $\lambda_i > 0$). תנאים אלה מגדירים מרחב חלקי ממש ל-H_r (כמובן $(v, r) = 0$). ■

אפשר לאפיין את איברי Π באמצעות C_Π: אלה הם בדיוק כל השורשים ב-ϕ, אשר מאונכים לקירות של C_Π ומצביעים בכיוון C_Π (במובן שהמכפלה הפנימית שלהם עם איברי C_Π חיובית).

בפירוט נניח כי $r \in \phi$ מאונך לאיזשהו קיר של C_Π ולכן $r \in H_{r_i}^{\perp} = \mathbb{R} r_i$ לאיזשהו $1 \leq i \leq l$. כלומר $r = \lambda r_i$ ולכן $r = \pm r_i$. נאמר כי r מצביע בכיוון C_Π אם $(r, v) > 0$ לכל $v \in C_\Pi$. לכן r_i מצביע בכיוון C_Π.

טענה 2.29 W פועלת טרנזיטיבית על קבוצת החדרים.

הוכחה: נקבע $\Pi \subseteq \phi^+$ כמו קודם. באופן כללי, לכל $r \in \phi$ ו-$w \in W$ מתקיים $w(H_r) = H_{w(r)}$:

$$(v, r) = 0 \iff (w(v), w(r)) = 0$$

כיוון ש-$w(V) = V$,

$$\begin{aligned} w(H_r) &= \{w(v) \mid (v, r) = 0\} \\ &= \{w(v) \mid (w(v), w(r)) = 0\} \\ &= \{v \mid (v, w(r)) = 0\} = H_{w(r)} \end{aligned}$$

לכן

$$w(E) = w\left(V \setminus \left(\bigcup_{r \in \phi} H_r\right)\right) = V \setminus \left(\bigcup_{r \in \phi} H_r\right) = E$$

כיוון ש-w הומיאומורפיזם, w מעביר מרכיב קשיר של E למרכיב קשיר של E. קל לבדוק גם כי $w(C_{\overline{\varepsilon}}) = C_{w(\overline{\varepsilon})}$:

$$\begin{aligned} w(C_{\overline{\varepsilon}}) &= \left\{w(v) \in V \mid \operatorname{sign}(v, r) = \varepsilon_r,\ \forall r \in \phi^+\right\} \\ &= \left\{v \in V \mid \operatorname{sign}(v, w(r)) = \varepsilon_r,\ \forall r \in \phi^+\right\} \\ &= \left\{v \in V \mid \operatorname{sign}(v, r) = \varepsilon_{w(r)},\ \forall r \in \phi^+\right\} \end{aligned}$$

[כאן מגדירים ε_r להיות ε_r אם $r \in \phi^+$ ו $\varepsilon_r = -\varepsilon_{-r}$ אם $r \in \phi^-$ ומגדירים $w(\overline{\varepsilon})$ ע"י $w(\overline{\varepsilon})_r = \varepsilon_{w(r)}$ ל-$r \in \phi^+$]

לכן w גם מעביר קירות של חדר לקירות של חדר.

טרנזיטיביות יהי C חדר. יהי $v \in C$. נתבונן ב $W \cdot v$. כזכור $\phi^+ = \phi \cap V^+$ ו V^+ מגדיר יחס סדר מלא על V. נבחר $v' \in W \cdot v$ גדול ביותר ביחס לסדר.
נראה כי $v' \in C_\Pi$. יהי $r \in \Pi$.

$$w_r\left(v'\right) \in W \cdot v$$

ולכן $w_r(v') \leq v'$, כלומר

$$v' - \frac{2\left(v', r\right)}{(r, r)} r \leq v'$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-\frac{2\left(v', r\right)}{(r, r)} r \leq 0$$
$$\Longleftrightarrow \left(r \in \phi^+\right)$$
$$-\frac{2\left(v', r\right)}{(r, r)} \leq 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(v', r\right) \geq 0$$

מתקיים $\langle w\left(v\right), r\rangle = \left(v', r\right) \neq 0$ (כי $\langle v, w\left(r\right)\rangle \neq 0$ כי $v \in C \subseteq E$) ולכן $\left(v', r\right) > 0$.
נכתוב $w'\left(C\right) \ni v' = w'\left(v\right) \in w'\left(C\right)$. לכן $C_\Pi \cap w'\left(C\right)$ לא ריק. זהו חיתוך של שני חדרים וזה מחייב ש$C_\Pi = w'\left(C\right)$, $C = w'^{-1}\left(C_\Pi\right)$. ■

יהי C חדר ויהי $w \in W$ כך ש $C = w\left(C_\Pi\right)$. ברור כי $w\left(C_\Pi\right) = C_{w(\Pi)}$. $w\left(\Pi\right) \subseteq \phi$ מערכת יסודית. ראינו כי הקירות של C_Π הם $\{w\left(H_r\right)\}$ כאשר $\{H_r\}$ קירות של C_Π, כלומר $r \in \Pi$. לכן אפשר לאפיין את $w\left(\Pi\right)$ באמצעות $C = w\left(C_\Pi\right)$: זאת קבוצת השורשים בϕ שמאונכים לאישהו קיר של C ומצביעים לכיוון C. זה מראה שכל חדר C קובע באופן יחיד מערכת יסודית $\Pi' \subseteq \phi$ כך ש $C = C_{\Pi'}$.

מסקנה 2.30 ההתאמה $C_{\Pi'} \mapsto \Pi'$ היא חד־חד־ערכית ועל.

מסקנה 2.31 פעולת W על קבוצת החדרים היא טרנזיטיבית ופשוטה, כלומר המייצב של כל חדר הוא טריוואלי.

הוכחה: יהי C חדר ויהי $w \in W$ כך ש $w\left(C\right) = C$. תהי $\Pi \subseteq \phi$ המערכת היסודית המתאימה לC: $C = C_\Pi$, אז

$$C = w\left(C\right) = w\left(C_\Pi\right) = C_{w(\Pi)}$$

לכן $C_\Pi = C_{w(\Pi)}$ ומכאן $w\left(\Pi\right) = \Pi$ ומכאן, ממשפט 2.24, $w = 1$. ■

משפט 2.32 יהי C חדר. אז $\overline{C}$ מכיל איבר אחד בדיוק מכל מסלול של פעולת חבורת Weyl על המרחב V.

הוכחה: יהי $v\in V$. המסלול של v הוא $W\cdot v$. יש חדר C' כך ש $v\in\overline{C'}$. יהי $w'\in W$ כך ש $w'\left(C'\right)=C$, לכן $w'\left(v\right)\in\overline{C}$.

יהיו $w_1,w_2\in W$ כך ש $w_1\left(v\right)=v_1$, $w_2\left(v\right)=v_2$ ו $v_1,v_2\in\overline{C}$. צריך להוכיח $v_1=v_2$. נכתוב

$$\underbrace{w_2w_1^{-1}}_{w}\left(v_1\right)=v_2$$

נוכיח באינדוקציה על האורך של w, כי אם $w\left(v_1\right)=v_2$, כאשר $v_1,v_2\in\overline{C}$ אז $v_1=v_2$.

נקבע מערכת יסודית $\Pi\subseteq\phi$ כך ש $C=C_\Pi$.

אם $l\left(w\right)=0$ אז $w=1$ ואז $v_1=v_2$.

נניח $l\left(w\right)>0$, ראינו שהאורך של w שווה למספר השורשים החיוביים שעוברים לשליליים ע"י w, ולכן קיים $r\in\Pi$ כך ש־$w\left(r\right)\in\phi^-$. $v_1\in\overline{C_\Pi}$ ולכן $\left(v_1,r\right)\geq 0$. $v_2\in\overline{C_\Pi}$, $-w\left(r\right)\in\phi^+$ ולכן $\left(v_2,-w\left(r\right)\right)\geq 0$ כלומר $\left(v_2,w\left(r\right)\right)\leq 0$. אבל

$$0\leq\left(v_1,r\right)=\left(w\left(v_1\right),w\left(r\right)\right)=\left(v_2,w\left(r\right)\right)\leq 0$$

ולכן $\left(v_1,r\right)=0$, ולכן בפרט $w_r\left(v_1\right)=v_1$ ואז $ww_r\left(v_1\right)=v_2$. כיוון ש $w\left(r\right)\in\phi^-$, ראינו כי (למה 2.20) $l\left(ww_r\right)=l\left(w\right)-1$. באינדוקציה נקבל $v_1=v_2$. ■

דוגמא

$\Pi\subseteq C_l$, $\Pi=\left\{e_i-e_{i+1}\mid 1\leq i\leq l-1\right\}\cup\left\{2e_l\right\}\subseteq\mathbb{R}^l$.

$$C_\Pi=\left\{v=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_l\end{pmatrix}\mid x_1>x_2>\cdots>x_l>0\right\}$$

$W\cong S_l\ltimes\mathbb{Z}_2^l$. $\sigma\in S_l$ ממומשת ע"י מטריצת התמורה $w\left(\sigma\right)$ כך ש $w\left(\sigma\right)\left(e_i\right)=e_{\sigma\left(i\right)}$.

$$\begin{aligned}w\left(\sigma\right)\left(C_\Pi\right)&=\left\{v=\begin{pmatrix}x_{\sigma^{-1}(1)}\\\vdots\\x_{\sigma^{-1}(l)}\end{pmatrix}\mid x_1>x_2>\cdots>x_l>0\right\}\\&=\left\{v=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_l\end{pmatrix}\mid y_{\sigma(1)}>y_{\sigma(2)}>\cdots>y_{\sigma(l)}>0\right\}\end{aligned}$$

איברי $\mathbb{Z}_2^l$ ממומשים בW כך: נבחר $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_l=\pm1$, $\varepsilon=\left(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_l\right)$ ממומש כאיבר

$$w\left(\varepsilon\right)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1x_1\\\vdots\\\varepsilon_nx_n\end{pmatrix}$$

$$w(\varepsilon)(C_\Pi) = \left\{ v = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n x_l \end{pmatrix} \mid x_1 > x_2 > \cdots > x_l > 0 \right\}$$
$$= \left\{ v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} \mid \varepsilon_1 y_1 > \varepsilon_2 y_2 > \cdots > \varepsilon_l y_l > 0 \right\}$$

2.5 תת־חבורות פרבוליות של W

תהי $V \supseteq \phi$ מערכת שורשים במרחב מכפלה פנימית. נקבע מערכת יסודית $\phi \supseteq \Pi$. תהי $J \subseteq \Pi$ תת־קבוצה. נסמן

$$V_J = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} J \subseteq V$$
$$\phi_J = \phi \cap V_J$$
$$W_J = \langle w_r \mid r \in J \rangle \subseteq W$$

טענה 2.33 ϕ_J היא מערכת שורשים ב־V_J. $J \subseteq \phi_J$ היא מערכת יסודית. חבורת Weyl של ϕ_J היא W_J.

הוכחה: לפי הבנייה, J הוא בסיס של V_J. כמובן, $J \subseteq \phi_J$. לכל $r, s \in \phi_J$

$$\phi \ni w_r(s) = s - \frac{2(r,s)}{(r,r)} r \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{r, s\} \subseteq V_J$$

לכן $w_r(s) \in \phi \cap V_J = \phi_J$. זה מראה $w_r(\phi_J) = \phi_J$.
שתי התכונות הנוספות בהגדרת מערכת שורשים נכונות לכל שני איברים מ־ϕ ובפרט נכונות לכל שני איברים מ־ϕ_J. מההגדרה, כל איבר ב־ϕ_J הוא צירוף לינארי של איברי J. כיוון ש־$J \subseteq \Pi$, נסיק כי כל המקדמים ≤ 0 או כולם ≥ 0. לכן $J \subseteq \phi_J$ מערכת יסודית. אנו יודעים כי $W(\phi_J)$ נוצרת ע"י השיקופים המתאימים למערכת יסודית המוכלת ב־ϕ_J ולכן $W(\phi_J)$ נוצרת ע"י $\{w_r \mid r \in J\}$, כלומר $W(\phi_J) = W_J$. ■

הגדרה 2.34 $W_J \subseteq W$ נקראת תת־חבורה פרבולית.

טענה 2.35 אם $J, K \subseteq \Pi$ שונות אז גם $W_J \neq W_K$.

הוכחה: נניח כי $W_J = W_K$. נניח כי $r \in K$. אז $w_r \in W_K$ ולכן $w_r \in W_J$. אם $r' \in J$ אז

$$w_{r'}(x) = x - \frac{2(x, r')}{(r', r')} r'$$
$$\Longrightarrow$$
$$w_{r'}(x) - x \in V_J$$
$$w_{r'}(x) \equiv x \pmod{V_J}$$

מכאן, לכל $w \in W_J$ מתקיים $w(x) \equiv x \pmod{V_J}$ (לכל $x \in V$), ובפרט $w_r(x) - x \in V_J$ לכל $x \in V$. נציב $x = r$ ונקבל

$$\begin{aligned} w_r(r) &= -r \\ &\Longrightarrow \\ -2r &\in V_J \\ &\Longrightarrow \\ r &\in V_J \end{aligned}$$

כלומר r הוא צירוף לינארי של איברים מJ. כיוון ש$r \in \Pi$, $J \subseteq \Pi$, נסיק כי $r \in J$. ■

טענה 2.36 תהי $\phi \supseteq \Pi$ מערכת יסודית. נניח כי $v \in C_\Pi$. נניח כי $w \in W$ מייצב את v: כלומר $w(v) = v$. נגדיר

$$J = \{r \in \Pi \mid (r, v) = 0\} = \Pi \cap v^\perp$$

אז w הוא מכפלה של שיקופים ביחס לאיברי J, כלומר $w \in W_J$.

הוכחה: באינדוקציה על $l(w)$. אם $l(w) = 0$ אז $w = 1$ ואין מה להוכיח.
נניח כי $l(w) > 0$, אז יש $r \in \Pi$ כך ש $w(r) \in \phi^-$. כמו בהוכחה של טענה 2.32, מתקיים $(v, r) = 0$ ולכן $w_r(v) = v$ ולכן $ww_r(v) = v$, שוב מלמה 2.20, $l(ww_r) = l(w) - 1$. באינדוקציה נקבל כי $ww_r \in W_J$. כמו כן, $r \in J$ ואז $w_r \in W_J$ ולכן $w \in W_J$.
■

הערה 2.37 נניח כי $w \neq 1$, אז קיבלנו מההוכחה כי $J \neq \emptyset$.
נכליל:

משפט 2.38 נתון $w \in W$. נסמן

$$U = \{v \in V \mid w(v) = v\}$$

אז w הוא מכפלה של שיקופים ביחס לשורשים מ$U^\perp$.

הוכחה: אפשר להניח ש$w \neq 1$. נוכיח באינדוקציה את הטענה הבאה:

טענה 2.39 נניח כי $w(v_1) = v_1, \ldots, w(v_k) = v_k$ אז w הוא מכפלה של שיקופים ביחס לשורשים המאונכים ל $v_1, \ldots, v_k$.

האינדוקציה היא על k (ואז נקח $\{v_1, \ldots, v_k\}$ להיות קבוצה בת"ל מקסימלית שw שומר איבר איבר. קבוצה זו היא בסיס של U).
עבור $k = 1$ הטענה נובעת מהטענה הקודמת (כאשר נקח $\phi \supseteq \Pi$ מערכת יסודית כך ש $v_1 \in \overline{C_\Pi}$).
עבור $k > 1$ נבחר $\phi \supseteq \Pi$ מערכת יסודית כך ש $v_k \in \overline{C_\Pi}$. מהטענה הקודמת, $w \in W_J$, כאשר $J = \Pi \cap v_k^\perp \neq \emptyset$. נתבונן ב$V_J$ ו ϕ_J ונפרק $V = V_J \oplus V_J^\perp$. כמובן, $v_k \in V_J^\perp$. נפרק

$$v_i = \underbrace{v_i'}_{\in V_J} + \underbrace{v_i''}_{\in V_J^\perp} \qquad\qquad 1 \leq i \leq k$$

(כאשר $v'_k = 0$, $v''_k = v_k$)

W_J היא חבורת Weyl של ϕ_J שהיא מערכת שורשים בV_J. $w \in W_J$ מייצב את $v_1, \dots, v_{k-1}$.

כיוון ש $w \in W_J$, ברור כי $w(v) = v$ לכל $v \in V_J^\perp$. לכן $w(v''_i) = v''_i$ לכל i. ומכיוון ש $w(v_i) = v_i$ לכל i, נסיק כי $w(v'_i) = v'_i$, $1 \le i \le k-1$.

באינדוקציה, w הוא מכפלה של שיקופים ביחס לאיברים מϕ_J שהם מאונכים ל $v'_1, \dots, v'_{k-1}$. כיוון שאיברי ϕ_J ניצבים ל$V_J^\perp$, הם גם ניצבים ל$v''_1, \dots, v''_{k-1}$. לכן w הוא מכפלה של שיקופים ביחס לשורשים מϕ_J המאונכים ל$v_1, \dots, v_k$. בסה"כ: w הוא מכפלה של שיקופים ביחס לשורשים המאונכים ל$v_1, \dots, v_k$. ■

משפט 2.40 נקבע מערכת יסודית $\Pi \subseteq \phi$ ותהיינה $J, K \subseteq \Pi$ (לא ריקות). אז

1. $\langle W_J, W_K \rangle = W_{J \cup K}$
2. $W_J \cap W_K = W_{J \cap K}$

הוכחה:

1. ברור.
2. ברור כי $W_{J \cap K} \subseteq W_J, W_K$ ולכן גם $W_{J \cap K} \subseteq W_J \cap W_K$. להפך, נניח כי $w \in W_J \cap W_K$. לכן w מייצב כל וקטור ב$V_J^\perp$ וכל וקטור ב$V_K^\perp$ ולכן מייצב כל וקטור ב$V_J^\perp + V_K^\perp$. נוכיח כי

$$V_J^\perp + V_K^\perp = V_{J \cap K}^\perp$$

ההכלה $\subseteq$ ברורה.

$$\begin{aligned}
\dim\left(V_J^\perp + V_K^\perp\right) &= \dim V_J^\perp + \dim V_K^\perp - \dim \left(\underbrace{V_J^\perp \cap V_K^\perp}_{(V_J + V_K)^\perp}\right) \\
\underbrace{}_{\dim U^\perp = \dim V - \dim U} &= \dim V - \dim V_J - \dim V_K + \dim\left(V_J + V_K\right) \\
&= \dim V - \dim\left(V_J \cap V_K\right)
\end{aligned}$$

כיוון שJ, K שתי תת־קבוצות של אותו בסיס Π, ברור כי $V_J \cap V_K = V_{J \cap K}$ ולכן

$$\dim\left(V_J^\perp + V_K^\perp\right) = \dim V - \dim\left(V_{J \cap K}\right) = \dim\left(V_{J \cap K}^\perp\right)$$

לכן משיקולי מימדים $V_J^\perp + V_K^\perp = V_{J \cap K}^\perp$.

חזרה לעניינו: כעת ברור שw מייצב כל וקטור מ$V_{J \cap K}^\perp$. ממשפט 2.38, w שווה למכפלה של שיקופים ביחס לשורשים השייכים ל $\left(V_{J \cap K}^\perp\right)^\perp = V_{J \cap K}$. שורשים אלה הם שורשי ϕ שהם צירופים לינאריים של $J \cap K$, כלומר ב$\phi_{J \cap K}$, ולכן $w \in W_{J \cap K}$.

■

נמצא קבוצת נציגים ל$W/_{W_J}$:

$$W = \dot{\bigcup} d_j W_J$$

הגדרה 2.41 תהי $\phi \supseteq \phi^+ \supseteq \Pi \supseteq J$. נגדיר

$$D_J = \left\{ w \in W \mid w(J) \subseteq \phi^+ \right\}$$

משפט 2.42 לכל $w \in W$ יש הצגה <u>יחידה</u> בצורה $w = d_j w_j$ כאשר $d_j \in D_J$ ו $w_j \in W_J$ ומתקיים $l(w) = l(d_j) + l(w_j)$.

הוכחה:

קיום נוכיח באינדוקציה על האורך. עבור $l(w) = 0$, $w = 1$, נקח $w_j = 1$, $d_j = 1$.
נניח כי $l(w) > 0$. אם $w \in D_J$ אז נבחר $w_j = 1$, $d_j = w$ וכמובן $l(w) = l(d_j) + \underbrace{l(1)}_{=0}$.
נניח כי $w \notin D_J$. לכן יש $r \in J$ כך ש $w(r) \in \phi^-$. שוב מלמה 2.20,

$$l(ww_r) = l(w) - 1 < l(w)$$

באינדוקציה $ww_r = d_j w_j$,

$$l(ww_r) = l(d_j w_j) = l(d_j) + l(w_j)$$

כיוון ש$r \in J$, $w_r \in W_J$ ולכן $ww_r \in W_J$, $w = dw_j w_r$.

$$l(d_j w_j) = l\left(\underbrace{d_j w_j w_r}_{w} w_r\right) = l(w) - 1$$

$$\Longrightarrow$$

$$l(w) = l(d_j w_j) + 1 = l(d_j) + l(w_j) + 1$$

לבסוף

$$\begin{aligned} l(w) = l(d_j w_j w_r) &\leq l(d_j) + l(w_j w_r) \\ &\leq l(d_j) + l(w_j) + l(w_r) \\ &= l(d_j) + l(w_j) + 1 \end{aligned}$$

ולכן

$$l(w) = l(d_j) + l(w_j w_r)$$

יחידות נניח כי $d_jw_j = d_j'w_j' \Longleftarrow d_j = d_j'w_j'w_j^{-1}$. אם $w_j'w_j^{-1} \neq 1$ אז

$$l\left(w_j'w_j^{-1}\right) > 0$$

וכיוון ש $w_j'w_j^{-1} \in W_J$ אז יש $r \in J$ כך ש $w_j'w_j^{-1}(r) \in \phi_J^-$ (ממשפט 2.21 מופעל על המערכת שורשים ϕ_J). כיוון ש$d_j' \in D_J$, $d_j'w_j'w_j^{-1}(r) \in \phi^-$ ואז $d_j(r) \in \phi^-$ וזאת סתירה. לכן $w_j' = w_j$ ולכן $d_j' = d_j$.

■

מסקנה 2.43 בכל מחלקה wW_J יש איבר יחיד $d_j \in D_J$. d_j הוא האיבר בעל אורך מינימלי מבין כל האיברים של איברי wW_J.

הוכחה: נכתוב $w = d_jw_j$ כמו קודם ואז $wW_J = d_jW_J$. אם יש עוד נציג $d_j' \in wW_J$ אז נכתוב $d_j' = ww_j'$ ונציב $d_j' = d_jw_jw_j'$. ואז $d_j'w_j'^{-1} = d_jw_j$ ומכאן $d_j = d_j'$ (וגם $w_j'^{-1} = w_j$).

איבר כללי בwW_J נראה כך: $d_jw_jw_j'$ ואז

$$l\left(d_jw_jw_j'\right) = l\left(d_j\right) + l\left(w_jw_j'\right) \geq l\left(d_j\right)$$

■

דוגמה

A_l. כאן $W \cong S_l$.

$$\Pi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{l-1} - e_l\}$$

נבחר

$$J = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{l_1-1} - e_{l_1}\} \cup \{e_{l_1+1} - e_{l_1+2}, \ldots, e_{l_1+l_2-1} - e_{l_1+l_2}\}$$
$$\cup \cdots \cup \left\{ e_{l_1+\cdots+l_{k-1}+1} - e_{l_1+\cdots+l_{k-1}+2}, \ldots, e_{l_1+\cdots+l_k-1} - e_{\underbrace{l_1+\cdots+l_k}_{l}} \right\}$$

(זרקנו את $e_{l_1} - e_{l_1+1}$, $e_{l_1+l_2} - e_{l_1+l_2+1}$, $\ldots$, $e_{l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}} - e_{l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}+1}$)
מתקיים

$$W_J \cong S_{l_1} \times S_{l_2} \times \cdots \times S_{l_k}$$

קיים זיהוי $D_J \leftrightarrow {}^{W}/_{W_J}$. איברי D_J מתאימים לתמורות $\sigma \in S_l$ כך

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(l_1)$$
$$\sigma(l_1+1) < \sigma(l_1+2) < \cdots < \sigma(l_1+l_2)$$
$$\vdots$$
$$\sigma(l_1+\cdots+l_{k-1}+1) < \sigma(l_1+\cdots+l_{k-1}+2) < \cdots < \sigma(l_1+\cdots+l_{k-1}+l_k)$$

3 אלגבראות לי פשוטות - סקירה

3.1 אלגבראות לי פשוטות

יהי K שדה.

הגדרה 3.1 אלגברת לי $\mathfrak{g}$ היא מרחב וקטורי מעל K כך שיש פונקציה $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ כך ש:

1. $[x,y]$ בילינארי.
2. $[x,x]=0$ לכל $x\in\mathfrak{g}$.
3. זהות יעקובי: $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ לכל $x,y,z\in\mathfrak{g}$.

דוגמאות

1. $\mathrm{M}_n(K)$ עם $[x,y]=xy-yx$ אלגברת לי מעל K. נסמנה $\mathfrak{gl}_n(k)$. באופן כללי יהי V מרחב וקטורי מעל K. $\mathrm{End}_k(V)$ אלגברה אסוציאטיבית. זאת אלגברת לי מעל K, $[T,S]=T\circ S-S\circ T$. נסמנה $\mathfrak{gl}(V)$. באופן כללי, לכל אלגברה אסוציאטיבית A מעל K יש מבנה של אלגברת לי מעל K ביחס לקומוטטור, $[x,y]=xy-yx$.
2. תהי $S\in\mathrm{M}_n(K)$. נגדיר
$$\mathfrak{g}_S=\left\{x\in\mathfrak{gl}_n(K)\mid {}^t xS+Sx=0\right\}$$
ברור כי $\mathfrak{g}_S$ תת-מרחב של $\mathfrak{gl}_n(k)$ ונראה סגירות ביחס לפעולת הקומוטטור:
$$\begin{aligned}{}^t[x,y]S+S[x,y]&=\left(y^tx^t-x^ty^t\right)S+S(xy-yx)\\&=y^tx^tS-x^ty^tS+Sxy-Syx\\&=y^t(-Sx)-x^t(-Sy)+Sxy-Syx\\&=Syx-Sxy+Sxy-Syx=0\end{aligned}$$
ל $S=\begin{pmatrix} & & I_l\\ & 1 & \\ I_l & & \end{pmatrix}$ מסמנים $\mathfrak{g}_S=\mathfrak{o}_{2l+1}(K)=B_l(K)$ - אלגברת לי האורתוגונלית ב $2l+1$ משתנים.
עבור $S=\begin{pmatrix} & I_l\\ I_l & \end{pmatrix}$ מסמנים $\mathfrak{g}_S=\mathfrak{o}_{2l}(K)=D_l(K)$ - אלגברת לי האורתוגונלית ב$2l$ משתנים.
3. $\mathfrak{sl}_n(K)=\{x\in\mathfrak{gl}_n(K)\mid \mathrm{tr}x=0\}$. זאת תת-אלגברת לי של $\mathfrak{gl}_n(K)$ כי לכל $x,y\in\mathfrak{gl}_n(K)$ מתקיים $\mathrm{tr}[x,y]=0$.

הערה 3.2 נשים לב כי באלגברת לי $[x,y]=-[y,x]$ (נשתמש בכך ש $0=[x+y,x+y]=[x,y]+[y,x]$).

הגדרה 3.3 תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי מעל K. אידאל $J\subseteq\mathfrak{g}$ הוא תת-מרחב מעל K כך ש $[\mathfrak{g},J]\subseteq J$.

הגדרה 3.4 תהיינה $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ אלגבראות לי מעל K. הומומורפיזם $T : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ הוא העתקה לינארית מעל K כך ש

$$T\left([x,y]\right) = \left[T\left(x\right), T\left(y\right)\right]$$

לכל $x, y \in \mathfrak{g}_1$.

גרעין של הומומורפיזם הוא אידאל (ב$\mathfrak{g}_1$). כל אידאל J ב$\mathfrak{g}$ הוא גרעין של הומומורפיזם כי על $\mathfrak{g}/_J$ מבנה של אלגברת לי ע"י

$$[x+J, y+J] = [x,y] + J$$

ההעתקה ad_x

נגדיר $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ע"י $\mathrm{ad}_x\left(y\right) = [x,y]$. זאת העתקה לינארית. מתקיים לכל $x, y \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{[x,y]}$$

יהי $z \in \mathfrak{g}$. נציב בצד שמאל:

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] - [y,[x,z]] &= \left[[z,y], x\right] + \left[[x,z], y\right] \\
&= -\left[[y,x], z\right] \\
&= \left[[x,y], z\right] \\
&= \mathrm{ad}_{[x,y]}\left(z\right)
\end{aligned}$$

מכאן קיבלנו כי $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(\mathfrak{g}\right)$ הוא הומומורפיזם של אלגבראות לי.

$$\begin{aligned}
\ker\left(\mathrm{ad}\right) &= \left\{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_x = 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{g}] = 0\right\} \\
&= Z\left(\mathfrak{g}\right)
\end{aligned}$$

כאשר $Z\left(\mathfrak{g}\right)$ הוא המרכז של $\mathfrak{g}$.

ad_x היא העתקת גזירה (derivation): העתקה כזאת היא העתקה לינארית $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ המקיימת את כלל לייבניץ:

$$\delta\left([x,y]\right) = \left[\delta\left(x\right), y\right] + \left[x, \delta\left(y\right)\right]$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_x\left([y,z]\right) &= [x,[y,z]] = \left[[z,y], x\right] \\
\underbrace{}_{\text{Jacobi's Identity}} &= -\left[[y,x], z\right] - \left[[x,z], y\right] \\
&= \left[[x,y], z\right] + [y,[x,z]] \\
&= \left[\mathrm{ad}_x\left(y\right), z\right] + \left[y, \mathrm{ad}_x\left(z\right)\right]
\end{aligned}$$

■

מעתה נניח כי $\dim_K g < \infty$. נתבונן בתבנית הבאה:

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$$
$$(x, y) = \operatorname{tr}\left[\operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_y\right]$$

לתבנית זאת קוראים תבנית Killing (על שם וילהלם קילינג) על $\mathfrak{g}$. זאת תבנית בילנארית [ברור מתכונות לינאריות של $[\cdot, \cdot]$ ושל tr] ומתקיים $(x, [y, z]) = ([x, y], z)$, אכן:

$$\begin{aligned}
(x, [y, z]) &= \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_{[y,z]}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_x \circ \left(\operatorname{ad}_y \circ \operatorname{ad}_z - \operatorname{ad}_z \circ \operatorname{ad}_y\right)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_y \circ \operatorname{ad}_z - \operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_z \circ \operatorname{ad}_y\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_y \circ \operatorname{ad}_z\right) - \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_z \circ \operatorname{ad}_y\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_y \circ \operatorname{ad}_z\right) - \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_y \circ \operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_z\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\left(\operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_y - \operatorname{ad}_y \circ \operatorname{ad}_x\right) \circ \operatorname{ad}_z\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_{[x,y]} \circ \operatorname{ad}_z\right) = ([x, y], z)
\end{aligned}$$

דוגמה

תבנית Killing על $\mathfrak{sl}_n(k)$ נתונה ע"י $(x, y) = 2n\operatorname{tr}(xy)$.

הגדרה 3.5 תהי $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ תת־אלגברת לי. הנורמליזטור של $\mathfrak{h}$ בתוך $\mathfrak{g}$ הוא

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$$

תת־אלגברת לי וברור כי $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ אידאל.

הגדרה 3.6 1. אלגברת לי $\mathfrak{g}$ נקראת <u>אבלית</u> אם $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, כלומר אם $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

2. אלגברת לי $\mathfrak{g}$ נקראת לא אבלית נקראת <u>פשוטה</u> אם אין לה אידאלים לא טריוואליים.

3.2 פתירות ונילפוטנטיות

נסמן

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \operatorname{span}\{[x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\} \\
\mathfrak{g}^{(2)} &= \left[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}\right] \\
&\vdots \\
\mathfrak{g}^{(k)} &= \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

אלה הם אידאלים ב$\mathfrak{g}$. (תרגיל. הדרכה: להשתמש בתכונות הגזירה)

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{(0)}\supseteq\mathfrak{g}^{(1)}\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{g}^{(k)}$$

הגדרה 3.7 $\mathfrak{g}$ נקראת פתירה אם יש k טבעי כך ש $\mathfrak{g}^{(k)}=\{0\}$.

דוגמה

$$\mathfrak{b}_n\left(K\right)=\left\{x\in\mathfrak{gl}_n\left(K\right)\mid x\text{ is an upper triangular matrix}\right\}$$

ל$x,y\in\mathfrak{b}_n\left(K\right)$ מתקיים

$$[x,y]=\begin{pmatrix}0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

וקומוטטור של שתי מטריצות כאלה נראה כך:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & * & * \\ & 0 & \ddots & * \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

תת־אלגברת לי של $\mathfrak{g}$ פתירה, היא פתירה, ותמונה הומומורפית של $\mathfrak{g}$ פתירה, היא פתירה.

טענה 3.8 (סוג של טענה הפוכה): אם $J\subseteq\mathfrak{g}$ אידאל פתיר וגם $\mathfrak{g}/_J$ פתירה, אז $\mathfrak{g}$ פתירה.

נגדיר

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^0&=\mathfrak{g}\\ \mathfrak{g}^1&=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\\ \mathfrak{g}^2&=\left[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^1\right]\\ &\vdots\\ \mathfrak{g}^k&=\left[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{k-1}\right]\end{aligned}$$

מקבלים שרשרת יורדת של אידאלים

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^0\supseteq\mathfrak{g}^1\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{g}^k\supseteq\dots$$

הגדרה 3.9 נאמר כי $\mathfrak{g}$ נילפוטנטית אם יש k טבעי כך ש $\mathfrak{g}^k=\{0\}$.

דוגמה

$$\mathfrak{n}_n(K) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid x \text{ is an upper triangular nilpotent matrix}\}$$

זאת אלגברת לי נילפוטנטית.

ברור כי $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^k$ ולכן נילפוטנטיות גוררת פתירות כי אם $\mathfrak{g}^k = \{0\} \implies \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$.

ההפך לא נכון: $\mathfrak{b}_n(K)$ פתירה, אך לא נילפוטנטית.

טענה 3.10 $\mathfrak{g}$ נילפוטנטית $\iff$ יש k טבעי כך ש $\mathrm{ad}_{x_1} \circ \mathrm{ad}_{x_2} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{x_k} = 0$ לכל $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{g}$.

הוכחה: התנאי שקול לכך ש $[x_1, [x_2, [x_3, \dots [x_{k-1}, [x_k, y]]]]] = 0$ לכל $x_1, \dots, x_k, y \in \mathfrak{g}$. ■

מכאן אם $\mathfrak{g}$ נילפוטנטית, לכל x מתקיים כי ad_x נילפוטנטי.

משפט 3.11 (Engel): נניח כי לכל $x \in \mathfrak{g}$, ad_x נילפוטנטי, אז $\mathfrak{g}$ אלגברת לי נילפוטנטית.

משפט 3.12 (Engel): תהי $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(K)$ תת־אלגברת לי נילפוטנטית. אז יש $a \in \mathrm{GL}_n(K)$ כך ש $a\mathfrak{g}a^{-1} \subseteq \mathfrak{n}_n(K)$.

משפט 3.13 (Lie): תהי $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ תת־אלגברת לי פתירה. אז יש $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ כך ש

$$aga^{-1} \subseteq \mathfrak{b}_n(\mathbb{C})$$

למה 3.14 נתונים שני תת־מרחבים וקטוריים $A, B \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. נגדיר

$$M = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid [x, B] \subseteq A\}$$

תהי $x \in M$ המקיימת $[x, A] \subseteq A$. נניח כי $\mathrm{tr}(xy) = 0$ לכל $y \in M$. אז x מטריצה נילפוטנטית.

הוכחה: נניח כי $x \in M$ כך ש $\mathrm{tr}(xM) = 0$. נזכר בפירוק ז'ורדן: קיימים s, v כך ש $x = s + v$ כאשר s ניתנת ללכסון, v נילפוטנטית וכן s וv מתחלפות. כמו כן, s, v הם פולינומים של x, ואפשר לבחור את הפולינומים כך שיהיו בעלי איבר חופשי 0.

קל לראות כי ad_s ניתנת ללכסון (למשל, אם $s = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$ אז

$$\left[\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}, e_{ij}\right] = t_i e_{ij} - t_j e_{ij} = (t_i - t_j) e_{ij}$$

וקטורים עצמיים. אחרת s צמודה לכזאת ולוקחים הצמדות של e_{ij}).

$$[\mathrm{ad}_s, \mathrm{ad}_v] = \mathrm{ad}_{[s,v]} = \mathrm{ad}_0 = 0$$

[s, v כי $[s,v]=0$ מתחלפות]

לכן $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_s + \mathrm{ad}_v$ הוא פירוק ז'ורדן, ולכן ad_v, ad_s פולינומים של ad_x בלי איבר חופשי. נסיק כי $\mathrm{ad}_s(B) \subseteq A$, $\mathrm{ad}_v(B) \subseteq A$ (למשל עבור ad_s:

$$\mathrm{ad}_s(B) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (\mathrm{ad}_x)^i (B)$$

ומהנתון $\mathrm{ad}_x(B), \mathrm{ad}_x(A) \subseteq A$ ולכן $\mathrm{ad}_s(B) \subseteq A$)

מכאן $s, v \in M$. נוכיח כי $s = 0$ ואז x נילפוטנטית.

יהי $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של $\mathbb{C}^n$ של וקטורים עצמיים של s: $s(v_i) = \lambda_i v_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. נניח גם כי המטריצה של v ביחס לבסיס זה היא נילפוטנטית עליונה. צריך להוכיח כי $\lambda_i = 0$ לכל i. נגדיר

$$E = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

נראה כי $E^* = \{0\}$. יהי $f \in E^*$. תהי $y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ כך ש $y \cdot v_i = f(\lambda_i) v_i$. y ניתנת ללכסון, ולכן גם ad_y ניתנת ללכסון עם ערכים עצמיים $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j)$.

אפשר לכתוב את ad_y כפולינום של ad_s: בוחרים פולינום r כך ש $f(\lambda_i - \lambda_j) = r(\lambda_i - \lambda_j)$ לכל i, j. ל־r אין איבר חופשי, ולכן $\mathrm{ad}_y = r(\mathrm{ad}_s) = \text{polynomial of } \mathrm{ad}_x$. נסיק כמו קודם $\mathrm{ad}_y B \subseteq A$, כלומר $y \in M$ ולכן

$$0 = \mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(sy + vy) = \mathrm{tr}(sy) + \mathrm{tr}(vy)$$

ע"י כתיבת sy ו־vy לפי הבסיס $\{v_1, \ldots, v_n\}$, מקבלים כי $\mathrm{tr}(vy) = 0$ (כי v נילפוטונית ביחס לבסיס זה, ו־y אלכסונית ביחס לבסיס זה), ו $\mathrm{tr}(sy) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\lambda_i)$ (כי sy ביחס לבסיס הנ"ל אלכסונית עם אלכסון $(\lambda_i f(\lambda_i))_{i=1}^{n}$). לכן קיבלנו

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\lambda_i) = 0$$

נפעיל f עוד פעם ונקבל

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)^2 = 0$$

ו־$f(\lambda_i) \geq 0$ לכל i ומכאן $f(\lambda_i) = 0$ לכל i. מכאן $f = 0$. ■

משפט 3.15 (קריטריון Cartan): תהי $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ תת־אלגברת לי. נניח כי לכל $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ולכל $y \in \mathfrak{g}$ מתקיים $\mathrm{tr}(xy) = 0$. אז $\mathfrak{g}$ פתירה.

הוכחה: די להראות כי $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ תת־אלגברת לי נילפוטנטית. ממשפט Engel, די להראות כי לכל $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathrm{ad}_x \restriction_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ נילפוטנטי. זה ינבע אם נראה ש־x מטריצה נילפוטנטית, כי

$$\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx = \lambda_x(y) - r_x(y)$$

אם x נילפוטנטית, אז λ_x, r_x נילפוטנטיים. כיוון ש $\lambda_x \circ r_x = r_x \circ \lambda_x$, גם $\lambda_x - r_x$ נילפוטנטית.

נשתמש בלמה עם $A=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $B=\mathfrak{g}$.

$$M=\{z\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})\mid[z,\mathfrak{g}]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\}$$

התנאי שצריך מהלמה: $x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ כך ש $[x,A]\subseteq A$ המקיים $\operatorname{tr}(xM)=0$. ברור כי $M\subseteq\mathfrak{g}$. לכ $y\in\mathfrak{g}$ מתקיים $\operatorname{tr}(xy)=0$ מהנתון, אבל צריך שזה יהיה נכון לכל $y\in M$ כלשהו. נכתוב

$$x=\sum_{i=1}^{l}[a_i,b_i]$$

אז

$$\operatorname{tr}(xy)=\sum_{i=1}^{l}\operatorname{tr}([a_i,b_i]\,y)$$

כמו בהוכחה של תבנית Killing מתקיים $\operatorname{tr}([a_i,b_i]\,y)=\operatorname{tr}(a_i[b_i,y])$ ולכן

$$\operatorname{tr}(xy)=\sum_{i=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\underbrace{a_i}_{\in\mathfrak{g}}\underbrace{[b_i,y]}_{\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\right)=0$$

מהלמה, x מטריצה נילפוטנטית. ■

מסקנה 3.16 תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי, כך ש $(x,y)=0$ לכל $x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ו $y\in\mathfrak{g}$. אז $\mathfrak{g}$ פתירה.

הוכחה: מתקיים $\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x\circ\mathrm{ad}_y)=0$ לכל $x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $y\in\mathfrak{g}$.
$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\subseteq\mathfrak{gl}(g)$ תת־אלגברת לי המקיימת את הנחות המשפט הקודם, ולכן פתירה.

$$\ker(\mathrm{ad})=\{x\in\mathfrak{g}\mid[x,\mathfrak{g}]=0\}=Z(\mathfrak{g})$$

כמובן, $Z(\mathfrak{g})$ אידאל פתיר, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\cong{}^{\mathfrak{g}}/_{Z(\mathfrak{g})}$ פתירה, ולכן $\mathfrak{g}$ פתירה. ■

3.3 תת־אלגבראות Cartan, פירוק Cartan ומערכות שורשים

מעתה נניח כי $K=\mathbb{C}$.

הגדרה 3.17 תת־אלגברת לי $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}$ תקרא תת־אלגברת Cartan אם היא מקיימת:

1. $\mathfrak{h}$ נילפוטנטית.
2. $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$.

דוגמה תהי $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ תת־אלגברה המכילה מטריצה אלכסונית $t = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$ כך ש־$t_i \neq t_j$ לכל $i \neq j$. נסמן

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid x \text{ is diagonal}\}$$

זאת תת־אלגברת לי. $\mathfrak{h}$ תת־אלגברת Cartan. **הוכחה:** $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ ובפרט נילפוטנטית. נניח כי $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$: אז $x \in \mathfrak{g}$ ומקיים $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. בפרט $[x, t] \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned}
[x,t] &= xt - tx \\
&= (x_{ij}) \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} (x_{ij}) \\
&= ((t_i - t_j) x_{ij}) \in \mathfrak{h}
\end{aligned}$$

לכן לכל $i \neq j$, $(t_i - t_j) x_{ij} = 0$ (כי ב־$\mathfrak{h}$ יש רק מטריצות אלכסוניות) $\Longleftarrow$ $x_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$ $\Longleftarrow$ (x_{ij}) אלכסונית $\Longleftarrow$ $x \in \mathfrak{h}$. ∎

דוגמה

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \mid t_1 + \cdots + t_n = 0 \right\}$.
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t x_1 & {}^t x_3 \\ {}^t x_2 & {}^t x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 \\ -x_4 & x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^t x_2 & {}^t x_4 \\ -{}^t x_1 & -{}^t x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 = {}^t x_2,\ x_3 = {}^t x_3,\ x_4 = -{}^t x_1 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -{}^t x_1 \end{pmatrix} \mid x_2 = {}^t x_2,\ x_3 = {}^t x_3 \right\}
\end{aligned}$$

כאן

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & -t \end{pmatrix} \mid t = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \right\}$$

תת־אלגברת Cartan.

באופן כללי, נניח כי קיימת $\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{L}$ תת־אלגברת לי כך ש־$\mathrm{ad}_x \restriction_{\mathcal{L}}$ ניתן ללכסון לכל $x \in \mathcal{L}$.

טענה 3.18 $[\mathcal{L},\mathcal{L}]=0$

הוכחה: נניח כי $x\in\mathcal{L}$. אז $\mathrm{ad}_x\restriction_{\mathcal{L}}$ ניתן ללכסון. נראה כי כל הערכים העצמיים של $\mathrm{ad}_x\restriction_{\mathcal{L}}$ הם אפס. בשלילה, נניח כי יש $0\neq y\in\mathcal{L}$ כך ש $[x,y]=\lambda y$ ו $\lambda\neq 0$.

$\mathrm{ad}_y\restriction_{\mathcal{L}}$ ניתן ללכסון. נניח כי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של $\mathcal{L}$ המורכב מוקטורים עצמיים של $\mathrm{ad}_y\restriction_{\mathcal{L}}$:

$$[y,v_i]=\lambda_i v_i$$

נכתוב $x=\sum_{i=1}^n\alpha_i v_i$, אז

$$-\lambda y=[y,x]=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,[y,v_i]=\sum_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i v_i$$

מתקיים כי $-\lambda y$ הוא וקטור עצמי של $\mathrm{ad}_y\restriction_{\mathcal{L}}$ המתאים לערך העצמי $\lambda_i=0$, שכן $[y,-\lambda y]=0$. נסיק כי לiים עבורם $\lambda_i\neq 0$, מתקיים $\alpha_i=0$ ולכן

$$-\lambda y=\sum_{\lambda_i=0}^n\alpha_i\lambda_i v_i=0$$

סתירה. ■

נסיק כי $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}$ משפחה <u>קומוטטיבית</u> של העתקות לינאריות על $\mathfrak{g}$ שניתנות ללכסון ולכן ניתנות ללכסון סימולטני. נכתוב

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{L}^*}\mathfrak{g}_\alpha$$

כאשר

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{x\in\mathfrak{g}\mid[h,x]=\alpha(h)\,x\,\forall h\in\mathcal{L}\}$$

(מבילינאריות $[\cdot,\cdot]$, $\alpha:\mathcal{L}\to\mathbb{C}$ הוא פונקציונאל לינארי)

$$\mathfrak{g}_0=\{x\in\mathfrak{g}\mid[h,x]=0\,\forall h\in\mathcal{L}\}$$

המרכז של $\mathcal{L}$. מהטענה $\mathcal{L}\subseteq\mathfrak{g}_0$.

אם $\mathfrak{g}_\alpha\neq\{0\}$ וגם $\alpha\neq 0$ נאמר כי α שורש של $\mathfrak{g}$ ביחס ל$\mathcal{L}$.
נסמן

$$\phi=\{\alpha\in\mathcal{L}^*\mid\alpha\neq 0,\,\mathfrak{g}_\alpha\neq 0\}$$

זאת קבוצת השורשים של $\mathfrak{g}$ ביחס ל$\mathcal{L}$.

דוגמאות

1. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{L}=\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix}t_1&&\\&\ddots&\\&&t_n\end{pmatrix}\mid\sum_{i=1}^n t_i=0\right\}$,

$$\left[\begin{pmatrix}t_1&&\\&\ddots&\\&&t_n\end{pmatrix},e_{ij}\right]=(t_i-t_j)\,e_{ij}\qquad\qquad(i\neq j)$$

$$\alpha_{ij}:\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$$

$$\alpha_{ij}\left(\begin{pmatrix}t_1&&\\&\ddots&\\&&t_n\end{pmatrix}\right)=t_i-t_j\qquad\qquad(i\neq j)$$

כאן השורשים הם

$$\phi=\{\alpha_{ij}\mid i\neq j\}$$

ומתקיים

$$\mathfrak{g}=\underbrace{\sum_{i<j}\mathbb{C}\,(e_{ii}-e_{jj})}_{\mathfrak{g}_0}\oplus\bigoplus_{i\neq j}\underbrace{\mathbb{C}e_{ij}}_{\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}}$$

2.

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&-{}^tx_1\end{pmatrix}\mid x_1,\,x_2,\,x_3\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})\mid x_2,\,x_3\text{ are symmetric.}\right\}$$

$$\mathfrak{h}=\mathcal{L}=\left\{\begin{pmatrix}t&0\\0&-t\end{pmatrix}\mid t=\begin{pmatrix}t_1&&\\&\ddots&\\&&t_n\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן $\hat{e}_{ij}=\begin{pmatrix}e_{ij}&\\&-e_{ji}\end{pmatrix}$, $\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix}0&e_{ij}+e_{ji}\\0&0\end{pmatrix}$, ${}^t\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix}0&0\\e_{ij}+e_{ji}&0\end{pmatrix}$ אז

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix}t&0\\0&-t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e_{ij}&\\&-e_{ji}\end{pmatrix}\right]&=\begin{pmatrix}[t,e_{ij}]&\\&[t,e_{ji}]\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(t_i-t_j)\,e_{ij}&\\&(t_j-t_i)\,e_{ji}\end{pmatrix}\\&=(t_i-t_j)\begin{pmatrix}e_{ij}&\\&-e_{ji}\end{pmatrix}=(t_i-t_j)\,\hat{e}_{ij}\quad(i\neq j)\end{aligned}$$

נסמן

$$\alpha_{ij}\left(\begin{pmatrix}t_1&&\\&\ddots&\\&&t_n\end{pmatrix}\right)=t_i-t_j$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & -t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & e_{ij}+e_{ji}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix}t\left(e_{ij}+e_{ji}\right) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\left(e_{ij}+e_{ji}\right)t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}te_{ij}+te_{ji}+e_{ij}t+e_{ji}t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}t_ie_{ij}+t_je_{ji}+t_je_{ij}+t_ie_{ji} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \left(t_i+t_j\right)\varepsilon_{ij}\end{aligned}$$

נסמן $\rho_{ij}\left(\begin{pmatrix}t & \\ & -t\end{pmatrix}\right)=t_i+t_j$ ($i\leq j$). ע"י חישוב דומה רואים ש

$$\left[\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & -t\end{pmatrix},{}^{t}\varepsilon_{ij}\right]=-\rho_{ij}\left(\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & -t\end{pmatrix}\right){}^{t}\varepsilon_{ij}$$

טענה 3.19 1. לכל $\alpha,\beta\in\mathcal{L}^*$, $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

2. נניח כי $\alpha\in\phi$ (כלומר $\alpha\neq0$ ו $\mathfrak{g}_\alpha\neq0$), אז לכל $0\neq x\in\mathfrak{g}_\alpha$, ad_x נילפוטנטי.

3. אם $\alpha,\beta\in\mathcal{L}^*$ כך ש $\beta\neq-\alpha$, אז $\mathfrak{g}_\alpha$ מאונך ל$\mathfrak{g}_\beta$ ביחס לתבנית Killing.

הוכחה:

1. נניח כי $x\in\mathfrak{g}_\alpha$, $y\in\mathfrak{g}_\beta$ ו $h\in\mathcal{L}$. מתכונת הגזירה

$$\begin{aligned}[h,[x,y]] &= \left[[h,x],y\right]+[x,[h,y]]\\ &= \left[\alpha(h)x,y\right]+\left[x,\beta(h)y\right]\\ &= \left(\alpha(h)+\beta(h)\right)[x,y]\end{aligned}$$

כלומר $[x,y]\in\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

2. ע"י שימוש ב1 k פעמים מתקיים כי $\mathrm{ad}_x^k\left(\mathfrak{g}_\beta\right)\subseteq\mathfrak{g}_{k\alpha+\beta}$ לכל $\beta\in\mathcal{L}^*$. כיוון ש$\mathfrak{g}$ ממימד סופי, ϕ סופית, ולכן יש k די גדול כך ש $\mathfrak{g}_{k\alpha+\beta}=0$ לכל $\beta\in\phi$ או $\beta=0$. ואז $\mathrm{ad}_x^k\left(\mathfrak{g}\right)=0$.

3. נניח כי $x\in\mathfrak{g}_\alpha$, $y\in\mathfrak{g}_\beta$. יהי $h\in\mathcal{L}$ אז

$$\left([h,x],y\right)=\left(-[x,h],y\right)=\left(-x,[h,y]\right)=-\beta(h)(x,y)$$

מצד שני

$$\left([h,x],y\right)=\left(\alpha(h)x,y\right)=\alpha(h)(x,y)$$

לכן $\left(\alpha(h)+\beta(h)\right)(x,y)=0$. מאחר ו$\alpha\neq-\beta$, נוכל לבחור $h\in\mathcal{L}^*$ כך ש $\alpha(h)+\beta(h)\neq0$ ואז נקבל $(x,y)=0$.

■

משפט 3.20 תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה (מעל $\mathbb{C}$). נניח כי $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ תת־אלגברת לי מקסימלית כך ש־ad_x ניתן ללכסון לכל $x \in \mathfrak{h}$. אז $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

מסקנה 3.21 $\mathfrak{h}$ כמו במשפט היא אלגברת Cartan.

הוכחה: ראינו באופן כללי כי לתת־אלגברה $\mathfrak{h}$ כך ש־$\mathrm{ad}_x \restriction_{\mathfrak{h}}$ ניתן ללכסון לכל $x \in \mathfrak{h}$ מתקיים $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ (טענה 3.18). לכן $\mathfrak{h}$ נילפוטנטית.

צריך להראות כי $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. נניח כי $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. נשתמש בפירוק

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{h}}_{=\mathfrak{g}_0} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

נכתוב $x = h_0 + \sum_{\alpha \in \phi} x_\alpha$. נניח כי $h \in \mathfrak{h}$, לכן $[x, h] \in \mathfrak{h}$. מכאן

$$\mathfrak{h} \ni [x, h] = \underbrace{[h_0, h]}_{=0} + \sum_{\alpha \in \phi} \underbrace{[x_\alpha, h]}_{-\alpha(h) x_\alpha}$$

ולכן

$$[x, h] \in \mathfrak{h} \cap \left(\bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_\alpha \right) = \{0\}$$

לכן $x \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. ■

נניח כי $\mathfrak{g}$ פשוטה.

משפט 3.22 כל תת־אלגבראות Cartan של $\mathfrak{g}$ מתקבלות כמו $\mathfrak{h}$ במשפט 3.20. כל שתי תת־אלגבראות Cartan של $\mathfrak{g}$ צמודות ע"י אוטומורפיזם של $\mathfrak{g}$.

טענה 3.23 נניח כי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה (מעל $\mathbb{C}$), אז תבנית Killing אינה מנוונת. יתר על כן, צמצום התבנית לתת־אלגברת Cartan אינו מנוון גם כן.

הוכחה: נתבונן ברדיקל של התבנית:

$$I = \{x \in G \mid (x, y) = 0 \, \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

זהו אידאל של $\mathfrak{g}$: אם $z \in \mathfrak{g}$ ו $x \in I$ אז

$$\forall y \in \mathfrak{g} \; ([x, z], y) = (x, [z, y]) = 0$$

לכן $[x, z] \in I$. לכן $I = 0$ (כלומר התבנית לא מנוונת) או $I = \mathfrak{g}$ (כלומר התבנית $= 0$). במקרה השני נובע (מקריטריון Cartan, משפט 3.15) כי $\mathfrak{g}$ פתירה.

נתבונן ב־$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$: זהו אידאל $0 \neq$ (כי מניחים ש־$\mathfrak{g}$ אינה אבלית). לכן $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ולכן $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$ לכל k, ומכאן $\mathfrak{g}$ אינה פתירה. סתירה.

נניח כי $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{h}$ תת־אלגברת Cartan.

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{g}_0} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

נניח כי $h_0 \in \mathfrak{h}$ מקיים $(h_0,\mathfrak{h}) = 0$. מטענה קודמת (טענה 3), $(\mathfrak{h},\mathfrak{g}_\alpha) = 0$ לכל $\alpha \in \phi$ ולכן $(h_0,\mathfrak{h}) = 0$ (מהנתון) ו $(h_0,\mathfrak{g}_\alpha) = 0$ לכל $\alpha \in \phi$. מכאן $(h_0,\mathfrak{g}) = 0$ ולכן $h_0 \in I = \{0\}$.
■

הפירוק $\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{g}_0} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\phi} \mathfrak{g}_\alpha\right)$ נקרא פירוק Cartan של $\mathfrak{g}$ ביחס ל$\mathfrak{h}$.

מסקנה 3.24 לכל $\alpha \in \phi$ יש $\alpha' \in \mathfrak{h}$ כך ש $\alpha(h) = (h,\alpha')$, לכל $h \in \mathfrak{h}$. (נובע מכך שהתבנית לא מנוונת)

נסמן ב$\mathfrak{h}$ את תת־אלגברת Cartan של $\mathfrak{g}$.

טענה 3.25 1. ϕ פורשת את $\mathfrak{h}^*$.

2. אם $\alpha \in \phi$ אז גם $-\alpha \in \phi^*$.

3. יהיו $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ אז $[x,y] = (x,y)\,\alpha'$.

4. $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}\cdot\alpha'$

5. $\alpha(\alpha') = (\alpha',\alpha') \neq 0$ לכל $\alpha \in \phi$.

הוכחה:

1. נניח בשלילה כי ϕ אינה פורשת את $\mathfrak{h}^*$. אז יש $0 \neq h_0 \in \mathfrak{h}$ כך ש $\alpha(h_0) = 0$ לכל $\alpha \in \phi$ (כי להעתקה $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^{**} \to (\mathrm{span}\Phi)^*$ המוגדרת ע"י העתקת הצמצום $\varphi \mapsto \varphi\restriction_{\mathrm{span}\Phi}$ יש גרעין). מכאן

$$[h_0,\mathfrak{g}_\alpha] = \alpha(h_0)\,\mathfrak{g}_\alpha = 0$$

כמו כן $[h_0,\mathfrak{h}] = 0$. לכן $[h_0,\mathfrak{g}] = 0$. מכאן $h_0 \in Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ($Z(\mathfrak{g}) = 0$ כי $\mathfrak{g}$ פשוטה ולכן אין לה אידאלים לא טריוואליים).

2. אם $\alpha \in \phi$ כך ש $-\alpha \in \phi$ אז $\alpha+\beta \neq 0$ לכל $\beta \in \phi$. במקרה כזה ראינו כי $(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta) = 0$ (טענה 3.19 סעיף 3). כמו כן ראינו (מאותה טענה) כי $(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_0) = 0$, ואז $(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{h}) = 0$, כלומר $(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}) = 0$ חלקי לרדיקל של תבנית Killing, וזה שווה ל0 (כי התבנית לא מנוונת), סתירה.

3. יהיו $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. יהי $h \in \mathfrak{h}$. אז

$$\begin{aligned}\left(h,\underbrace{[x,y]}_{\in h}\right) &= ([h,x],y) = \alpha(h)(x,y) = (\alpha',h)(x,y)\\ &= ((x,y)\,\alpha',h) = (h,(x,y)\,\alpha')\end{aligned}$$

הוכחנו $(h,[x,y]-(x,y)\,\alpha') = 0$ לכל $h \in \mathfrak{h}$. מכיוון שהצמצום של תבנית Killing ל$\mathfrak{h}$ הוא לא מנוון, נקבל כי $[x,y]-(x,y)\,\alpha' = 0$.

4. מ3 נובע כי $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subseteq\mathbb{C}\alpha'$. לכן מ3 נותר להראות שיש $x\in\mathfrak{g}_\alpha$ ו $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ כך ש $(x,y)\neq 0$. בשלילה, נניח כי $\mathfrak{g}_\alpha\ni x_0\neq 0$ הוא כך ש $(x_0,\mathfrak{g}_{-\alpha})=0$. נחזור על הארגומנט בסעיף 2 ונקבל כי x_0 ברדיקל של תבנית Killing ואז $x_0=0$ ־ סתירה.

(למעשה הראנו יותר: הראנו כי לכל $x\in\mathfrak{g}_\alpha$ קיים $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ כך ש $(x,y)\neq 0$)

5. בשלילה, נניח שיש $\alpha\in\phi$ כך ש $\alpha(\alpha')=(\alpha',\alpha')=0$. לכן לכל $x\in\mathfrak{g}_\alpha$, $[\alpha',x]=\alpha(\alpha')x=0$ ולכל $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $[\alpha',y]=-\alpha(\alpha')y=0$. נבחר לפי מה שראינו בסעיף 4, $x\in\mathfrak{g}_\alpha$ ו $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ כך ש $(x,y)=1$. ואז מסעיף 3 מתקיים

$$\begin{cases}[x,y] & = & \alpha'(x,y)=\alpha'\\ [\alpha',y] & = & 0\\ [\alpha',x] & = & 0\end{cases}$$

נסמן $S=\operatorname{span}\{x,y,\alpha'\}\subseteq\mathfrak{g}$. S היא אלגברת לי (כיוון שסגורה לקומוטטור מהמשוואות) והיא פתירה (בעצם $[[S,S],S]=0$). יש שיכון

$$\mathfrak{g}\xhookrightarrow{\mathrm{ad}}\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

(ההעתקה חד־חד־ערכית כי $\mathfrak{g}$ פשוטה) ולכן

$$S\xhookrightarrow{\mathrm{ad}}\mathrm{ad}_S\subseteq\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

פתירה כתמונה הומומורפית (אפילו נילפוטנטית). ממשפט 3.13, ad_S צמודה ע"י איבר של $GL(\mathfrak{g})$ לתוך תת־אלגברה של מטריצות משולשיות עליונות (לאחר בחירת בסיס) ואז

$$\mathrm{ad}_{[S,S]}=[\mathrm{ad}_S,\mathrm{ad}_S]$$

מורכב ממטריצות נילפוטנטיות. ולכן $\mathrm{ad}_{\alpha'}$ העתקה לינארית נילפוטנטית וגם ניתנת ללכסון (כי $\alpha'\in\mathfrak{h}$). מכאן $\mathrm{ad}_{\alpha'}=0$. נסיק כי $\alpha'=0$ (כי ad שיכון) ־ סתירה.

■

אפשר להוכיח עוד:

1. לכל $\alpha\in\phi$, $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$.
2. לכל תת־קבוצה $B\subseteq\phi$ שפורשת את $\mathfrak{h}^*$, מתקיים $\phi\subseteq\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}B$.
3. לכל $\alpha,\beta\in\phi$ מתקיים $(\alpha',\beta')\in\mathbb{Q}$.
4. נזהה את $\mathfrak{h}^*$ עם $\mathfrak{h}$ דרך תבנית Killing. נגדיר $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\phi$. אז $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})=\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$. אז תבנית Killing מצומצמת ל$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ היא מכפלה פנימית.
5. ϕ היא מערכת שורשים ב$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ כמרחב מכפלה פנימית (ביחס לתבנית Killing).

נסמן ל $r,s\in\phi$

$$A_{r,s}=\frac{2(r,s)}{(r,r)}$$

דוגמה

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$. מתרגיל, תבנית Killing נתונה ע"י $(x,y) = 2(n+1)\operatorname{tr}(xy)$.

$$\mathfrak{h} = \left\{ t = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n+1} \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 0 \right\}$$
$$\phi = \{ r_{ij} \mid r_{ij}(t) = t_i - t_j \mid i \neq j \}$$

מתקיים

$$r_{ij}(t) = \left(r'_{ij}, t\right) = 2(n+1)\operatorname{tr}\left(r'_{ij} \cdot t\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned} r'_{ij} &= \frac{1}{2(n+1)}(e_{ii} - e_{jj}) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (i<j) \end{aligned}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} A_{r_{ij},r_{st}} = \frac{2(r_{ij}, r_{st})}{(r_{ij}, r_{ij})} &= \frac{2\operatorname{tr}((e_{ii} - e_{jj})(e_{ss} - e_{tt}))}{\underbrace{\operatorname{tr}\left((e_{ii} - e_{jj})^2\right)}_{=2}} \\ &= \operatorname{tr}(\delta_{is}e_{is} - \delta_{it}e_{it} - \delta_{js}e_{js} + \delta_{jt}e_{jt}) \\ &= \delta_{is} - \delta_{it} - \delta_{js} + \delta_{it} \in \{0, \pm 1, \pm 2\} \end{aligned}$$

מערכת שורשים זו איזומורפית ל־A_n.

משפט 3.26 תהיינה $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ שתי אלגבראות לי פשוטות מעל $\mathbb{C}$ בעלות תת־אלגבראות Cartan, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}'$ מאותו מימד. תהיינה ϕ ו־ϕ' מערכות שורשים של $\mathfrak{g}$ ביחס ל־$\mathfrak{h}$ ו־$\mathfrak{g}'$ ביחס ל־$\mathfrak{h}'$ בהתאמה. נקבע מערכות יסודיות

$$\Pi = \{p_1, \ldots, p_l\} \subseteq \phi$$
$$\Pi' = \{p'_1, \ldots, p'_l\} \subseteq \phi'$$

נסמן $\frac{2(p_i,p_j)}{(p_i,p_i)} \in \mathbb{Z}$ $= A_{p_i,p_j} = A_{ij}$, $1 \leq i,j \leq l$ (המטריצה (A_{ij}) נקראת מטריצת Cartan של $\mathfrak{g}$), נסמן גם $A'_{i,j} = A_{p'_i,p'_j}$. $h_{p_i} = \frac{2p_i}{(p_i,p_i)}$, $h_{p'_i} = \frac{2p'_i}{(p'_i,p'_i)}$. נבחר $0 \neq e_{p_i} \in \mathfrak{g}_{p_i}$ ל $1 \leq i \leq l$. קיים $e_{-p_i} \in \mathfrak{g}_{-p_i}$ יחיד כך ש $[e_{p_i}, e_{-p_i}] = h_{p_i}$. באותו אופן נבחר $e_{p'_i}$ ו $e_{-p'_i}$ בשביל $\mathfrak{g}'$.

נניח כי $A_{ij} = A'_{ij}$ לכל $1 \leq i,j \leq l$. אז קיים איזומורפיזם יחיד $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ כך ש $\theta(e_{p_i}) = e_{p'_i}$, $\theta(e_{-p_i}) = e_{-p'_i}$ ו $\theta(h_{p_i}) = h_{p'_i}$.

4 חבורות Chevalley

4.1 קבועי המבנה

תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה מעל $\mathbb{C}$. $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ תת־אלגברת Cartan. נכתוב את פירוק Cartan:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

נבחר מערכת יסודית ומערכת חיובית מתאימה $\Pi \subseteq \phi^+ \subseteq \phi$.

לכל $r \in \Pi$ נסמן $h_r = \frac{2r}{(r,r)} \in \mathfrak{h}$ ואז $\{h_r \mid r \in \Pi\}$ בסיס של $\mathfrak{h}$. לכל $r \in \phi^+$ נבחר $0 \neq e_r \in \mathfrak{g}_r$ ויהי $e_{-r} \in \mathfrak{g}_{-r}$ האיבר היחיד כך ש $[e_r, e_{-r}] = h_r$. אז

$$\{h_r \mid r \in \Pi\} \cup \{e_r \mid r \in \phi\}$$

בסיס של $\mathfrak{g}$.

נחשב את הקומוטטור על איברי הבסיס:

$$\begin{aligned} [h_r, h_s] &= 0 && (r,s \in \Pi) \\ [h_r, e_s] &= \frac{2}{(r,r)}[r, e_s] = \frac{2r(s')}{(r,r)} e_s = && (r \in \Pi, s \in \phi) \\ &= \frac{2(r,s)}{(r,r)} e_s = A_{r,s} e_s \end{aligned}$$

אם $r + s \notin \phi$ אז $[e_r, e_s] \in \mathfrak{g}_{r+s} = \{0\}$ ולכן $[e_r, e_s] = 0$. נסמן במקרה זה $N_{r,s} = 0$.

אם $r + s \in \phi$ אז $[e_r, e_s] \in \mathfrak{g}_{r+s}$ ולכן $[e_r, e_s] = N_{r,s} \cdot e_{r+s}$ כאשר $N_{r,s} \in \mathbb{R}$.

$N_{r,s}$ נקראים קבועי המנה.

תכונות של $N_{r,s}$ (קבועי המבנה):

1. $N_{s,r} = -N_{r,s}$, כי $[e_s, e_r] = -[e_r, e_s]$.

2. נניח כי $r_1, r_2, r_3 \in \phi$ כך ש $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ (זה קורה בדיוק כאשר $r_1 + r_2 \in \phi$ ו $r_3 = -(r_1 + r_2)$) אז מזהות יעקובי

$$\begin{aligned} [[e_{r_1}, e_{r_2}], e_{r_3}] + [[e_{r_2}, e_{r_3}], e_{r_1}] + [[e_{r_3}, e_{r_1}], e_{r_2}] &= 0 \\ [N_{r_1,r_2} e_{-r_3}, e_{r_3}] + [N_{r_2,r_3} e_{-r_1}, e_{r_1}] + [N_{r_3,r_1} e_{-r_2}, e_{r_2}] &= 0 \\ -N_{r_1,r_2} h_{r_3} - N_{r_2,r_3} h_{r_1} - N_{r_3,r_1} h_{r_2} &= 0 \\ \frac{-2N_{r_1,r_2} r_3}{(r_3,r_3)} - \frac{2N_{r_2,r_3} r_1}{(r_1,r_1)} - \frac{2N_{r_3,r_1}}{(r_2,r_2)} r_2 &= 0 \end{aligned}$$

נציב $r_3 = -r_1 - r_2$ ונקבל

$$\left(\frac{2N_{r_1,r_2}}{(r_3,r_3)} - \frac{2N_{r_2,r_3}}{(r_1,r_1)}\right) r_1 + \left(\frac{2N_{r_1,r_2}}{(r_3,r_3)} - \frac{2N_{r_3,r_1}}{(r_2,r_2)}\right) r_2 = 0$$

r_1, r_2 הם בת"ל - אם תלויים אז $r_1 = \pm r_2$ ואז $r_3 = 0, -2r_1$, סתירה. לכן קיבלנו

$$\frac{N_{r_1,r_2}}{(r_3,r_3)} = \frac{N_{r_2,r_3}}{(r_1,r_1)} = \frac{N_{r_3,r_1}}{(r_2,r_2)}$$

נתונים $r, s \in \phi$ כך ש $r + s \in \phi$. נתבונן בשרשרת־r דרך s:

$$-pr + s, \ldots, -r + s, s, r + s, 2r + s, \ldots, qr + s$$

$q \geq 1$ (מההנחה), $p \geq 0$. ראינו (טענה 2.16) כי $A_{r,s} = p - q$.

משפט 4.1 $N_{r,s} \cdot N_{-r,-s} = -\left(p+1\right)^2$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\left[\left[e_r, e_{-r}\right], e_s\right] + \left[\left[e_{-r}, e_s\right], e_r\right] + \left[\left[e_s, e_r\right], e_{-r}\right] &= 0 \\
\left[h_r, e_s\right] + N_{-r,s}\left[e_{-r+s}, e_r\right] + N_{s,r}\left[e_{r+s}, e_{-r}\right] &= 0 \\
A_{r,s}e_s + N_{-r,s}N_{-r+s,r}e_s + N_{s,r}N_{r+s,-r}e_s &= 0 \\
A_{r,s} + N_{-r,s}N_{-r+s,r} + N_{s,r}N_{r+s,-r} &= 0
\end{aligned}$$

מזהות 2, אם $r - s \in \phi$ אז

$$\frac{N_{r-s,-r}}{(s,s)} = \frac{N_{-r,s}}{(r-s,r-s)} \implies N_{-r,s} = \frac{(r-s,r-s)}{(s,s)} N_{r-s,-r}$$

ומאחר ולפי הנתון $r + s \in \phi$ נקבל

$$\frac{N_{r+s,-r}}{(s,s)} = \frac{N_{-r,-s}}{(r+s,r+s)} \implies N_{r+s,-r} = \frac{(s,s)}{(r+s,r+s)} N_{-r,-s}$$

אם $r - s \notin \phi$ אז גם $-r + s \notin \phi$ ולכן $N_{-r+s,r} = 0$ ולכן בכל מקרה נקבל

$$A_{r,s} + \frac{(r-s,r-s)}{(s,s)} N_{r-s,-r}N_{-r+s,r} + \frac{(s,s)}{(r+s,r+s)} N_{s,r}N_{-r,-s} = 0$$

קיבלנו

$$\begin{aligned}
A_{r,s} &= -\frac{(r-s,r-s)}{(s,s)} N_{r-s,-r}N_{-r+s,r} + \frac{(s,s)}{(r+s,r+s)} N_{r,s}N_{-r,-s} \\
&= -\frac{(r-s,r-s)}{(s,s)} N_{r,-r+s}N_{-r,r-s} + \frac{(s,s)}{(r+s,r+s)} N_{r,s}N_{-r,-s}
\end{aligned}$$

נסמן $M_{r,s}=\frac{(s,s)}{(r+s,r+s)}N_{r,s}N_{-r,-s}$. הוכחנו:

$$A_{r,s}=-M_{r,-r+s}+M_{r,s}$$

כעת

$$\begin{aligned}
A_{r,s} &= M_{r,s}-M_{r,-r+s}\\
A_{r,-r+s} &= M_{r,-r+s}-M_{r,-2r+s}\\
&\vdots\\
A_{r,-(p-1)r+s} &= M_{r,-(p-1)r+s}-M_{r,-pr+s}\\
A_{r,-pr+s} &= M_{r,-pr+s}-\underbrace{M_{r,-(p+1)r+s}}_{=0}
\end{aligned}$$

כאשר $M_{r,-(p+1)r+s}=0$ כי $-(p+1)\,r+s\notin\phi$. נסכום את השוויונות ונקבל

$$M_{r,s}=A_{r,s}+A_{r,-r+s}+\cdots+A_{r,-(p-1)r+s}+A_{r,-pr+s}$$

מתקיים

$$A_{r,-ir+s}=\frac{2\,(r,-ir+s)}{(r,r)}=-2i+A_{r,s}$$

לכן־

$$\begin{aligned}
M_{r,s} &= (p+1)\,A_{r,s}-2\cdot 0-2\cdot 1-\cdots-2p\\
&= (p+1)\,A_{r,s}-(p+1)\,p\\
&= (p+1)\,(A_{r,s}-p)
\end{aligned}$$

נזכר כי $A_{r,s}=p-q$ ולכן קיבלנו $M_{r,s}=-q\,(p+1)$.
נותר להוכיח את הלמה הבאה:

למה 4.2

$$\frac{(r+s,r+s)}{(s,s)}=\frac{p+1}{q}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
p+1-q\cdot\frac{(r+s,r+s)}{(s,s)} &\underbrace{=}_{A_{r,s}=p-q} \\
&= A_{r,s}+q+1-q\cdot\frac{(r+s,r+s)}{(s,s)} \\
&= A_{r,s}+q+1-q\cdot\frac{(r,r)+2(r,s)+(s,s)}{(s,s)} \\
&= A_{r,s}+1-\frac{q(r,r)}{(s,s)}\left(1+\frac{2(r,s)}{(r,r)}\right) \\
&= A_{r,s}+1-\frac{q(r,r)}{(s,s)}(1+A_{r,s}) \\
&= \left(1-\frac{q(r,r)}{(s,s)}\right)(1+A_{r,s})
\end{aligned}$$

נחלק למקרים:

1. $(r,r)\geq(s,s)$ $\Longleftarrow$

$$|A_{r,s}|=\frac{2|(r,s)|}{(r,r)}\leq\frac{2|(r,s)|}{(s,s)}=|A_{s,r}|$$

ראינו (בטענה 2.13) כי $A_{r,s}\cdot A_{s,r}\in\{0,1,2,3\}$. מכאן $A_{r,s}=0,\pm1$. אם $A_{r,s}=-1$, גמרנו. נניח כי $A_{r,s}=0,1$ $\Longleftarrow$ $(r,s)\geq 0$.

נגדיר $\phi'=(\mathbb{Z}r+\mathbb{Z}s)\cap\phi$ - זאת מערכת שורשים ש$\{r,s\}$ מערכת יסודית שלה.

ϕ' היא אי־פריקה (אחרת $r+s\notin\phi$ [כי ע"י פירוק ϕ לשתי תת־קבוצות מאונכות, נקבל כי r וs בקבוצות שונות ולכן $r+s$ לא יכול להיות באף אחת מהקבוצות הנ"ל]).

אפשר לבדוק שבϕ' (ובעצם אפילו בϕ) יש לכל היותר שני אורכים אפשריים לשורשים.

$$\|r+s\|^2=\|r\|^2+2(r,s)+\|s\|^2\geq\|r\|^2+\|s\|^2>\|r\|^2,\|s\|^2$$

לכן $\|r+s\|>\|r\|,\|s\|$. כיוון ש $r+s,r,s\in\phi'$, נסיק כי $\|r\|=\|s\|$ ואז

$$\begin{aligned}
p+1-q\cdot\frac{(r+s,r+s)}{(s,s)} &= \left(1-\frac{q(r,r)}{(s,s)}\right)(1+A_{r,s}) \\
&= (1+A_{r,s})(1-q)
\end{aligned}$$

לבסוף נראה כי $2r+s\notin\phi$, ואז $q=1$ ונקבל את הדרוש:

$$\begin{aligned}
\|2r+s\|^2 &= 4\|r\|^2+4(r,s)+\|s\|^2 \\
&\geq 4\|r\|^2+2(r,s)+\|s\|^2 \\
&> \|r\|^2+2(r,s)+\|s\|^2 \\
&= \|r+s\|^2>\|r\|^2=\|s\|^2
\end{aligned}$$

מכיוון שבϕ' לכל היותר שני אורכים שונים, $2r+s\notin\phi'$ ולכן גם $2r+s\notin\phi$ ולכן $q=1$ וקיבלנו את הדרוש.

2. $(r,r) < (s,s)$: במקרה זה

$$|A_{r,s}| = \frac{2\left|(r,s)\right|}{(r,r)} > \frac{2\left|(r,s)\right|}{(s,s)} = |A_{s,r}|$$

יש לנו $r,s \in \phi$ בעלי אורכים שונים. כיוון ש $r+s \in \phi$ נקבל $\|r\|^2+2\,(r,s)+\|s\|^2 = \|r+s\|^2 \in \left\{\|r\|^2, \|s\|^2\right\}$ ולכן $(r,s) < 0$ ואז

$$A_{r,s} < A_{s,r} < 0$$

כיוון ש $A_{r,s} \cdot A_{s,r} \in \{0,1,2,3\}$ נקבל כי $A_{s,r} = -1$, כלומר $\frac{2(r,s)}{(s,s)} = -1 \Longleftarrow 2\,(r,s) = -\,(s,s)$. נחשב כמו קודם:

$$\begin{aligned}\|-r+s\|^2 &= \|r\|^2 - 2\,(r,s) + \|s\|^2 \\ &> \|r\|^2 + \|s\|^2 > \|s\|^2 > \|r\|^2\end{aligned}$$

נסיק כי $-r+s \notin \phi$ ולכן $p=0$ כלומר $A_{r,s} = p-q = -q$ ולכן

$$\frac{2\,(r,s)}{(r,r)} = -q$$
$$\Longrightarrow$$
$$\frac{(s,s)}{(r,r)} = q$$

לכן

$$p+1-q\cdot\frac{(r+s,r+s)}{(s,s)} = \left(1-\frac{q\,(r,r)}{(s,s)}\right)(1+A_{r,s}) = 0$$

כנדרש.

■

■

נניח כי $r_1,\ldots,r_4 \in \phi$ כך ש $r_1+r_2+\cdots+r_4 = 0$ (ונניח כי אין שני מחוברים שווים או מנוגדים).

$$\begin{aligned}[[e_{r_1}, e_{r_2}], e_{r_3}] + [[e_{r_2}, e_{r_3}], e_{r_1}] + [[e_{r_3}, e_{r_1}], e_{r_2}] &= 0 \\ N_{r_1,r_2}[e_{r_1+r_2}, e_{r_3}] + N_{r_2,r_3}[e_{r_2+r_3}, e_{r_1}] + N_{r_3,r_1}[e_{r_3+r_1}, e_{r_2}] &= 0 \\ N_{r_1,r_2}N_{r_1+r_2,r_3}e_{-r_4} + N_{r_2,r_3}N_{r_2+r_3,r_1}e_{-r_4} + N_{r_3,r_1}N_{r_3+r_1,r_2}e_{-r_4} &= 0\end{aligned}$$

נקבל

$$N_{r_1,r_2}N_{r_1+r_2,r_3} + N_{r_2,r_3}N_{r_2+r_3,r_1} + N_{r_3,r_1}N_{r_3+r_1,r_2} = 0$$

מתקיים מזהות 2

$$\frac{N_{r_1+r_2,r_3}}{(r_4,r_4)}=\frac{N_{r_3,r_4}}{(r_1+r_2,r_1+r_2)}$$
$$\frac{N_{r_2+r_3,r_1}}{(r_4,r_4)}=\frac{N_{r_1,r_4}}{(r_2+r_3,r_2+r_3)}$$
$$\frac{N_{r_3+r_1,r_2}}{(r_4,r_4)}=\frac{N_{r_2,r_4}}{(r_1+r_3,r_1+r_3)}$$

ולכן קיבלנו את הזהות

$$\frac{N_{r_1,r_2}N_{r_3,r_4}}{(r_1+r_2,r_1+r_2)}+\frac{N_{r_2,r_3}N_{r_1,r_4}}{(r_2+r_3,r_2+r_3)}+\frac{N_{r_3,r_1}N_{r_2,r_4}}{(r_1+r_3,r_1+r_3)}=0$$

4.2 בסיס Chevalley

משפט 4.1 מציע שאולי אפשר לבחור את הבסיס כך ש $N_{r,s}=\pm(p+1)$ ($p\geq 0$ הוא כרגיל המספר הגדול ביותר כך ש $-pr+s\in\phi$). נראה שניתן לעשות זאת.

נבחר מערכת יסודית $\Pi=\{p_1,\ldots,p_l\}\subseteq\phi^+$. נסמן $p_i'=-p_i$ ו

$$\Pi'=\{p_1',\ldots p_l'\}$$

Π' גם מערכת יסודית של ϕ.

נבחר $0\neq e_{p_i}\in\mathfrak{g}_{p_i}$, $1\leq i\leq l$ וכן $e_{-p_i}\in\mathfrak{g}_{-p_i}$ כך ש $[e_{p_i},e_{-p_i}]=h_{p_i}=\frac{2p_i}{(p_i,p_i)}$.

נגדיר

$$\left\{\begin{array}{rcl} e'_{p_i'} & = & -e_{-p_i}\\ e'_{-p_i'} & = & -e_{p_i}\end{array}\right.\qquad (1\leq i\leq l)$$

אז

$$\begin{aligned}\left[e'_{p_i'},e'_{-p_i'}\right] &= [-e_{-p_i},-e_{p_i}]\\ &= [e_{-p_i},e_{p_i}]\\ &= -[e_{p_i},e_{-p_i}]\\ &= -h_{p_i}=\frac{-2p_i}{(-p_i,-p_i)}=h_{p_i'}\end{aligned}$$

ומתקיים

$$A_{p_i',p_j'}=\frac{2\left(p_i',p_j'\right)}{(p_i',p_i')}=\frac{2\left(p_i,p_j\right)}{(p_i,p_i)}=A_{p_i,p_j}$$

ממשפט 3.26 קיים אוטומורפיזם יחיד $\theta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ כך ש

$$\left\{\begin{array}{rcl}\theta(e_{p_i}) & = & -e_{-p_i}\\ \theta(e_{-p_i}) & = & -e_{p_i}\\ \theta(h_{p_i}) & = & -h_{p_i}\end{array}\right.$$

θ^2 פועל כזהות על וקטורים כאלה ולכן $\theta^2 = \mathrm{id}$.

יהי $r \in \phi^+$ (ביחס לΠ). מתרגילי הבית, אפשר לכתוב $r = r_1 + \cdots + r_k$ כך ש $r_1 + \cdots + r_i \in \phi^+$ לכל $i \le k$ כאשר $r_1, \ldots, r_k \in \Pi$. בפרט $r_1 + r_2 \in \phi^+$, ולכן

$$[e_{r_1}, e_{r_2}] = \underbrace{N_{r_1,r_2}}_{\neq 0} e_{r_1+r_2}$$
$$[[e_{r_1}, e_{r_2}], e_{r_3}] N_{r_1,r_2} \underbrace{N_{r_1+r_2,r_3}}_{\neq 0} e_{r_1+r_2+r_3}$$

כך נמשיך ונקבל

$$[\ldots[[e_{r_1}, e_{r_2}], e_{r_3}], \ldots e_{r_k}] = c \cdot e_r$$

כאשר $c \neq 0$. נפעיל θ ונקבל

$$\alpha \cdot e_{-r} = [\ldots[[-e_{r_1}, -e_{r_2}], -e_{r_3}], \cdots - e_{r_k}] = c \cdot \theta(e_r)$$

כאשר $\alpha \neq 0$. לכן

$$\theta(e_r) = \lambda_r e_{-r}$$

כאשר $\lambda_r \neq 0$. ע"י הפעלת θ שוב

$$e_r = \lambda_r \theta(e_{-r})$$
$$\theta(e_{-r}) = \lambda_r^{-1} e_r$$

לכן לμ כלשהו מתקיים

$$\theta(\mu e_r) = \mu \lambda_r e_{-r} = \lambda_r \mu^2 \left(\mu^{-1} e_r\right)$$

נבחר μ_r כך ש $\lambda_r \mu_r^2 = -1$ ואז

$$\theta(\mu_r e_r) = -\mu_r^{-1} e_r$$

נסמן $\varepsilon_r = \mu_r e_r$ ו $\varepsilon_{-r} = \mu_r^{-1} e_r$ לכן לכל $r \in \phi^+$

$$\theta(\varepsilon_r) = -\varepsilon_{-r}$$
$$\theta(\varepsilon_{-r}) = -\varepsilon_r = -\varepsilon_{-(-r)}$$

ולכן לכל $r \in \phi$ מתקיים $\theta(\varepsilon_r) = -\varepsilon_{-r}$. $\{\varepsilon_r\}$ עדיין בסיס ל$\mathfrak{g}_r$ ועדיין מתקיים $[\varepsilon_r, \varepsilon_{-r}] = h_r$. נחליף את e_r וe_{-r} בε_r וε_{-r} בהתאמה.

נפעיל את θ על הזהות $[e_r, e_s] = N_{r,s} e_{r+s}$ ונקבל

$$\theta[e_r, e_s] = [\theta(e_r), \theta(e_s)] = N_{r,s} \theta(e_{r+s})$$
$$[e_{-r}, e_{-s}] = [-e_{-r}, -e_{-s}] = N_{r,s} e_{-r-s}$$
$$-N_{-r,-s} e_{-r-s} = N_{r,s} e_{-r-s}$$
$$N_{r,s} = -N_{-r,-s}$$

ולכן ממשפט 4.1

$$\begin{aligned}N_{r,s}\cdot N_{-r,-s} &= -\left(p+1\right)^2\\ N_{r,s}^2 &= \left(p+1\right)^2\\ N_{r,s} &= \pm\left(p+1\right)\end{aligned}$$

לסיכום תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה מעל $\mathbb{C}$.

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\left(\bigoplus_{r\in\phi}\mathfrak{g}_r\right)$$

נבחר $\Pi\subseteq\phi$ מערכת יסודית. נבחר בסיס $\{e_r\}$ ל־$\mathfrak{g}_r$ לכל $r\in\phi$ כך ש

$$[e_r,e_s]=\begin{cases}0 & r+s\in\phi\\ \pm\left(p+1\right)e_{r+s} & r+s\notin\phi\end{cases}$$

הקבוצה $\{h_r\mid r\in\Pi\}\cup\{e_r\mid r\in\phi\}$ היא בסיס לg הנקרא בסיס Chevalley של $\mathfrak{g}$.
מתקיימים היחסים הבאים:

$$[h_r,h_s]=0 \qquad r,s\in\Pi$$

$$[h_r,e_s]=A_{r,s}e_s \qquad \left(A_{r,s}=\frac{2\left(r,s\right)}{\left(r,r\right)}\right)$$

$$[e_r,e_s]=\begin{cases}0 & r+s\notin\phi\\ \pm\left(p+1\right)e_{r+s} & r+s\in\phi\end{cases}$$

אפשר להתעניין ביחידות של בסיס Chevalley כנ"ל. בין היתר אפשר להוכיח שקיימת קבוצה של זוגות שורשים $\left(r,s\right)$ עבורם אפשר לקבוע את סימן $N_{r,s}$ כרצוננו (הבנייה נעשית באמצעות אינדוקציה על זוגות המקיימים $r+s\in\phi$ ו $0<r<s$ לפי היחס המושרה מϕ^+). לא נכנס לזה כאן.

4.3 ההעתקה האכספוננציאלית

$\mathfrak{g}$ אלגברת לי מעל $\mathbb{C}$.

למה 4.3 תהי $\delta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ העתקת גזירה (derivation) נילפוטנטית. אז

$$\exp\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n}{n!}$$

הוא אוטומורפיזם של $\mathfrak{g}$.

הערה 4.4 מדובר בסכום סופי כי $\delta^n=0$ לאיזשהו n.

הוכחה: כרגיל מתקיים

$$(\exp(-\delta))(\exp\delta) = (\exp\delta)(\exp(-\delta)) = \mathrm{id}$$

ולכן ההעתקה הפיכה.

מאחר וδ העתקת גזירה, מתקיים

$$\delta([x,y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

ומכלל לייבניץ לגזירה מסדר גבוה:

$$\delta^r([x,y]) = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left[\delta^i(x), \delta^{r-i}(y)\right]$$

מכאן

$$\begin{aligned}\frac{\delta^r([x,y])}{r!} &= \sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!\cdot(r-i)!}\left[\delta^i(x), \delta^{r-i}(y)\right]\\ &= \sum_{i=0}^{r}\left[\frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^{r-i}(y)}{(r-i)!}\right]\\ &= \sum_{\substack{i+j=r\\ i,j\geq 0}}\left[\frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^j(y)}{j!}\right]\end{aligned}$$

(נניח כי $\delta^N = 0$ אז די להסתפק ב $r \leq N-1$)

$$\begin{aligned}(\exp\delta)([x,y]) &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{i+j=r\\ i,j\geq 0}}\left[\frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^j(y)}{j!}\right]\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^j(y)}{j!}\right]\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{\delta^i(x)}{i!}, (\exp\delta)(y)\right]\\ &= [(\exp\delta)(x), (\exp\delta)(y)]\end{aligned}$$

■

יהי $C = \{h_r \mid r\in\Pi\}\cup\{e_r \mid r\in\phi\}$ בסיס Chevalley של $\mathfrak{g}$ (אלגברת לי פשוטה מעל $\mathbb{C}$). ראינו כי $\mathrm{ad}_{e_r}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ הן העתקות גזירה נילפוטנטיות. נסתכל על $\zeta\mathrm{ad}_{e_r}$ כאשר $\zeta\in\mathbb{C}$ - אלה הן העתקות גזירה נילפוטנטיות. נגדיר ל $r\in\phi$, $\zeta\in\mathbb{C}$, $x_r(\zeta) = \exp(\zeta\cdot\mathrm{ad}_{e_r})$ - זהו אוטומורפיזם של $\mathfrak{g}$. נחשב את פעולת $x_r(\zeta)$ על איברי C:

.1

$$x_r(\zeta)e_r = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\zeta^i}{i!}\mathrm{ad}_{e_r}^i(e_r) = \mathrm{ad}_{e_r}^0(e_r) = e_r$$

.2

$$x_r(\zeta)\,h_s = h_s - A_{s,r}e_r\zeta$$

כי $[e_r,h_s] = -[h_s,e_r] = -A_{s,r}e_r$ ו $[e_r,[e_r,h_s]] = [e_r,-A_{s,r}e_r] = 0$.

.3

$$x_r(\zeta)\,e_{-r} = e_{-r} + \zeta h_r - \zeta^2 e_r$$

כי $[e_r,e_{-r}] = h_r$ ו $[e_r,h_r] = -A_{r,r}e_r = -2e_r$ ולכן $\mathrm{ad}_{e_r}^4(e_r) = [e_r,-2e_r] = 0$.

.4

$$\begin{aligned}
&(s \neq \pm r)\\
x_r(\zeta)\,e_s &= \sum_{i\geq 0}\frac{\zeta^i}{i!}\mathrm{ad}_{e_r}^i(e_s)\\
&= e_s + \zeta[e_r,e_s] + \frac{\zeta^2}{2!}[e_r,[e_r,e_s]] + \dots\\
&= e_s + \zeta N_{r,s}e_{r+s} + \frac{\zeta^2}{2!}N_{r,s}N_{r,r+s}e_{2r+s} + \frac{\zeta^3}{3!}N_{r,s}N_{r,r+s}N_{r,2r+s}e_{3r+s} + \dots +\\
&\quad + \frac{\zeta^q}{q!}N_{r,s}N_{r,r+s}N_{r,2r+s}\cdot\dots\cdot N_{r,(q-1)r+s}\cdot e_{qr+s}
\end{aligned}$$

כאשר $q \geq 0$ כרגיל הוא המקסימלי כך ש $s+rq \in \phi$. נסמן

$$M_{r,s,i} = \frac{1}{i!}N_{r,s}N_{r,r+s}N_{r,2r+s}\cdot\dots\cdot N_{r,(i-1)r+s}$$

ו $M_{r,s,0} = 1$. לכן

$$x_r(\zeta)\,e_s = \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i}\zeta^i e_{ir+s}$$

נראה כי $M_{r,s,i} \in \mathbb{Z}$: אם $r+s \notin \phi$ זה ברור.

נניח כי $r+s \in \phi$. ראינו כי $N_{r,s} = \pm(p+1)$. נזכיר כי $p \geq 0$ הוא המקסימלי כך ש $-pr+s \in \phi$, כלומר $p,q \geq 0$ המקסימליים כך ש

$$-pr+s, -(p-1)r+s, \dots, s, r+s, \dots, qr+s$$

שרשרת. לכן $N_{r,r+s} = \pm((p+1)+1) = \pm(p+2)$. נמשיך ונקבל $N_{r,s+(i-1)r} = \pm(p+i)$. לכן

$$M_{r,s,i} = \pm\frac{(p+1)(p+2)\cdot\dots\cdot(p+i)}{i!} = \pm\binom{p+i}{i} \in \mathbb{Z}$$

נסכם את החשבון:

1. $x_r(\zeta)e_r = e_r$
2. $x_r(\zeta)h_s = h_s - A_{s,r}\zeta e_r$
3. $x_r(\zeta)e_{-r} = e_{-r} + \zeta h_r - \zeta^2 e_r$
4. $x_r(\zeta)e_s = e_s$ ($r + s \notin \phi$, $r \neq \pm s$)
5. $x_r(\zeta)e_s = \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i}\zeta^i e_{ir+s}$ ($r + s \in \phi$)

הוכחנו:

משפט 4.5 תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה מעל $\mathbb{C}$. יהי C בסיס Chevalley של $\mathfrak{g}$ שמתאים לפירוק Cartan ומערכת שורשים ϕ. אז לכל $r \in \phi$, המטריצה של $x_r(\zeta)$ ביחס לC היא עם קואורדינטות בחוג $\mathbb{Z}[\zeta]$.

4.4 אלגבראות לי וחבורות Chevalley מעל שדה כלשהו K

תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה מעל $\mathbb{C}$. C בסיס Chevalley. נסמן $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}C$. זאת אלגברת לי מעל החוג $\mathbb{Z}$ (לא הגדרנו, אבל ההגדרה ברורה לכל חוג קומוטטיבי). נגדיר

$$\mathfrak{g}_K = K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$$

זהו מרחב וקטורי מעל K. יש לו בסיס לינארי

$$\left\{\underbrace{1 \otimes h_r}_{=\overline{h_r}} \mid r \in \Pi\right\} \cup \left\{\underbrace{1 \otimes e_r}_{=\overline{e_r}} \mid r \in \phi\right\}$$

מוגדר מבנה של אלגברת לי על $\mathfrak{g}_K$: ל$x, y \in C$ נגדיר

$$[\overline{x}, \overline{y}] = 1 \otimes [x, y]$$

ונרחיב באופן בילינארי לכל $\mathfrak{g}_K$.

קבועי המבנה לפי $\overline{C}$ (לפי הפירוש הנכון) הם כמו אלה ב$\mathfrak{g}$ (מעל $\mathbb{C}$), למשל:

$$\begin{aligned}
[e_r, e_s] &= N_{r,s}e_{r+s} = \pm(p+1)e_{r+s} \\
[\overline{e_r}, \overline{e_s}] &= (N_{r,s} \times 1_K) \cdot \overline{e_{r+s}}
\end{aligned}$$

וכו'.

נסמן ב $A_r(\zeta)$ את המטריצה של $x_r(\zeta)$ (מעל $\mathbb{C}$) לפי C. נגדיר $\overline{A_r}(t)$ ל$t \in K$ להיות המטריצה המתקבלת מ$A_r(\zeta)$ ע"י החלפת כל קואורדינטה $a\zeta^i$ ($a \in \mathbb{Z}$) ב $(a \times 1_K) \cdot t^i$, ותהי

$$\overline{x_r}(t) : \mathfrak{g}_K \to \mathfrak{g}_K$$

ההעתקה הלינארית שהמטריצה שלה ביחס ל$\overline{C}$ נתונה ע"י $\overline{A_r}(t)$:

$$[\overline{x_r}(t)v]_{\overline{C}} = \overline{A_r}(t) \cdot [v]_{\overline{C}}$$

טענה 4.6 לכל $t \in K$, $r \in \phi$, $\overline{x_r}(t)$ הוא אוטומורפיזם של $\mathfrak{g}_K$.

הוכחה: כיוון ש $x_r(\zeta)\, x_r(-\zeta) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, נקבל $\overline{x_r}(t)\,\overline{x_r}(-t) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_K}$ ולכן $\overline{x_r}(-t) = \overline{x_r}(t)^{-1}$.

$[x_r(\zeta)\, u, x_r(\zeta)\, v] = x_r(\zeta)\,[u,v]$ לכל $u, v \in \mathfrak{g}$ ולכן $[\overline{x_r}(t)\,\overline{u}, \overline{x_r}(t)\,\overline{v}] = \overline{x_r}(t)\,[\overline{u},\overline{v}]$ לכל $\overline{u},\overline{v} \in C$ ולכן $[\overline{x_r}(t)\, u, \overline{x_r}(t)\, v] = \overline{x_r}(t)\,[u,v]$ לכל $u, v \in \mathfrak{g}_K$. ■

למה 4.7 נתבונן ב $\mathfrak{g}$ וב $\mathfrak{g}_K$. אז לכל $r \in \phi$, $\overline{h_r} \neq 0$.

הוכחה: תהי ϕ^* המערכת הדואלית לϕ. אז $\left\{\frac{2r}{(r,r)} \mid r \in \Pi\right\}$ מערכת יסודית לϕ^*.
נסמן $\Pi = \{r_1, \ldots, r_l\}$. נסיק כי לכל $r \in \phi$, $h_r = \sum_{i=1}^{l} n_i h_{r_i}$ (n_i שלמים כולם מאותו סימן או אפס). כיוון ש $\left\{\overline{h_{r_i}}\right\}_{i=1}^{l}$ חלק מבסיס של $\mathfrak{g}_K$ נקבל

$$\overline{h_r} = 0 \implies n_1 \times 1_K = \cdots = n_l \times 1_K = 0$$

זה מחייב ש $\mathrm{char} K = p > 0$ ו $p \mid n_i$ לכל i. יש $w \in W(\phi)$ ויש שורש פשוט r_j כך ש $w(r_j) = r$ ולכן

$$w\left(h_{r_j}\right) = w\left(\frac{2r_j}{(r_j, r_j)}\right) = \frac{2w(r_j)}{(w(r_j), w(r_j))} = \frac{2r}{(r,r)} = h_r = \sum_{i=1}^{l} n_i h_{r_i}$$

ראינו כי המטריצה של w ביחס ל $\{h_{r_i} \mid 1 \leq i \leq l\}$ היא מטריצה מעל $\mathbb{Z}$ ובעלת דטרמיננטה ± 1. העמודה הj של מטריצה זו היא $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_l \end{pmatrix}$ וכל איבריה מתחלקים בp. לכן $p \mid \det w$ ־ סתירה. ■

הגדרה 4.8 תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה מעל $\mathbb{C}$. יהי K שדה. חבורת Chevalley מטיפוס $\mathfrak{g}$ מעל K היא תת־חבורת האוטומורפיזמים של אלגברת לי $\mathfrak{g}_K$, אשר נוצרת ע"י

$$\{\overline{x_r}(t) \mid t \in K,\, r \in \phi\}$$

נסמן את החבורה $\mathfrak{g}(K)$.

מעתה נסמן את $\overline{x_r}(t)$ ב$x_r(t)$ ונראה את $\mathbb{C}$ כמקרה פרטי מבין כל השדות K. מתקיימות הזהויות הבאות שכבר ראינו:

1. $x_r(t)\, e_r = e_r$
2. $x_r(t)\, h_s = h_s - A_{s,r} t e_r$
3. $x_r(t)\, e_{-r} = e_{-r} + t h_r - t^2 e_r$
4. $x_r(t)\, e_s = e_s$ ($r + s \notin \phi$, $r \neq \pm s$)
5. $x_r(t)\, e_s = \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i} t^i e_{ir+s}$ ($r + s \in \phi$)

4.5 החבורה $A_1(K)$

אלגברת לי שסומנה A_n היא

$$\mathfrak{sl}_{n+1}(K)=\{X\in \mathrm{M}_{n+1}(K)\mid \mathrm{tr}X=0\}$$

בפרט

$$\mathfrak{sl}_2(K)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\mid a,b,c\in K\right\}$$

נסמן $e_-=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $e_+=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. אז

$$[e_+,e_-]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=h$$

ומתקיים

$$[h,e_+]=2e_+$$
$$[h,e_-]=-2e_-$$

למה 4.9 תהי $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ תת־אלגברת לי. תהי $y\in\mathfrak{g}$ כך ש־y מטריצה נילפוטנטית, כלומר $y^N=0$ ל־N טבעי. אז ad_y העתקת גזירה ונילפוטנטית ומתקיים לכל $x\in\mathfrak{g}$

$$\exp(-\mathrm{ad}_y)(x)=(\exp y)\,x\,(\exp y)^{-1}$$

הערה 4.10 כאן הכפל הוא כפל מטריצות באלגברה האסוציאטיבית $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

הוכחה:

$$\exp(\mathrm{ad}_y)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{ad}_y^k(x)}{k!}$$

נוכיח באינדוקציה כי

$$\frac{\mathrm{ad}_y^k(x)}{k!}=\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}}\frac{y^i}{i!}\cdot x\cdot\frac{(-y)^j}{j!}$$

עבור $k=1$ מקבלים $\mathrm{ad}_y(x)=yx-xy$ והטענה נכונה.

נניח כי הטענה נכונה עבור k ונראה עבור $k+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{ad}_y^{k+1}(x)}{(k+1)!} &= \frac{\mathrm{ad}_y}{k+1}\circ\frac{\mathrm{ad}_y^k}{k!}(x)\\
&= \frac{\mathrm{ad}_y}{k+1}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}}\frac{y^i}{i!}\cdot x\cdot\frac{(-y)^j}{j!}\right)\\
&= \frac{1}{k+1}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}}\frac{y^{i+1}}{i!}\cdot x\cdot\frac{(-y)^j}{j!}+\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}}\frac{y^i}{i!}\cdot x\cdot\frac{(-y)^{j+1}}{j!}\right)\\
&= \frac{1}{k+1}\left(\sum_{\substack{i+j=k+1\\ i\geq 1,\, j\geq 0}}\frac{y^i}{i!}\cdot x\cdot\frac{(-y)^j}{j!}\cdot i+\sum_{\substack{i+j=k+1\\ i\geq 0\,, j\geq 1}}\frac{y^i}{i!}\cdot x\cdot\frac{(-y)^j}{j!}\cdot j\right)\\
&= \frac{1}{k+1}\left(\sum_{\substack{i+j=k+1\\ i\geq 1,\, j\geq 1}}\frac{y^i}{i!}\cdot x\cdot\frac{(-y)^j}{j!}\cdot(i+j)+\frac{y^{k+1}}{(k+1)!}\cdot x\cdot(k+1)+x\cdot\frac{(-y)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot(k+1)\right)\\
&= \sum_{\substack{i+j=k+1\\ i\geq 0,\, j\geq 0}}\frac{y^i}{i!}\cdot x\cdot\frac{(-y)^j}{j!}
\end{aligned}$$

הזהות הזאת בפרט מראה שad_y העתקה נילפוטנטית (כי ל$k\geq 2N$ מתקיים ל$i+j=2N$ כי $i\geq N$ או $j\geq N$), ולכן $\exp(\mathrm{ad}_y)$ מוגדרת.

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{ad}_y)(x) &= \sum_{k\geq 0}\sum_{i+j=k}\frac{y^i}{i!}x\frac{(-y)^j}{j!}\\
&= \left(\sum_{i\geq 0}\frac{y^i}{i!}\right)x\left(\sum_{j\geq 0}\frac{(-y)^j}{j!}\right)\\
&= (\exp y)\,x\,(\exp y)^{-1}
\end{aligned}$$

■

מכאן $x_+(\zeta)=\exp\left(\zeta\mathrm{ad}_{e_+}\right)$ מקיימת ל $x\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$x_+(\zeta)(x)=\exp(\zeta e_+)\,x\,(\exp(\zeta e_+))^{-1}$$

ברור שe_+ נילפוטנטית מסדר 2 ולכן

$$\begin{aligned}
\exp(\zeta e_+) &= I_2+\zeta e_++\frac{\zeta^2}{2}e_+^2+\dots\\
&= I_2+\zeta e_+
\end{aligned}$$

כלומר

$$x_+(\zeta)(x) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & -\zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$x_-(\zeta)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \zeta & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta & 1 \end{pmatrix}$$

כשעוברים לשדה K מקבלים אותן נוסחאות.
$\mathrm{SL}_2(K)$ נוצרת כחבורה ע"י

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in K \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \mid y \in K \right\}$$

אכן, תהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ עם $ad - bc = 0$. אם $c = 0$ אז נוכל לרשום

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואת $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ נרשום כך:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם $c \neq 0$ נוכל לרשום

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת נגדיר העתקה $\varphi : \mathrm{SL}_2(K) \to A_1(K)$ ע"י $\varphi(g)(x) = gxg^{-1}$, $x \in \mathfrak{sl}_2(K)$.
מתקיים $\varphi \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_+(t)$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_-(t)$ לכל $t \in K$. מאחר ו$\mathrm{SL}_2(K)$ נוצרת ע"י איברים כנ"ל, נקבל כי $\mathrm{Im}\varphi \subseteq A_1(K)$.
מתקיים $g \in \ker\varphi \iff xg = gx$ לכל $x \in \mathfrak{sl}_2(k)$. ע"י בדיקה קלה מקבלים $g \in Z(\mathrm{SL}_2(K)) = \{\pm I_2\}$ ולכן ממשפט האיזומורפיזם הראשון

$$A_1(K) \cong {}^{\mathrm{SL}_2(K)}/_{\{\pm I_2\}} = \mathrm{PSL}_2(K)$$

נניח כי $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ אלגברת לי קלאסית. ($\underset{C_n}{\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})}$ $\underset{D_n}{\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{C})}$ $\underset{B_n}{\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{C})}$ $\underset{A_n}{\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})}$)
בכל הדוגמאות האלה, האיברים e_r הם מטריצות נילפוטנטיות ואז

$$\begin{aligned} x_r(\zeta)(x) &= \exp(\zeta \mathrm{ad}_{e_r})(x) \\ &= \underbrace{\exp(\zeta e_r)}_{y_r(\zeta)} x \exp(-\zeta e_r) \\ &= y_r(\zeta) \cdot x \cdot y_r(\zeta)^{-1} \end{aligned}$$

ובאותו אופן כשעוברים לשדה K.
$y_r(t) \in \mathrm{GL}_N(K)$. נסמן ב$G_K$ את תת־החבורה של $\mathrm{GL}_N(K)$ הנוצרת ע"י

$$\{y_r(t) \mid t \in K,\, r \in \phi\}$$

כמו קודם נוכל להגדיר העתקה $\varphi : G_K \to \mathfrak{g}(K)$ לפי $\varphi(g)(x) = gxg^{-1}$. לפי ההגדרות, φ הומומורפיזם על.
אם $g \in \ker\varphi$, אז לכל $x \in \mathfrak{g}_K$ מתקיים $gxg^{-1} = x$ ולכן $ge_rg^{-1} = e_r$ לכל $r \in \phi$.
מכאן $gy_r(t)g^{-1} = y_r(t)$ (כי $y_r(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} e_r^i$) ולכן $g \in Z(G_K)$.
גם ההכלה $Z(G_K) \subseteq \ker\varphi$ נכונה.
נדגים זאת בD_n:
לפי פירוק Cartan ביחס למטריצות האלכסוניות, ראינו את $\{e_r\}$ הבאים:

$$\hat{e}_{ij} = \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix} \qquad (i \neq j)$$
$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$-{}^t\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} - e_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

לכל מטריצה כזאת יש את התכונה שהיא נילפוטנטית מסדר 2 ולכן $e_r^2 = 0$ ו

$$y_r(t) = \exp(te_r) = I + te_r$$

לכן אם $g \in Z(G_K)$ אז g מתחלף עם $y_r(t) = I_N + te_r$, ולכן g מתחלף עם e_r לכל $r \in \phi$ ואז g מתחלף גם עם $[e_r, e_{-r}] = h_r$ ולכן g מתחלף עם בסיס Chevalley של D_n ואז $gxg^{-1} = x$ לכל $x \in D_n$, כלומר $\varphi(g) = \mathrm{id}$ ולכן $g \in \ker\varphi$.
בD_n יוצא

$$y_{\hat{e}_{ij}}(t) = \left(\begin{array}{c|c} I_n + te_{ij} & 0 \\ \hline 0 & I_n - te_{ji} \end{array}\right)$$
$$y_{\varepsilon_{ij}}(t) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & t(e_{ij} - e_{ji}) \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$

תרגיל: להראות שעבור $\mathfrak{sl}_{n+1}(K)$ מתקיים $\mathrm{SL}_{n+1}(K) = G_K$ ולכן

$$A_n(K) \cong {}^{\mathrm{SL}_{n+1}(K)}/_{Z(\mathrm{SL}_{n+1}(K)) = \mathrm{PSL}_{n+1}(K)}$$

(**הדרכה:** להוכיח ש$\mathrm{SL}_{n+1}(K)$ נוצרת ע"י מטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & t & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & 1 & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$)

5 תת־החבורות היוניפוטנטיות

5.1 החבורות U, V

מתכונות האקספוננט מתקיים $x_r(t_1)x_r(t_2)=x_r(t_1+t_2)$ לכל $r\in\phi$ ו־$t_1,t_2\in K$. לכן $x_r:K\to\mathfrak{g}(K)$ הוא הומומורפיזם מהחבורה החיבורית של K אל $\mathfrak{g}(K)$.

דוגמאות טיפוסיות:

1. $t\mapsto\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$)

2. $t\mapsto\begin{pmatrix}1 & & & t\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$ ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$)

x_r הוא חד־חד־ערכי: אם $x_r(t)=I$ בפרט מתקיים

$$e_{-r}=x_r(t)e_{-r}=e_{-r}+th_r-t^2e_r$$

$\{e_{-r},h_r,e_r\}$ בת"ל ולכן $th_r-t^2e_r=0\iff t=0$.

נסמן $X_r=\{x_r(t)\mid t\in K\}\subseteq\mathfrak{g}(K)$, אז $X_r\cong K$. ל־X_r קוראים root subgroup.

נגדיר את U להיות תת־החבורה של $\mathfrak{g}(K)$ הנוצרת ע"י $\bigcup_{r\in\phi^+}X_r$. באופן דומה, נגדיר את V להיות תת־החבורה הנוצרת ע"י $\bigcup_{r\in\phi^-}X_r$.

נזכר בפונקציית הגובה על ϕ (המתאימה למערכת היסודית Π): ל־$\Pi=\{r_1,\dots,r_l\}$ פונקציית הגובה מוגדרת ע"י

$$h\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{l}n_ir_i}_{r\in\phi}\right)=\sum_{i=1}^{l}n_i$$

כאשר $n_1,\dots,n_l$ כולם שלמים בעלי אותו סימן (או אפס).

הערה 5.1 נשים לב כי h היא צמצום של פונקציונל לינארי על $\mathrm{span}\phi$ המוגדר ע"י

$$\tilde{h}\left(\sum_{i=1}^{l}x_ir_i\right)=\sum_{i=1}^{l}x_i$$

נכתוב $\mathfrak{g}_K=\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty}\mathfrak{g}_i$ כאשר $\mathfrak{g}_i=\bigoplus_{h(r)=i}\mathfrak{g}_r$ ל־$i\neq0$ ו־$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$ הוגדר בנפרד קודם.

נתון $r\in\phi^+$. נתאר את פעולת $x_r(t)$ על $\mathfrak{g}_i$. נניח כי $h(s)=i$.

אם $s=r$ אז $x_r(t)e_r=e_r$. אם $s=-r$ אז $x_r(t)e_{-r}=e_{-r}+th_r-t^2e_r$.

אם $i=0$ אז $x_r(t)h_s=h_s-A_{s,r}e_r=h_s-\frac{2(s,r)}{(s,s)}e_r$.

נניח כי $\pm r \neq s \in \phi$. אם $q=0$ אז $x_r(t)\,e_s = e_s$. נניח כי $q \geq 1$, אז

$$x_r(t)\,e_s = \sum_{\substack{jr+s\in\phi \\ j=0}}^{q} M_{r,s,j}\,e_{jr+s}\,t^j$$

(כאשר כרגיל $q \geq 0$ הוא המקסימלי כך ש $-pr+s,\dots,s,r+s,\dots,qr+s$ היא שרשרת, וראינו $M_{r,s,j} = \pm\binom{p+j}{j}$).

נסתכל ב $x_r(t)\,e_s - e_s \in \sum_{j=1}^{q}\mathfrak{g}_{jr+s}$. מאחר ו$h(jr+s) = jh(r)+h(s)$, אז מתקיים $h(jr+s) > h(s)$ (כי $h(r)>0$) ולכן ל$y \in \mathfrak{g}_i$ מתקיים

$$x_r(t)\,y - y \in \mathfrak{g}_0 + \sum_{h(\alpha)>i}\mathfrak{g}_\alpha$$

נסדר את בסיס Chevalley כך (ביחס לr):

$$\{e_r\}\cup\{h_s \mid s\in\Pi\}\cup\underbrace{\{e_s \mid s\in\phi,\, q_r\geq 1\}}_{\text{ordered by } h(s)}\cup\{e_s \mid s\in\phi,\, q_r=0\}\cup\{e_{-r}\}$$

לפי בסיס זה $x_r(t)$ נראית כך:

$$A = \begin{array}{c}
\overbrace{e_r}\quad \overbrace{\{h_s|s\in\Pi\}}\quad \overbrace{\{e_s|s\in\phi,\,q_r\geq1\}}\quad \overbrace{\{e_s|s\in\phi,\,q_r=0\}}\quad \overbrace{e_{-r}} \\
\begin{pmatrix}
1 & * & * & \cdots & * & * & * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
 & 1 & 0 & \vdots & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
 & & 1 & \ddots & \vdots & * & * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
 & & & \ddots & 0 & * & * & * & * & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & 1 & * & * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
 & & & & & 1 & * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & 1 & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & * & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & 0 & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

באופן דומה אפשר להראות שלכל $r \in \phi^-$ יש סידור של הבסיס כך שביחס לבסיס זה, ל$x_r(t)$ יש צורה כנ"ל. נסכם:

טענה 5.2 לכל $r \in \phi$, $x_r(t)$ הוא אוטומורפיזם יוניפוטנטי של $\mathfrak{g}_K$, ולכן U, V נוצרות ע"י אוטומורפיזמים יוניפוטנטיים.

למה 5.3 נניח כי $\mathrm{char}K = 0$. יהי $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ אוטומורפיזם ונניח כי $y \in \mathfrak{g}$ הוא כך ש ad_y נילפוטנטי. אז $\theta \circ \exp\left(\mathrm{ad}_y\right) \circ \theta^{-1} = \exp\left(\mathrm{ad}_{\theta(y)}\right)$.

הוכחה: נניח כי $x \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned}\left(\theta \circ \exp\left(\mathrm{ad}_y\right) \circ \theta^{-1}\right)(x) &= \theta\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_y^i}{i!}\left(\theta^{-1}(x)\right)\right) \\ &= \theta\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left[y, \left[y, \ldots \left[y, \theta^{-1}(x)\right]\right]\right]}{i!}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left[\theta(y), \left[\theta(y), \ldots \left[\theta(y), x\right]\right]\right]}{i!} \\ &= \exp\left(\mathrm{ad}_{\theta(y)}\right)(x)\end{aligned}$$

■

למה 5.4 נניח כי $\xi, \eta \in \mathrm{End}_K V$ (V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל K). נניח כי $[\eta, \xi]$ מתחלף עם ξ. אז לכל $i \geq 1$

$$\mathrm{ad}_\eta\left(\xi^i\right) = i\xi^{i-1}\mathrm{ad}_\eta(\xi)$$

הוכחה: באינדוקציה: עבור $i = 1$ הטענה ברורה.
מעבר האינדוקציה:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_\eta\left(\xi^{i+1}\right) &= \left[\eta, \xi^{i+1}\right] \\ &= \eta\xi^{i+1} - \xi^{i+1}\eta \\ &= \left(\eta\xi^i - \xi^i\eta\right)\xi + \xi^i\left(\eta\xi - \xi\eta\right) \\ &= \left[\eta, \xi^i\right]\xi + \xi^i[\eta, \xi] \\ &= i\xi^{i-1}[\eta, \xi]\xi + \xi^i[\eta, \xi] \\ &= i\xi^{i-1}\xi[\eta, \xi] + \xi^i[\eta, \xi] \\ &= (i+1)\xi^i[\eta, \xi]\end{aligned}$$

■

למה 5.5 נניח כי $\mathrm{char}K = 0$ וכי $\xi, \eta, [\xi, \eta] \in \mathrm{End}_K(V)$ נילפוטנטיים, וכן נניח כי $[\xi, \eta]$ מתחלף עם η וגם עם ξ. אז

$$\exp(\xi + \eta) = \exp(\xi)\exp(\eta)\exp\left(-\frac{1}{2}[\xi, \eta]\right)$$

הוכחה: ראשית נראה באינדוקציה כי

$$\frac{(\xi+\eta)^n}{n!} = \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k\geq 0}} \frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{[\xi,\eta]^k(-1)^k}{2^k\cdot k!}$$

נכתוב את המקרים הראשונים כדי לסבר את העין: $n=0,1$ ברור.
$n=2$: אגף ימין שווה ל

$$\begin{aligned}\frac{\xi^2}{2!}+\frac{\xi\eta}{1!\cdot 1!}+\frac{\eta^2}{2!}-\frac{[\xi,\eta]}{2} &= \frac{1}{2}\left(\xi^2+2\xi\eta+\eta^2-\xi\eta+\eta\xi\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\xi^2+\xi\eta+\eta\xi+\eta^2\right)\\ &= \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}\end{aligned}$$

צעד האינדוקציה:

$$\begin{aligned}\frac{(\xi+\eta)^n}{n!} &= \frac{(\xi+\eta)}{n}\cdot\frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \frac{(\xi+\eta)}{n}\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} \frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^k}{2^k\cdot k!}\\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} \frac{\xi^{i+1}}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^k}{2^k\cdot k!}+\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} \frac{\eta\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^k}{2^k\cdot k!}\right)\end{aligned}$$

מלמה 5.4 מתקיים $\eta\xi^i=\xi^i\eta+i\xi^{i-1}[\eta,\xi]$ ולכן

$$\begin{aligned}=\frac{1}{n}\Bigg(&\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} \frac{\xi^{i+1}}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^k}{2^k\cdot k!}+\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} \frac{\xi^i\eta}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^k}{2^k\cdot k!}+\\ &+\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} \frac{i\xi^{i-1}[\eta,\xi]}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^k}{2^k\cdot k!}\Bigg)\end{aligned}$$

נשתמש בכך ש$[\eta,\xi]=-[\xi,\eta]$ מתחלף עם η ונקבל

$$\begin{aligned}=\frac{1}{n}\Bigg(&\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} (i+1)\frac{\xi^{i+1}}{(i+1)!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^k}{2^k\cdot k!}+\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} (j+1)\frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^{j+1}}{(j+1)!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^k}{2^k\cdot k!}+\\ &+\sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k\geq 0}} 2(k+1)\frac{i\xi^{i-1}}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{(-[\xi,\eta])^{k+1}}{2^{k+1}\cdot(k+1)!}\Bigg)\end{aligned}$$

ע"י החלפת אינדקסים נקבל

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{i+j+2k=n\\ i,j,k\geq 0}} i\frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{\left(-\left[\xi,\eta\right]\right)^k}{2^k\cdot k!}+\sum_{\substack{i+j+2k=n\\ i,j,k\geq 0}} j\frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{\left(-\left[\xi,\eta\right]\right)^k}{2^k\cdot k!}+\right.\\
&\left.+\sum_{\substack{i+j+2k=n\\ i,j,k\geq 0}} 2k\frac{\left(i+1\right)\xi^i}{\left(i+1\right)!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{\left(-\left[\xi,\eta\right]\right)^k}{2^k\cdot k!}\right)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{\substack{i+j+2k=n\\ i,j,k\geq 0}}\left(i+j+2k\right)\frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{\left(-\left[\xi,\eta\right]\right)^k}{2^k\cdot k!}\\
=&\sum_{\substack{i+j+2k=n\\ i,j,k\geq 0}}\frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{\left(-\left[\xi,\eta\right]\right)^k}{2^k\cdot k!}
\end{aligned}$$

כנדרש.

כיוון ש $\xi,\eta,[\xi,\eta]$ נילפוטנטיים, נסיק כי גם $\xi+\eta$ נילפוטנטי, כי לn די גדול בסכום

$$\frac{\left(\xi+\eta\right)^n}{n!}=\sum_{\substack{i+j+2k=n\\ i,j,k\geq 0}}\frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{\left(-\left[\xi,\eta\right]\right)^k}{2^k\cdot k!}$$

i או j או k יהיו די גדולים כך ש $\xi^i=0$ או $\eta^j=0$ או $[\xi,\eta]^k=0$ ואז $(\xi+\eta)^n=0$.

כעת מתקיים

$$\begin{aligned}
\exp\left(\xi+\eta\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\xi+\eta\right)^n}{n!}\\
&=\sum_{n\geq 0}\sum_{\substack{i+j+2k=n\\ i,j,k\geq 0}}\frac{\xi^i}{i!}\cdot\frac{\eta^j}{j!}\cdot\frac{\left(-\left[\xi,\eta\right]\right)^k}{2^k\cdot k!}\\
&=\exp\left(\xi\right)\exp\left(\eta\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\xi,\eta\right]\right)
\end{aligned}$$

■

5.2 נוסחת הקומוטטור של Chevalley

(נוסחה סופר חשובה, ההוכחה ממש טכנית ונראה רק חלק ממנה)

כאשר $s\neq\pm r$ נכתוב נוסחה לקומוטטור $\left[x_s\left(u\right),x_r\left(t\right)\right]$ (כאן $\left[x_s\left(u\right),x_r\left(t\right)\right]=x_s\left(u\right)^{-1}x_r\left(t\right)^{-1}x_s\left(u\right)x_r\left(t\right)$).

נתחיל במציאת נוסחה להצמדות מעל $K=\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
x_r\left(t\right)x_s\left(u\right)x_r\left(t\right)^{-1}&=x_r\left(t\right)\exp\left(u\mathrm{ad}_{e_s}\right)x_r\left(t\right)^{-1}\\
&=\exp\left(u\mathrm{ad}_{x_r\left(t\right)e_s}\right)
\end{aligned}$$

כאן השתמשנו בלמה 5.3 עם $\theta = x_r(t)$.

נניח כי $r+s \notin \phi$, אז $x_r(t)e_s = e_s$. נקבל כי $\exp\left(u\mathrm{ad}_{x_r(t)e_s}\right) = x_s(u)$, כלומר $x_s(u)$, $x_r(t)$ מתחלפים.

נניח כי r,s בת"ל כך ש $r+s \in \phi$. אז

$$x_r(t)e_s = \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i}t^i e_{ir+s}$$

לכן

$$x_r(t)x_s(u)x_r(t)^{-1} = \exp\left(\sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i}ut^i \mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)$$

קבוצת השורשים מהצורה $ir+js$ היא מערכת שורשים בעלת בסיס $\{r,s\}$. נסמן $\phi' = \phi \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{r,s\}$. מערכת כזאת היא מטיפוס A_2, B_2, G_2 (ללא הוכחה). צריך לעבור על כחמישה מקרים. נעבור על שלושה, היתר דומים.

מקרה ראשון נניח כי המערכת היא A_2 או B_2. נרשום את השורשים החיוביים:

ϕ'	ϕ'^{+}	תנאי
A_2	$\{r,s,r+s\}$	
B_2	$\{r,s,r+s,2r+s\}$	$\|r\| < \|s\|$
B_2	$\{r,s,r+s,r+2s\}$	$\|s\| < \|r\|$

טבלה 3: האפשרויות לקבוצת שורשים החיוביים

1. נניח כי $r+2s \notin \phi'$, לכן e_{jr+s}, e_{ir+s} מתחלפים, כי אין שורש מהצורה $i'r+2s$. נקבל

$$x_r(t)x_s(u)x_r(t)^{-1} = \prod_{i=0}^{q} \exp\left(M_{r,s,i}ut^i \mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)$$

2. נניח כי המערכת היא B_2 וכי $r+2s \in \phi$. אז

$$\phi'^{+} = \{r,s,r+s,r+2s\}$$

נשים לב כי $s, r+s$ היא שרשרת r דרך s ולכן $q=1$.

$$x_r(t)x_s(u)x_r(t)^{-1} = \exp\left(\mathrm{ad}_{ue_s} + \mathrm{ad}_{N_{r,s}ute_{r+s}}\right)$$

נסמן $\xi = ue_s$, $\eta = N_{r,s}ute_{r+s}$, אז

$$[\mathrm{ad}_\xi, \mathrm{ad}_\eta] = \mathrm{ad}_{[\xi,\eta]}$$

ו

$$
\begin{aligned}
[\xi,\eta] &= [ue_s, N_{r,s}ute_{r+s}] \\
&= N_{r,s}N_{s,r+s}u^2te_{r+2s}
\end{aligned}
$$

e_{2r+s} מתחלף עם e_s ועם e_r (כי $e_{r+3s},\ e_{2r+s} \notin \phi$). לפי למה 5.5 נקבל

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\mathrm{ad}_{ue_s} + \mathrm{ad}_{N_{r,s}ute_{r+s}}\right) &= \exp\left(u\mathrm{ad}_{e_s}\right)\exp\left(N_{r,s}ut\mathrm{ad}_{e_{r+s}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}N_{r,s}N_{s,r+s}u^2t\mathrm{ad}_{r+2s}\right) \\
&= x_s\left(u\right)x_{r+s}\left(N_{r,s}ut\right)x_{r+2s}\left(-\underbrace{\frac{1}{2}N_{r,s}N_{s,r+s}}_{\in\mathbb{Z}}u^2t\right)
\end{aligned}
$$

נשים לב כי $N_{s,r+s} = \pm 2$ כי מתקיים כי $r, r+s, r+2s$ היא שרשרת s דרך $r+s$ ארוכה ביותר ולכן $p=1$ ו $N_{s,r+s} = \pm\left(p+1\right)$. לכן $-\frac{1}{2}N_{r,s}N_{s,r+s} \in \mathbb{Z}$.

מקרה שני נניח כי המערכת $\phi' = \{ir+js \in \phi\}$ היא מטיפוס G_2.
נניח כי $3r+2s \in \phi$. במקרה זה, השורשים החיוביים הם

$$
\phi'^{+} = \{r, s, r+s, 2r+s, 3r+s, 3r+2s\}
$$

כאן $q=3$

$$
\exp\left(\sum_{i=0}^{q}M_{r,s,i}ut^i\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right) = \exp\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{2}M_{r,s,i}ut^i\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}}_{\xi} + \underbrace{M_{r,s,3}ut^3\mathrm{ad}_{e_{3r+s}}}_{\eta}\right)
$$

מאחר ו$e_{(3+i)r+2s} \in \phi$ רק כאשר $i=0$, מתקיים

$$
[\xi,\eta] = u^2t^3M_{r,s,3}N_{s,3r+s}\mathrm{ad}_{e_{3r+2s}}
$$

מלמה 5.5,

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{i=0}^{q}M_{r,s,i}ut^i\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right) &= \exp\left(\sum_{i=0}^{2}M_{r,s,i}ut^i\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)\exp\left(M_{r,s,3}ut^3\mathrm{ad}_{e_{3r+s}}\right)\circ \\
&\circ\exp\left(-\frac{1}{2}u^2t^3M_{r,s,3}N_{s,3r+s}\mathrm{ad}_{e_{3r+2s}}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=0}^{2}M_{r,s,i}ut^i\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)x_{3r+s}\left(M_{r,s,3}ut^3\right)\circ \\
&\circ x_{3r+2s}\left(-\frac{1}{2}N_{s,3r+s}M_{r,s,3}u^2t^3\right)
\end{aligned}
$$

נפרק לפי למה 5.5 את הגורם $\exp\left(\sum_{i=0}^{2} M_{r,s,i}ut^{i}\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)$:

$$\exp\left(\sum_{i=0}^{2} M_{r,s,i}ut^{i}\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)=\exp\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{1} M_{r,s,i}ut^{i}\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}}_{\xi}+\underbrace{M_{r,s,2}ut^{2}\mathrm{ad}_{e_{2r+s}}}_{\eta}\right)$$

רק $i=1$ תורם לקומוטטור, שהרי $(i+2)r+2s\in\phi$ רק ל-$i=1$. לכן

$$[\xi,\eta]=\underbrace{M_{r,s,1}}_{=N_{r,s}}M_{r,s,2}N_{r+s,2r+s}u^{2}t^{3}\mathrm{ad}_{3r+2s}$$

ולכן מהלמה

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{i=0}^{2} M_{r,s,i}ut^{i}\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)&=\exp\left(\sum_{i=0}^{1} M_{r,s,i}ut^{i}\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)\exp\left(M_{r,s,2}ut^{2}\mathrm{ad}_{e_{2r+s}}\right)\circ\\&\circ\exp\left(N_{r,s}M_{r,s,2}N_{r+s,2r+s}u^{2}t^{3}\mathrm{ad}_{3r+2s}\right)\\&=\exp\left(\sum_{i=0}^{1} M_{r,s,i}ut^{i}\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)\circ x_{2r+s}\left(M_{r,s,2}ut^{2}\right)\\&\circ x_{3r+2s}\left(-\frac{1}{2}N_{r,s}M_{r,s,2}N_{r+s,2r+s}u^{2}t^{3}\right)\end{aligned}$$

מאחר ו $s+(r+s)=r+2s$ אינו שורש, נקבל כי

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{i=0}^{1} M_{r,s,i}ut^{i}\mathrm{ad}_{e_{ir+s}}\right)&=\exp\left(u\mathrm{ad}_{e_{s}}\right)\exp\left(N_{r,s}ut\mathrm{ad}_{e_{r+s}}\right)\\&=x_{s}(u)\,x_{r+s}\left(N_{r,s}ut\right)\end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו

$$\begin{aligned}x_{r}(t)\,x_{s}(u)\,x_{r}(t)^{-1}=&x_{s}(u)\,x_{r+s}\left(N_{r,s}tu\right)x_{2r+s}\left(M_{r,s,2}t^{2}u\right)\circ\\&\circ x_{3r+2s}\left(-\frac{1}{2}N_{r,s}M_{r,s,2}N_{r+s,2r+s}t^{3}u^{2}\right)\circ\\&\circ x_{3r+s}\left(M_{r,s,3}t^{3}u\right)\circ\\&\circ x_{3r+2s}\left(-\frac{1}{2}N_{s,3r+s}M_{r,s,3}t^{3}u^{2}\right)\end{aligned}$$

מאחר ו $(3r+2s)+(r+s)\notin\phi$, x_{3r+s}, x_{3r+2s} מתחלפים ולכן

$$\begin{aligned}x_{r}(t)\,x_{s}(u)\,x_{r}(t)^{-1}=&x_{s}(u)\,x_{r+s}\left(N_{r,s}tu\right)x_{2r+s}\left(M_{r,s,2}t^{2}u\right)\circ\\&\circ x_{3r+s}\left(M_{r,s,3}t^{3}u\right)\circ\\&\circ x_{3r+2s}\left(\left(-\frac{1}{2}N_{r+s,2r+s}N_{r,s}M_{r,s,2}-\frac{1}{2}N_{s,3r+s}M_{r,s,3}\right)t^{3}u^{2}\right)\end{aligned}$$

למה 5.6 המקדם בתוך x_{3r+2s} הוא

$$-\frac{1}{2}N_{r+s,2r+s}N_{r,s}M_{r,s,2}-\frac{1}{2}N_{s,3r+s}M_{r,s,3}=\frac{1}{3}M_{r+s,r,2}$$

הוכחה: בספר Simple Groups of Lie Type של Carter, עמוד 73. ■

משפט 5.7 (נוסחת הקומוטטור של Chevalley): נניח כי $r,s\in\phi$ שורשים בת"ל, כך ש $r+s\in$ ϕ.

$$x_r(t)\,x_s(u)\,x_r(t)^{-1}=x_s(u)\prod_{\substack{i,j\geq 1\\ ir+js\in\phi}}x_{ir+js}\left(C_{i,j,r,s}t^iu^j\right)$$

(כאן סדר הגורמים במכפלה הוא לפי הגודל של $i+j$) כאשר

$$\begin{aligned}C_{i,1,r,s}&=M_{r,s,i}\\C_{i,j,r,s}&=(-1)^j\,M_{r,s,j}\\C_{3,2,r,s}&=\frac{1}{3}M_{r+s,r,2}\\C_{2,3,r,s}&=-\frac{1}{3}M_{s+r,r,2}\end{aligned}$$

הערה 5.8 שני המקדמים האחרונים מופיעים רק במקרה של G_2 ומסתבר שהם מספרים שלמים.

עכשיו הנוסחה תקפה גם מעל שדה כלשהו K. נסמן

$$[x_s(u),x_r(t)]=x_s(u)^{-1}\,x_r(t)^{-1}\,x_s(u)\,x_r(t)$$

אז

$$[x_s(u),x_r(t)]=\prod_{\substack{i,j\geq 1\\ ir+js\in\phi}}x_{ir+js}\left(C_{i,j,r,s}\,(-t)^i\,u^j\right)$$

5.3 המבנה של החבורות U,V

למה 5.9 נקבע פונקציית גובה על ϕ (לפי מערכת יסודית Π). אז אפשר להגדיר סדר על ϕ כך ש $r\prec s \iff h(r)\leq h(s)$.

הוכחה: נכתוב $\Pi=\{r_1,\ldots,r_l\}\subseteq Y$ (כאן Y מרחב אוקלידי), אז $h\left(\sum_{i=1}^l x_ir_i\right)=$ $\sum_{i=1}^l x_i$.

נבחר בסיס $\{v_2,\dots,v_l\}$ ל $\ker h$ ונשלימו לבסיס של Y $\{v_1,v_2,\dots,v_l\}$ ע"י בחירת $v_1=r_1$. אז מתקיים $h\left(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i v_i\right)=\lambda_1$.
נגדיר

$$Y^+=\left\{0\neq\sum_{i=1}^{l}\lambda_i v_i \mid \text{The first non-zero } \lambda_k \text{ is positive}\right\}$$

זה מגדיר סדר על Y: $y_1\prec y_2 \iff y_2-y_1\in Y^+$. נניח כי $r,s\in\phi$ כך ש $r\prec s$, אז $h(s-r)\in h(Y^+)\geq 0$ ולכן $h(s)\geq h(r)$. ■

מסקנה 5.10 אם $r,s\in\phi$ המקיימים $h(r)<h(s)$ אז $r\prec s$.

נגדיר $U_m=\left\langle\bigcup_{\substack{r\in\phi^+\\ h(r)\geq m}} X_r\right\rangle$, אז $U_m\subseteq U$.

משפט 5.11 1. $U_m\lhd U$

2. U היא תת־חבורה נילפוטנטית, יתר על כן, יש לU את הסדרה המרכזית הבאה:

$$U_1\supseteq U_2\supseteq\cdots\supseteq U_{N_0}\supseteq\{1\}$$

כאשר N_0 הוא הגובה המקסימלי של שורש מϕ^+ (**תזכורת:** סדרה מרכזית היא סדרה כנ"ל המקיימת $U_m\lhd U$ לכל m ו $\left.{}^{U_m}\middle/_{U_{m+1}}\right.\subseteq Z\left(\left.{}^{U}\middle/_{U_{m+1}}\right.\right)$).

3. לכל איבר בU יש ייצוג יחיד בצורה $\prod_{r\in\phi^+}x_r(t_r)$ כאשר סדר הגורמים הוא לפי סדר עולה של השורשים לפי $\prec$.

הוכחה:

1. יהיו $r,s\in\phi^+$ עם $r\neq s$ (ובאופן אוטומטי $r\neq -s$ כי r,s חיוביים). מנוסחת הקומוטטור של Chevalley (משפט 5.7) מתקיים

$$x_r(t)\,x_s(u)\,x_r(t)^{-1}=x_s(u)\prod_{\substack{i,j\geq 1\\ ir+js\in\phi^+}}x_{ir+js}\left(C_{i,j,r,s}t^i u^j\right)$$

נניח כי $s\in\phi^+$ המקיים $h(s)\geq m$. אז

$$h(ir+js)=ih(r)+jh(s)>\underbrace{h(r)}_{>0}+\underbrace{h(s)}_{\geq m}>m$$

ולכן כל הגורמים במכפלה הם בU_m ומאחר ו $h(s)\geq m$, גם $x_s(u)\in U_m$ ולכן ההצמדה בU_m.

2. כמו קודם, נוסחת הקומוטטור מראה כי

$$[U_m,U_n]\subseteq U_{m+n}$$

ל$m=1$ מקבלים

$$\left[\underbrace{U_1}_{=U}, U_n\right] \subseteq U_{n+1}$$

לכן ל$a\in U_n$ ו$b\in U$ מתקיים $[a,b]\in U_{n+1}$ ולכן

$$[aU_{n+1}, bU_{n+1}] = [a,b]\,U_{n+1} = U_{n+1}$$

ולכן aU_{n+1} וbU_{n+1} מתחלפים, כלומר $aU_{n+1}\in Z\left({}^{U}/_{U_{n+1}}\right)$.

בנוסף ברור של$m>N_0$, החבורה U_m טריוואלית ולכן הסדרה המרכזית לכל היותר באורך N_0.

3. איבר של U הוא מכפלה $\prod_{r\in\phi^+} x_r(t_r)$ באיזשהו אופן (כאשר מאפשרים חזרות של השורשים r). נתבונן בשני גורמים עוקבים במכפלה: $x_s(u)\,x_r(t)$. אם $r=s$ אז $x_r(u)\,x_r(t)=x_r(u+t)$. אם $s\prec r$ אז נשתמש בנוסחת הקומוטטור של Chevalley:

$$x_s(u)\,x_r(t) = x_r(t)\,x_s(u)\prod_{\substack{i,j\geq 1\\ ir+js\in\phi^+}} x_{ir+js}\left(C_{i,j,r,s}(-t)^i u^j\right)$$

מתקיים $h(ir+js)=ih(r)+jh(s)\geq h(r)+h(s)>h(r),h(s)$. זה מראה שאפשר לכתוב את המכפלה לפי סדר עולה של השורשים.

יחידות באינדוקציה באופן הבא:

$$u=\prod_{h(r)\geq m} x_r(t_r) = \prod_{h(r)\geq m} x_r(t'_r)$$

(סדר עולה לפי $\prec$ בכל מכפלה)

נוכיח באינדוקציה על m כי $t_r=t'_r$ לכל r. נתחיל ב $m=N_0+1$. לפי ההגדרה, $U_{N_0+1}=\{1_U\}$ ואין מה להוכיח.

נניח נכונות ל$m+1$ ונוכיח לm. נניח כי $r\in\phi^+$ כך ש $h(r)=m$. נתבונן ב ue_{-r}:

$$ue_{-r} = \prod_{h(s)\geq m} x_s(t_s)\,e_{-r}$$

נניח כי $s\in\phi^+$ המקיים $h(s)>m$, ונתבונן ב$x_s(t_s)\,e_{-r}$. אם $s-r$ אינו שורש, אז $x_s(t_s)\,e_{-r}=e_{-r}$. אם $s-r$ הוא שורש, אז $s-r\in\phi^+$ (כי אחרת $s-r\in\phi^-$ ואז $h(s-r)<0$, ולכן $m<h(s)<h(r)=m$ סתירה). במקרה זה

$$x_s(t_s)\,e_{-r} = \sum_{is-r\in\phi^+} M_{s,-r,i}t_s^i e_{is-r} \in e_{-r} + \sum_{s_i\in\phi^+} \mathfrak{g}_{s_i}$$

כל עוד $h(s') > m$ נקבל

$$x_{s'}(t_{s'})\left(e_{-r}+\sum_{s_i\in\phi^+}\mathfrak{g}_{s_i}\right)\in e_{-r}+\sum_{s\in\phi^+}\mathfrak{g}_s$$

נניח כי $h(s)=m$, אז $s-r$ אינו שורש (כי הגובה שלו שווה ל0). במקרה זה, אם $s\neq r$ אז

$$x_s(t_s)\,e_{-r}=e_{-r}$$
$$x_s(t_s)\left(\sum_{s'\in\phi^+}\mathfrak{g}_{s'}\right)=\sum_{s'\in\phi^+}\mathfrak{g}_{s'}$$

אם $s=r$ אז

$$x_r(t_r)\,e_{-r}=e_{-r}+t_rh_r-t_r^2e_r$$

לבסוף מראים ע"י שימוש ב

$$x_r(t)\,h_s=h_s-A_{s,r}te_r$$

כי

$$ue_{-r}=e_{-r}+t_rh_r+x$$

כאשר $x\in\sum_{s'\in\phi^+}\mathfrak{g}_{s'}$. נסיק כי $t_r=t_r'$ לכל $r\in\phi^+$ כך ש $h(r)=m$. נצמצם משני האגפים של

$$\prod_{h(r)\geq m}x_r(t_r)=\prod_{h(r)\geq m}x_r(t_r')$$

את $\prod_{h(r)=m}x_r(t_r)=\prod_{h(r)=m}x_r(t_r')$ ונקבל

$$\prod_{h(r)\geq m+1}x_r(t_r)=\prod_{h(r)\geq m+1}x_r(t_r')$$

מהנחת האינדוקציה, $t_r=t_r'$ לכל r המקיים $h(r)\geq m+1$.

■

נזכר כי $V=\left\langle\bigcup_{r\in\phi^-}X_r\right\rangle$. משפט אנלוגי נכון כמובן גם לV.

6 תת־החבורות $\langle X_r,X_{-r}\rangle$

6.1 הצגות של $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

יהי q טבעי. נסמן ב$R_q[x,y]$ את מרחב כל הפולינומים ב$\mathbb{C}[x,y]$ שהם הומוגניים ממעלה q (זהו מרחב ממימד $q+1$).

נגדיר ל $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ולפולינום $f(x,y)\in R_q[x,y]$,

$$(\Pi_q(g)f)(x,y)=f((x,y)g)=f(\alpha x+\gamma y,\beta x+\delta y)$$

אז $g\mapsto\Pi_q(g)$ מגדיר הומומורפיזם של חבורות $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(R_q[x,y])$. נזנח את הסימון ונסמן במקום $\Pi_q(g)f$ ב־$g\cdot f$.

נשתמש בבסיס $v_i=x^iy^{q-i}$. אז

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot v_i &= x^i(tx+y)^{q-i}\\ &= x^i\sum_{j=0}^{q-i}\binom{q-i}{j}t^jx^jy^{q-i-j}\\ &= \sum_{j=0}^{q-i}\binom{q-i}{j}t^jx^{i+j}y^{q-i-j}\\ &= \sum_{j=0}^{q-i}\binom{q-i}{j}t^jv_{i+j}\end{aligned}$$

בסה"כ $\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot v_i=\sum_{j=0}^{q-i}\binom{q-i}{j}t^jv_{i+j}$ ולכן ביחס לבסיס $\{v_q,v_{q-1},\dots,v_1,v_0\}$, פעולת $\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ על $R_q[x,y]$ מתוארת כמטריצה יוניפוטנטית עליונה.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}v_i &= (x+ty)^iy^{q-i}\\ &= \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}t^jy^jy^{q-i}\\ &= \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}t^jy^{q-i+j}\\ &= \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}t^jv_{i-j}\end{aligned}$$

בסה"כ $\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}v_i=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}t^jv_{i-j}$ ולכן ביחס לבסיס $\{v_0,v_1,\dots,v_{q-1},v_q\}$, פעולת $\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$ על $R_q[x,y]$ מתוארת כמטריצה יוניפוטנטית עליונה.

6.2 ההומומורפיזם מ$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ל$\langle X_r,X_{-r}\rangle$

$(K=\mathbb{C})$

$\mathfrak{g}$ אלגברת לי המתאימה מעל $\mathbb{C}$. נתבונן בשרשראות־r בϕ.

נקח שרשרת כזאת ונניח כי השורש הפותח שלה הוא s ‏(r, s בת"ל):

$$s, r+s, 2r+s, \ldots, qr+s \in \phi$$

(כאן $p=0$)

נסמן $\mathfrak{M}_s^{(r)} = \sum_{i=0}^{q} \mathfrak{g}_{ir+s} \subseteq \mathfrak{g}$.

טענה 6.1 $\mathfrak{M}_s^{(r)}$ אינווריאנטי ל$\langle X_r, X_{-r}\rangle$.

הוכחה: די להראות $x_{\pm r}(t)\left(\mathfrak{M}_s^{(r)}\right) \subseteq \mathfrak{M}_s^{(r)}$, ואכן

$$x_r(t)\, e_{ir+s} = \sum_{j=0}^{q-1} M_{r,ir+s,j} t^j e_{(i+j)r+s} \in \mathfrak{M}_s^{(r)}$$
$$x_{-r}(t)\, e_{ir+s} = \sum_{j=0}^{q-1} M_{-r,ir+s,j} t^j e_{(i-j)r+s} \in \mathfrak{M}_s^{(r)}$$

■

נגדיר $\mathfrak{M}_r^{(r)} = \mathfrak{g}_r + \mathbb{C}h_r + \mathfrak{g}_{-r}$.

טענה 6.2 $\mathfrak{M}_r^{(r)}$ אינווריאנטי ל $\langle X_r, X_{-r}\rangle$.

הוכחה:

$$x_r(t)\, e_r = e_r \in \mathfrak{M}_r^{(r)}$$
$$x_r(t)\, h_r = h_r - 2te_r \in \mathfrak{M}_r^{(r)}$$
$$x_r(t)\, e_{-r} = e_{-r} + th_r - t^2 e_{-r} \in \mathfrak{M}_r^{(r)}$$

נחליף תפקידי r ו$-r$ ונקבל כי $\mathfrak{M}_r^{(r)}$ אינווריאנטי גם ל$x_{-r}(t)$. ■

טענה 6.3 $\langle X_r, X_{-r}\rangle$ פועלת זהותית על $h_r^{\perp}$ ב$\mathfrak{h}$.

הוכחה: נניח כי $h \in h_r^{\perp}$. נכתוב $h = \sum_{s\in\Pi} \alpha_s h_s$. אז

$$0 = (h, h_r) = \sum_{s\in\Pi} \alpha_s (h_s, h_r) = \frac{4}{(r,r)} \sum_{s\in\Pi} \frac{\alpha_s (r,s)}{(s,s)}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\sum_{s\in\Pi} \frac{\alpha_s (r,s)}{(s,s)} = 0$$

כעת

$$\begin{aligned}
x_r(t)\,h &= \sum_{s\in\Pi}\alpha_s x_r(t)\,h_s \\
&= \sum_{s\in\Pi}\alpha_s\left(h_s-\underbrace{A_{s,r}}_{=\frac{2(r,s)}{(s,s)}}te_r\right) \\
&= \sum_{s\in\Pi}\alpha_s h_s - \underbrace{2\sum_{s\in\Pi}\alpha_s\frac{(r,s)}{(s,s)}h_s}_{=0} \\
&= \sum_{s\in\Pi}\alpha_s h_s = h
\end{aligned}$$

■

נסמן ב־Γ_r את אוסף כל השורשים s שהם בלתי תלויים ב־r ופותחים שרשרת־r. אז

$$\mathfrak{g}=h_r^{\perp}\oplus\mathfrak{M}_r^{(r)}\oplus\left(\bigoplus_{s\in\Gamma_r}\mathfrak{M}_s^{(r)}\right)$$

זהו פירוק של $\mathfrak{g}$ לסכום ישר של תת־מרחבים האינווריאנטים לפעולת $\langle X_r,X_{-r}\rangle$ (נובע מטענה 3.19 סעיף 3 ומכך שכל שורש s נמצא בשרשרת־r העוברת דרכו).

למה 6.4 תהי $s,r+s,2r+s,\ldots,qr+s$ שרשרת r שנפתחת ב־s (s, r בת"ל). נסמן $f_i=e_{ir+s}$, $i=0,1,\ldots,q$ (זהו בסיס ל־$\mathfrak{M}_s^{(r)}$). אז

$$x_r(t)\,f_i=\sum_{j=0}^{q-i}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{i+j-1}\binom{i+j}{j}t^jf_{i+j}$$
$$x_{-r}(t)\,f_i=\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_{i-1}\varepsilon_{i-2}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{i-j}\binom{q-i+j}{j}t^jf_{i-j}$$

כאשר $\varepsilon_t=\pm1$ נקבעים לפי $N_{r,tr+s}=\varepsilon_t\,(t+1)$.

הערה 6.5 אם נסתכל בשרשרת r דרך $tr+s$

$$tr+s-t\cdot r,\ldots,tr+s,\ldots,qr+s$$

אז כאן $p=t$ ולכן אכן $N_{r,tr+s}=\pm(p+1)=\pm(t+1)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
x_r(t)\,f_i &= x_r(t)\,e_{ir+s} \\
&= \sum_{j=0}^{q-i}M_{r,ir+s,j}t^je_{(i+j)r+s}
\end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}M_{r,ir+s,j} &= \frac{N_{r,ir+s}\cdot N_{r,(i+1)r+s}\cdot\dots\cdot N_{r,(i+j-1)r+s}}{j!}\\ &= \frac{\varepsilon_i\left(i+1\right)\varepsilon_{i+1}\left(i+2\right)\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1}\left(i+j\right)}{j!}\cdot\frac{i!}{i!}\\ &= \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1}\frac{(i+j)!}{j!\cdot i!}\\ &= \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1}\cdot\binom{i+j}{j}\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}x_r\left(t\right)f_i &= \sum_{j=0}^{q-i}M_{r,ir+s,j}t^je_{(i+j)r+s}\\ &= \sum_{j=0}^{q-i}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1}\cdot\binom{i+j}{j}t^jf_{i+j}\end{aligned}$$

כנדרש.

נעבור להוכיח את הנוסחה השנייה.

$$\begin{aligned}x_{-r}\left(t\right)f_i =& x_{-r}\left(t\right)e_{ir+s}\\ =& \sum_{j=0}^{i}M_{-r,ir+s,j}t^je_{(i-j)r+s}\end{aligned}$$

מתקיים

$$M_{-r,ir+s,j} = \frac{N_{-r,ir+s}\cdot N_{-r,(i-1)r+s}\cdot\dots\cdot N_{-r,(i-(j-1))r+s}}{j!}$$

נשים לב כי

$$\underbrace{-r}_{\in\phi}+\underbrace{(ir+s)}_{\in\phi}+\underbrace{((1-i)\,r-s)}_{\substack{s+(i-1)r\in\phi\\ \implies -(s+(i-1)r)\in\phi}} = 0$$

במקרה כזה ראינו את הזהות

$$\frac{N_{(1-i)r-s,-r}}{\left\|ir+s\right\|^2} = \frac{N_{-r,ir+s}}{\left\|(i-1)\,r+s\right\|^2}$$

ו

$$N_{(1-i)r-s,-r} = -N_{(i-1)r+s,r} = N_{r,(i-1)r+s}$$

לכן

$$\frac{N_{-r,ir+s}}{\|(i-1)\,r+s\|^2}=\frac{N_{r,(i-1)r+s}}{\|ir+s\|^2}$$
$$\Longrightarrow$$
$$N_{-r,ir+s}=\frac{\|(i-1)\,r+s\|^2}{\|ir+s\|^2}\cdot N_{r,(i-1)r+s}$$

לבסוף ראינו (למה 4.2) כי

$$\frac{\|(i-1)\,r+s\|^2}{\|ir+s\|^2}=\frac{P+1}{Q}$$

כאשר P,Q מתאימים לשרשרת־$-r$ דרך $ir+s$, כלומר

$$\underbrace{qr+s}_{-(q-i)(-r)+ir+s}\quad,\ldots,(i+1)\,r+s,ir+s,(i-1)\,r+s\ldots,\quad\underbrace{s}_{ir+s+i(-r)}$$

לכן

$$\frac{\|(i-1)\,r+s\|^2}{\|ir+s\|^2}=\frac{q-i+1}{i}$$

ונקבל

$$\begin{aligned}N_{-r,ir+s}&=\frac{\|(i-1)\,r+s\|^2}{\|ir+s\|^2}\cdot N_{r,(i-1)r+s}\\&=\frac{q-i+1}{i}N_{r,(i-1)r+s}\\&=\frac{q-i+1}{i}\cdot i\cdot\varepsilon_{i-1}\\&=(q-i+1)\,\varepsilon_{i-1}\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}M_{-r,ir+s,j}&=\frac{N_{-r,ir+s}\cdot N_{-r,(i-1)r+s}\cdot\cdots\cdot N_{-r,(i-(j-1))r+s}}{j!}\\&=\frac{(q-i+1)\,(q-i+2)\cdot\cdots\cdot(q-(i-j+1)+1)}{j!}\varepsilon_{i-1}\varepsilon_{i-2}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{i-j}\\&=\binom{q-i+j}{j}\varepsilon_{i-1}\varepsilon_{i-2}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{i-j}\end{aligned}$$

■

למה 6.6 יהיו $v_i=x^iy^{q-i}\in R_q\,[x,y]$, $i=0,1,\ldots,q$. נתונים $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q=\pm1$. נגדיר

$$u_i=\varepsilon_0\varepsilon_1\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{i-1}\binom{q}{i}v_i$$

אז

$$\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} u_i = \sum_{j=0}^{q-i} \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1}\binom{i+j}{j} t^j u_{i+j}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} u_i = \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_{i-1}\varepsilon_{i-2}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i-j}\binom{q-i+j}{j} t^j u_{i-j}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} u_i &= \varepsilon_0\varepsilon_1\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i-1}\binom{q}{i}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} v_i\\ &= \varepsilon_0\varepsilon_1\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i-1}\binom{q}{i}\sum_{j=0}^{q-i}\binom{q-i}{j} t^j v_{i+j}\\ &= \sum_{j=0}^{q-i}\binom{q}{i}\binom{q-i}{j}\binom{q}{i+j} t^j \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1}}{\binom{q}{i+j}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1}} v_{i+j}\\ &= \sum_{j=0}^{q-i}\frac{\binom{q}{i}\binom{q-i}{j}}{\binom{q}{i+j}} t^j \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1} u_{i+j}\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}\frac{\binom{q}{i}\binom{q-i}{j}}{\binom{q}{i+j}} &= \frac{q!}{i!\,(q-i)!}\frac{(q-i)!}{j!\cdot(q-i-j)!}\cdot\frac{(i+j)!\cdot(q-i-j)!}{q!}\\ &= \frac{(i+j)!}{i!\cdot j!} = \binom{i+j}{j}\end{aligned}$$

וקיבלנו

$$\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} u_i = \sum_{j=0}^{q-i}\binom{i+j}{j} t^j \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i+j-1} u_{i+j}$$

כנדרש. באופן דומה מקבלים את הזהות השניה. ■

נשווה עכשיו את פעולת $x_{\pm r}(t)$ על $\mathfrak{M}_r^{(r)} = \mathfrak{g}_r + \mathbb{C}h_r + \mathfrak{g}_{-r}$ עם פעולת $\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$ על $R_2[x,y]$.

$$\begin{cases} x_r(t)\,e_r = e_r\\ x_r(t)\,h_r = h_r - 2te_r\\ x_r(t)\,e_{-r} = e_{-r} + th_r - t^2 e_r\end{cases} \qquad \begin{cases} x_{-r}(t)\,e_r = e_r - th_r - t^2 e_{-r}\\ x_{-r}(t)\,h_r = h_r + 2te_{-r}\\ x_{-r}(t)\,e_{-r} = e_{-r}\end{cases}$$

לכן ביחס לבסיס $\{e_r, h_r, e_{-r}\}$

$$[x_r(t)] = \begin{pmatrix} 1 & -2t & -t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$[x_{-r}(t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ -t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix}$$

למה 6.7 נשתמש בבסיס $\left\{-x^2, 2xy, y^2\right\}$ של $R_2[x,y]$. אז:

$v \backslash g$	$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$
$-x^2$	$-x^2$	$-x^2 - t(2xy) - t^2y^2$
$2xy$	$-2t\left(-x^2\right) + 2xy$	$2xy + 2ty^2$
y^2	$-t^2\left(-x^2\right) + t(2xy) + y^2$	y^2

טבלה 4: פעולת g על איברי הבסיס

הוכחה: חישוב ישיר. למשל

$$(x,y)\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, tx+y)$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y^2 = (tx+y)^2 = t^2x^2 + 2txy + y^2 = -t^2\left(-x^2\right) + t(2xy) + y^2$$

■

משפט 6.8 קיים הומומורפיזם על $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \langle X_r, X_{-r}\rangle$, כך שלכל $t \in \mathbb{C}$,

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_r(t)$$
$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-r}(t)$$

הוכחה: ראינו כי $\mathfrak{g} = h_r^{\perp} \oplus \mathfrak{M}_r^{(r)} \oplus \bigoplus_{s\in\Gamma_r} \mathfrak{M}_s^{(r)}$. ל־$s \in \Gamma_r$ נסמן $q = q_{s,r}$ המתאים לשרשרת $s, s+r, \ldots, s+q_{s,r}\cdot r$.

יהיו V_0 מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ בעל מימד $\dim h_r^{\perp} = \dim \mathfrak{h} - 1$. נגדיר

$$\mathfrak{M} = V_0 \oplus R_2[x,y] \oplus \bigoplus_{s\in\Gamma_r} \left(R_{q_{s,r}}[x,y]\right)$$

זהו מרחב וקטורי מאותו מימד כמו $\mathfrak{g}$.

פעולת $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ב־$\mathfrak{M}$: על כל מחובר $R_q[x,y]$ כמו קודם (כולל $q=2$) וזהותית על V_0.

יהי $T:\mathfrak{M}\to\mathfrak{g}$ איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים שמוגדר כך: $T(V_0)=h_r^{\perp}$ כך ש־$T\restriction_{V_0}$ חד־חד־ערכית.

לכל $s\in\Gamma_r$, $T\left(R_{q_{r,s}}[x,y]\right)=\mathfrak{M}_s^{(r)}$ כך ש־T מעביר את הבסיס $u_0,u_1,\dots,u_{q_{s,r}}$ לבסיס $f_0,f_1,\dots,f_{q_{s,r}}$ ($f_i=e_{ir+s}$), וכן $T(R_2[x,y])=\mathfrak{M}_r^{(r)}$ כך ש־T מעביר את הבסיס $\left\{-x^2,2xy,y^2\right\}$ לבסיס $\{e_r,h_r,e_{-r}\}$. לפי כל מה שעשינו

$$T\left(\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}f\right)=x_r(t)\,T(f)$$
$$T\left(\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}f\right)=x_{-r}(t)\,T(f)$$

לכל $f\in\mathfrak{M}$, ולכל $t\in\mathbb{C}$.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ נוצרת ע"י $\left\{\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\right\}$.

נניח כי

$$\begin{pmatrix}1&t_1\\0&1\end{pmatrix}^{i_1}\begin{pmatrix}1&0\\s_1&1\end{pmatrix}^{j_1}\cdot\dots\cdot\begin{pmatrix}1&t_k\\0&1\end{pmatrix}^{i_k}\begin{pmatrix}1&0\\s_k&1\end{pmatrix}^{j_k}=I_2$$

אז לכל $f\in\mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}T(f)&=T\left(\begin{pmatrix}1&t_1\\0&1\end{pmatrix}^{i_1}\begin{pmatrix}1&0\\s_1&1\end{pmatrix}^{j_1}\cdot\dots\cdot\begin{pmatrix}1&t_k\\0&1\end{pmatrix}^{i_k}\begin{pmatrix}1&0\\s_k&1\end{pmatrix}^{j_k}f\right)\\&=x_r(t_1)\,T\left(\begin{pmatrix}1&t_1\\0&1\end{pmatrix}^{i_1-1}\begin{pmatrix}1&0\\s_1&1\end{pmatrix}^{j_1}\cdot\dots\cdot\begin{pmatrix}1&t_k\\0&1\end{pmatrix}^{i_k}\begin{pmatrix}1&0\\s_k&1\end{pmatrix}^{j_k}f\right)\\&=\dots\\&=x_r(t_1)^{i_1}\,T\left(\begin{pmatrix}1&0\\s_1&1\end{pmatrix}^{j_1}\cdot\dots\cdot\begin{pmatrix}1&t_k\\0&1\end{pmatrix}^{i_k}\begin{pmatrix}1&0\\s_k&1\end{pmatrix}^{j_k}f\right)\\&=\dots\\&=x_r(t_1)^{i_1}x_{-r}(s_1)^{j_1}\cdot\dots\cdot x_r(t_k)^{i_k}x_{-r}(s_k)^{j_k}\,T(f)\end{aligned}$$

ולכן $x_r(t_1)^{i_1}x_{-r}(s_1)^{j_1}\cdot\dots\cdot x_r(t_k)^{i_k}x_{-r}(s_k)^{j_k}=\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. נגדיר

$$\varphi:\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to\langle X_r,X_{-r}\rangle$$

לפי

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1&t_1\\0&1\end{pmatrix}^{i_1}\begin{pmatrix}1&0\\s_1&1\end{pmatrix}^{j_1}\cdot\dots\cdot\begin{pmatrix}1&t_k\\0&1\end{pmatrix}^{i_k}\begin{pmatrix}1&0\\s_k&1\end{pmatrix}^{j_k}\right)=x_r(t_1)^{i_1}x_{-r}(s_1)^{j_1}\cdot\dots\cdot x_r(t_k)^{i_k}x_{-r}(s_k)^{j_k}$$

זאת הגדרה טובה ולכן φ הוא הומומורפיזם על כך ש

$$\varphi\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=x_r(t)$$
$$\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}=x_{-r}(t)$$

לכל $t\in\mathbb{C}$. ■

6.3 ההומומורפיזם מ$\mathrm{SL}_2(K)$ ל$\langle X_r,X_{-r}\rangle$ (מעל K - שדה כלשהו)

משפט 6.9 יהי K שדה כלשהו. תהי G חבורת Chevalley מטיפוס $\mathfrak{g}$ מעל K. יהי $r\in\phi$ ונתבונן בתת־חבורה $\langle X_r,X_{-r}\rangle\subseteq G$. קיים הומומורפיזם על

$$\varphi:\mathrm{SL}_2(K)\to\langle X_r,X_{-r}\rangle$$

כך ש $\varphi\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=x_r(t)$, $\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}=x_{-r}(t)$ לכל $t\in K$.

הוכחה: צריך להראות את פעולת $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ על בסיס שהוא תמונה (ביחס לT^{-1}) של בסיס Chevalley של $\mathfrak{g}$.

T הוגדר באמצעות בסיס B של $\mathfrak{M}$ ובהתאמה בסיס $T(B)$ של $\mathfrak{g}$ כך ש$T(B)$ הוא כמעט בסיס Chevalley:

$$T(B)=\{e_s\mid s\in\phi\}\cup\{h_r\}\cup\{h_i'\}$$

כאשר $\{h_i'\}$ בסיס של $h_r^{\perp}$.

שלב א נניח עכשיו כי $r\in\Pi$. נבחן את המטריצה המייצגת של T לפי בסיס Chevalley. יהי $s\in\Pi$. נכתוב $h_s=\lambda h_r+y$ כאשר $y\in h_r^{\perp}$. אז

$$\frac{4(s,r)}{(s,s)(r,r)}=(h_s,h_r)=(\lambda h_r+y,h_r)=\lambda(h_r,h_r)+\underbrace{(y,h_r)}_{=0}=\lambda\frac{4(r,r)}{(r,r)^2}$$

ולכן $2\lambda=\frac{2(s,r)}{(s,s)}=A_{s,r}\in\mathbb{Z}$. נניח כי $\gamma\in\langle X_r,X_{-r}\rangle$, אז ראינו כי γ פועל זהותית על $h_r^{\perp}$ (טענה 6.3).

$$\begin{aligned}\gamma\cdot h_s&=\lambda\gamma h_r+y=\lambda\gamma h_r+(h_s-\lambda h_r)\\&=h_s+\lambda(\gamma h_r-h_r)\end{aligned}$$

נכתוב $h_s=T(m_s)$ ו $h_r=T(m_r)$ ולכן במונחי T:

$$\gamma T(m_s)=T(m_s)+\lambda(\gamma T(m_r)-T(m_r))$$

נניח כי $\gamma=\varphi\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, אז

$$\begin{aligned}T(g\cdot m_s)&=T(m_s)+T(\lambda(g\cdot m_r-m_r))\\g\cdot m_s&=m_s+\lambda(g\cdot m_r-m_r)\end{aligned}$$

ב־$R_2[x,y]$ לקחנו את הבסיס $\left\{-x^2, 2xy, y^2\right\}$ והתקיים $T(2xy) = h_r$ (למה 6.7) ולכן $m_r = 2xy$. מתקיים

$$\begin{aligned} g \cdot m_r - m_r &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (2xy) - 2xy \\ &= 2(ax+cy)(bx+dy) - 2xy \\ &= 2\left((-ab)\left(-x^2\right) + \left(\underbrace{ad+bc}_{ad-bc+2bc=1+2bc} \right) xy + cdy^2 - xy \right) \\ &= (-2ab)\left(-x^2\right) + (2bc)\, 2xy + (2cd)\, y^2 \end{aligned}$$

לכן

$$\gamma \cdot h_s = h_s + \lambda\left(\gamma \cdot h_r - h_r\right) = h_s + \left(-\underbrace{2\lambda}_{\in\mathbb{Z}} abe_r + \underbrace{2\lambda}_{\in\mathbb{Z}} bch_r + \underbrace{2\lambda}_{\in\mathbb{Z}} cde_{-r} \right)$$

המקדמים הם פולינומים מעל $\mathbb{Z}$ במשתנים a,b,c,d והומוגניים ממעלה 2 (כאיברים ב־$\mathbb{Z}[a,b,c,d]$), וכנ"ל לגבי פעולת g על m_s.

זה גם מראה ש $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_r \oplus \mathfrak{g}_{-r}$ אינוואריאנטי ביחס ל־$\langle X_r, X_{-r} \rangle$, וכתבנו את המטריצה של פעולת γ מצומצם לתת־מרחב זה ביחס לבסיס $\{h_s \mid s \in \Pi\} \cup \{e_r, e_{-r}\}$.

נסמן ל $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ב־$F(g)$ את המטריצה של הפעולה של g ביחס לתמונת בסיס Chevalley:

$$T^{-1}\left(\{h_s \mid s \in \Pi\} \cup \{e_s \mid s \in \phi\}\right)$$

אז

$$F(g) = F_{\mathfrak{h}}(g) \oplus \left(\bigoplus_{s \in \Gamma_r} F_s(g) \right) = \bigoplus_i F_i(g)$$

כאשר $F_{\mathfrak{h}}(g)$ היא המטריצה שמצאנו עכשיו (של פעולת g מצומצמת למרחב

$$T^{-1}\left(h_r^{\perp} \oplus \{e_r, h_r, e_{-r}\}\right)$$

ביחס לבסיס $T^{-1}\left(\{h_s \mid s \in \Pi\} \cup \{e_r, e_{-r}\}\right)$, ו־$F_s$ היא המטריצה של פעולת g במרחב $R_{q_{r,s}}[x,y]$ ביחס ל־$\left\{u_0, \ldots, u_{q_{r,s}}\right\}$ - מטריצה זאת היא מעל החוג $\mathbb{Z}[a,b,c,d]$ והפולינומים הם הומוגניים ממעלה $q_{r,s}$.

עכשיו אפשר להציב במטריצות האלה $a,b,c,d \in K$ לכל $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K)$. מעל $\mathbb{C}$ אנו יודעים כי

$$F_i(gg') = F_i(g) F_i(g')$$

נגדיר $G_i(X,X') = F_i(XX') - F_i(X) F_i(X')$, כאשר X, X' מטריצות 2×2 וחושבים עליהן כעל זוג של 4 משתנים בלתי תלויים אלגברית, אז ל $X, X' \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ כך ש $\det X = \det X' = 1$ מתקיים $G_i(X,X') = 0$.

נניח כי $\det X = t \neq 0$, $\det X' = t' \neq 0$. יהיו $c, c' \in \mathbb{C}$ כך ש $t = c^2$, $t'^2 = c'^2$, אז

$$\det\left(c^{-1}X\right) = \det\left(c'^{-1}X'\right) = 1$$

כיוון שF_i מטריצת פולינומים הומוגניים ממעלה n_i,

$$\begin{aligned} G_i\left(X, X'\right) &= F_i\left(cc'c^{-1}Xc'^{-1}X'\right) - F_i\left(cc^{-1}X\right)F_i\left(c'c'^{-1}X'\right) \\ &= c^{n_i}c'^{n_i}F_i\left(c^{-1}Xc'^{-1}X'\right) - c^{n_i}F_i\left(c^{-1}X\right)c'^{n_i}F_i\left(c^{-1}c'^{-1}X'\right) = 0 \end{aligned}$$

לכן $G_i\left(X, X'\right) = 0$ לכל $X, X' \in \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{C}\right)$. מרציפות, $G_i\left(X, X'\right) = 0$ גם לכל $X, X' \in \mathrm{M}_2\left(\mathbb{C}\right)$ ולכן נסיק כי גם מעל K

$$F_i\left(gg'\right) = F_i\left(g\right)F_i\left(g'\right)$$

לכל $g, g' \in \mathrm{SL}_2\left(K\right)$. מכאן ההעתקה $g \mapsto F\left(g\right)$ היא הומומורפיזם מ$\mathrm{SL}_2\left(K\right)$ אל חבורת מטריצות הפיכות שכל אחת מהן המטריצה המייצגת ביחס לבסיס Chevalley של $\mathfrak{g}$ של אוטומורפיזם $\varphi\left(g\right)$ של $\mathfrak{g}_K$. ברור כי $F\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$ הן המטריצות של $x_r\left(t\right)$ ו$x_{-r}\left(t\right)$ (מעל $\mathbb{C}$ מתקיים ל$\zeta \in \mathbb{C}$ למשל כי $\varphi\begin{pmatrix}1 & \xi\\ & 1\end{pmatrix} = x_r\left(\xi\right)$ ולכן $F\begin{pmatrix}1 & \zeta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ היא המטריצה המייצגת של $x_r\left(\zeta\right)$ לפי בסיס Chevalley והחלפת ζ בt נותנת בדיוק את ההגדרה של המטריצה המייצגת של $x_r\left(t\right)$ לפי בסיס Chevalley) . לכן $g \mapsto \varphi\left(g\right)$ הוא הומומורפיזם מ$\mathrm{SL}_2\left(K\right)$ לתוך G כך ש $\varphi\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = x_r\left(t\right)$, $\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} = x_{-r}\left(t\right)$.

שלב ב אם $r \notin \Pi$, יהי $w \in W$ כך ש $w\left(r\right) = r' \in \Pi$. נחזור ל$K = \mathbb{C}$. יש אוטומורפיזם θ_w של $\mathfrak{g}$ כך ש $\theta_w\left(e_s\right) = e_{w(s)}$ לכל $s \in \phi$ ו $\theta_w\left(h_s\right) = h_{w(s)}$ לכל $s \in \Pi$ (משפט 3.26). נשים לב כי ביחס לבסיס Chevalley, θ_w מטריצה הפיכה עם מקדמים שלמים ודטרמיננטה ± 1: על איברי e_s ($s \in \phi$), θ_w פועלת כתמורה, ואילו על איברי h_s ($s \in \Pi$), θ_w פועלת כמו w, שראינו שלפי הבסיס Π היא פועלת כמטריצה עם מקדמים שלמים ודטרמיננטה ± 1 (הערה 2.12).
מתקיים

$$\begin{aligned} \theta_w x_{\pm r}\left(t\right)\theta_w^{-1} =& \theta_w \exp\left(t\mathrm{ad}_{e_{\pm r}}\right)\theta_w^{-1} \\ =& \exp\left(t\mathrm{ad}_{e_{\pm\theta_w(r)}}\right) = \exp\left(t\mathrm{ad}_{e_{\pm r'}}\right) = x_{\pm r'}\left(t\right) \end{aligned}$$

מאחר וθ_w ביחס לבסיס Chevalley היא מטריצה בעלת מקדמים שלמים ובעלת דטרמיננטה ± 1, ההעתקה θ_w מוגדרת גם מעל K והזהות הנ"ל נכונה גם מעל K ואז הצמדה ע"י θ_w מגדירה איזומורפיזם $\langle X_{r'}, X_{-r'}\rangle \cong \langle X_r, X_{-r}\rangle$. יהי $\varphi' : \mathrm{SL}_2\left(K\right) \to \langle X_r, X_{-r}\rangle$ הומומורפיזם כך ש

$$\varphi'\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = x_{r'}\left(t\right)$$

$$\varphi'\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} = x_{-r'}\left(t\right)$$

נגדיר $\varphi : \mathrm{SL}_2\left(K\right) \to \langle X_r, X_{-r}\rangle$ ע"י הרכבת φ' עם ההצמדה θ_w: $\varphi\left(g\right) = \theta_w^{-1}\varphi'\left(g\right)\theta_w$.
למשל $\varphi\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \theta_w^{-1}x_{r'}\left(t\right)\theta_w = x_r\left(t\right)$. ■

6.4 האיברים $h_r(\lambda)$, n_r

יהי $\phi_r : \mathrm{SL}_2(K) \to \langle x_r, x_{-r} \rangle$ כמו במשפט. נסמן

$$h_r(\lambda) = \phi_r \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$
$$n_r = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

טענה 6.10 1. $h_r(\lambda) h_s = h_s$ לכל $s \in \Pi$ (ולכן גם לכל $s \in \phi$).

2. $h_r(\lambda) e_s = \lambda^{A_{r,s}} \cdot e_s$ (לכל $s \in \phi$).

הוכחה: נוכיח את 2 ועל הדרך גם 1 יצא.

נניח כי $\pm r \neq s \in \phi$. נתבונן בשרשרת־r דרך s. נסמן $\overline{s} = -ir + s$ את האיבר הפותח את השרשרת:

$$\overline{s}, r + \overline{s}, \ldots, qr + \overline{s}$$

כיוון ש $s = ir + \overline{s}$, אפשר לקרוא את פעולת $h_r(\lambda)$ ע"י בחינת פעולת $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ על איבר הבסיס שסומן

$$u_i = \varepsilon_0 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_{i-1} \binom{q}{i} v_i$$
$$v_i = x^i \cdot y^{q-i}$$

לכן $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot v_i = (\lambda x)^i \left(\lambda^{-1} y\right)^{q-i} = \lambda^{2i-q} v_i$ ולכן אותו הדבר גם על u_i:
$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot u_i = \lambda^{2i-q} \cdot u_i$ ולכן

$$h_r(\lambda) \cdot e_s = \lambda^{2i-q} \cdot e_s$$

במונחי s, השרשרת היא:

$$\overline{s} = -ir + s, \ldots, s, \ldots, \underbrace{(q-i) r + s}_{qr + \overline{s}}$$

כאן $p_{r,s} = i$, $q_{r,s} = q - i$. ראינו באופן כללי $A_{r,s} = p_{r,s} - q_{r,s} = 2i - q$ ולכן נקבל $h_r(\lambda) \cdot e_s = \lambda^{2i-q} \cdot e_s$.

נבדוק את הפעולה על $\{e_r, h_r, e_{-r}\}$. בצד של $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$: $\{-x^2, 2xy, y^2\}$:

v	$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot v$
$-x^2$	$-\lambda^2 x^2$
$2xy$	$2xy$
y^2	$\lambda^{-2} y^2$

טבלה 5: הפעולה על איברי הבסיס

ולכן

v	$h_r(\lambda)\cdot v$
e_r	$\lambda^2 e_r = \lambda^{A_{r,r}} e_r$
h_r	h_r
e_{-r}	$\lambda^{-2} e_{-r} = \lambda^{A_{r,-r}} e_{-r}$

טבלה 6: פעולת $h_r(\lambda)$ על איברי הבסיס

כיוון ש $\langle X_r, X_{-r}\rangle$ פועלת כזהות על $h_r^{\perp}$, נקבל כי $h_r(\lambda)\, h_s = h_s$ לכל $s\in\Pi$, ועכשיו ברור כי כל זה נכון גם מעל K. ■

טענה 6.11 1. $n_r\cdot h_s = h_{w_r(s)}$ ל$s\in\Pi$ (ואז זה נכון ל$s\in\phi$).

2. $n_r\cdot e_s = \eta_{r,s} e_{w_r(s)}$ כאשר $\eta_{r,s}=\pm 1$ לכל $s\in\phi$.

הוכחה: בסימוני ההוכחה הקודמת, כאשר $\pm r \neq s \ni \phi$ נמצא את פעולת המטריצה $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ על v_i ועל u_i.

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot v_i = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left(x^i y^{q-i}\right) = (-y)^i\,(x)^{q-i} = (-1)^i\, v_{q-i}$$

לכן

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot u_i &= \varepsilon_0\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{i-1}\binom{q}{i}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} v_i\\ &= (-1)^i\,\varepsilon_0\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{i-1}\binom{q}{i} v_{q-i}\\ &= \underbrace{(-1)^i\,\frac{\varepsilon_0\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_0\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{q-i-1}}\,\frac{\binom{q}{i}}{\binom{q}{q-i}}}_{\eta_{r,s}} v_{q-i}\end{aligned}$$

לכן

$$n_r\cdot e_s = \eta_{r,s}\cdot e_{(q-i)r+\overline{s}} = \eta_{r,s}\cdot e_{(q-2i)r+s}$$

מתקיים

$$w_r(s) = s - \frac{2\,(r,s)}{(r,r)} r = s - A_{r,s} r$$

השרשרת היא

$$-ir+s,\ldots,s,\ldots,(q-i)\,r+s$$

ולכן $p_{r,s}=i$, $q_{r,s}=q-i$, $A_{r,s}=p_{r,s}-q_{r,s}=2i-q$ ולכן $w_r(s)=s-(2i-q)r=(q-2i)r+s$ ולכן $n_r\cdot e_s=\eta_{r,s}\cdot e_{w_r(s)}$ כאשר

$$\eta_{r,s}=(-1)^i\frac{\varepsilon_0\cdot\dots\cdot\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_0\cdot\dots\cdot\varepsilon_{q-i-1}}=(-1)^{p_{r,s}}\frac{\varepsilon_0\cdot\dots\cdot\varepsilon_{p_{r,s}-1}}{\varepsilon_0\cdot\dots\cdot\varepsilon_{q_{r,s}-1}}$$

נתאר את הפעולה על $\{e_r,h_r,e_{-r}\}$, לפי פעולת $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ על $\{-x^2,2xy,y^2\}$:

v	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot v$
$-x^2$	$-y^2$
$2xy$	$-2xy$
y^2	$-\left(-x^2\right)$

טבלה 7: הפעולה על איברי הבסיס

ולכן

v	$n_r\cdot v$
e_r	$-e_{-r}=-e_{w_r(r)}$
h_r	$-h_r=h_{-r}=h_{w_r(r)}$
e_{-r}	$-e_r=-e_{w_r(-r)}$

טבלה 8: פעולת $h_r(\lambda)$ על איברי הבסיס

ולכן $\eta_{r,\pm r}=-1$.

נניח כי $s\in\Pi$. נכתוב $h_s=\lambda h_r+y$. ראינו כי $\lambda=\frac{(s,r)}{(s,s)}=\frac{1}{2}A_{s,r}$.

$$\begin{aligned}n_r\cdot h_s=\lambda n_rh_r+y&=\lambda n_rh_r+h_s-\lambda h_r\\&=h_s+\lambda\left(n_rh_r-h_r\right)\\&=h_s-2\lambda h_r\\&=h_s-A_{s,r}h_r\\&=\frac{2s}{(s,s)}-\frac{2(s,r)}{(s,s)}\frac{2r}{(r,r)}\\&=\frac{2}{(s,s)}\underbrace{\left(s-\frac{2(s,r)}{(r,r)}r\right)}_{w_r(s)}\\&=\frac{2w_r(s)}{(w_r(s),w_r(s))}=h_{w_r(s)}\end{aligned}$$

■

טענה 6.12 1. $\eta_{r,r}=\eta_{r,-r}=-1$

2. $\eta_{r,s}\cdot\eta_{r,w_r(s)}=(-1)^{A_{r,s}}$

3. $\eta_{r,s}\cdot\eta_{r,-s}=1$

הוכחה:

1. ראינו.

2. נניח $r\neq\pm s\in\phi$. נתבונן בשרשרת־r דרך $w_r(s)$, זו אותה שרשרת כמו שרשרת־r דרך s. מתקיים $w_r(s)=s-A_{s,r}r$ ו $A_{r,s}=2i-q$ ולכן

$$\overline{s}=-ir+s=-(q-i)r+w_r(s),\dots,w_r(s),\dots,ir+w_r(s)$$

כאן $p_{r,w_r(s)}=q-i=q_{r,s}$, $q_{r,w_r(s)}=i=p_{r,s}$ ולכן $A_{r,s}$, אז

$$\eta_{r,s}=(-1)^{p_{r,s}}\frac{\varepsilon_0\cdot\dots\cdot\varepsilon_{p_{r,s}-1}}{\varepsilon_0\cdot\dots\cdot\varepsilon_{q_{r,s}-1}}$$
$$\eta_{r,w_r(s)}=(-1)^{q_{r,s}}\frac{\varepsilon_0\cdot\dots\cdot\varepsilon_{q_{r,s}-1}}{\varepsilon_0\cdot\dots\cdot\varepsilon_{p_{r,s}-1}}$$

ולכן $\eta_{r,s}\eta_{r,w_r(s)}=(-1)^{p_{r,s}+q_{r,s}}=(-1)^{p_{r,s}-q_{r,s}}=(-1)^{A_{r,s}}$.

3. נשאר כתרגיל. נזכיר כי $N_{r,jr+\overline{s}}=\underbrace{\varepsilon_j}_{\pm1}(j+1)$, ומתקיים $N_{r,jr+\mathfrak{s}}=\varepsilon_j(j+1)$ ל $\mathfrak{s}=-(q-i)r-s$. ההוכחה מופיעה גם בCarter בעמוד 95.

■

נסמן $n_r(t)=\phi_r\begin{pmatrix}0&t\\-t^{-1}&0\end{pmatrix}$.

טענה 6.13 1. $n_r(1)=n_r$

2. $n_r(-1)=n_r^{-1}$

3. $n_r(t)=x_r(t)\,x_{-r}\left(-t^{-1}\right)x_r(t)$

4. $h_r(t)=n_r(t)\,n_r(-1)$

הוכחה: בודקים את הזהויות ב$\mathrm{SL}_2(K)$ ואז מפעילים את ϕ_r, למשל כדי להוכיח את 3:

$$\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-t^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\-t^{-1}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&t\\-t^{-1}&0\end{pmatrix}$$

ולכן מקבלים את הזהות. ■

7 תת־החבורות H ו־N

7.1 תת־החבורה H

באותם הסימונים, תהי $H \leq G$ תת־חבורה הנוצרת ע"י

$$\{h_r(t) \mid t \in K^*,\, r \in \phi\}$$

ראינו כי $h_r(t) \cdot e_s = t^{A_{r,s}} \cdot e_s$ לכל $r, s \in \phi$, $t \in K^*$.

נקבע $r \in \phi$, $\lambda \in K^*$ ונחשוב על הערך העצמי $\lambda^{A_{r,s}}$ כפונקציה של s.

נגדיר $P = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\phi$. זאת חבורה חילופית חופשית שבסיסה Π. נרחיב את ההעתקה $s \mapsto \lambda^{A_{r,s}}$ מ־ϕ לכל P באופן הבא: נניח כי $\Pi = \{p_1, \ldots, p_l\}$, אז כל $a \in P$ ניתן לכתיבה בצורה הבאה: $a = \sum_{i=1}^{l} x_i p_i$ כאשר $x_i \in \mathbb{Z}$. נסמן

$$\chi_{r,\lambda}(a) = \lambda^{\frac{2(r,a)}{(r,r)}}$$

מתקיים $\frac{2(r,a)}{(r,r)} = \sum_{i=1}^{l} x_i \frac{2(r,p_i)}{(r,r)} = \sum_{i=1}^{l} x_i A_{r,p_i}$ ולכן

$$\chi_{r,\lambda}(a) = \lambda^{\sum_{i=1}^{l} x_i A_{r,p_i}} = \prod_{i=1}^{l} \lambda^{x_i A_{r,p_i}}$$

ברור כי $\chi_{r,\lambda} : P \to K^*$ מקיים $\chi_{r,\lambda}(a+b) = \chi_{r,\lambda}(a)\,\chi_{r,\lambda}(b)$, כלומר $\chi_{r,\lambda}$ כרקטר של P עם ערכים ב־K^*.

נסמן ב־$\hat{P}_K$ את חבורת הכרקטרים $\chi : P \to K^*$ ונגדיר אוטומורפיזם $h(\chi)$ של $\mathfrak{g}_K$ לפי

$$\begin{aligned} h(\chi)\, h_s &= h_s & \forall s \in \Pi \\ h(\chi)\, e_s &= \chi(s)\, e_s & \forall s \in \phi \end{aligned}$$

(קל לבדוק כי $h(\chi)$ הוא אכן אוטומורפיזם של $\mathfrak{g}_K$)

ברור כי $h(\chi_1)\, h(\chi_2) = h(\chi_1 \chi_2)$.

נסמן ב־$\hat{H}$ את חבורת כל האוטומורפיזמים של $\mathfrak{g}_K$ מהצורה $h(\chi)$ כאשר $\chi \in \hat{P}_K$. ברור כי גם ההתאמה $\chi \mapsto h(\chi)$ היא איזומורפיזם $\hat{P}_K \cong \hat{H}$.

$H \subseteq \hat{H}$ היא תת־חבורה. H נוצרת ע"י כל ה־$h(\chi_{r,\lambda})$. בעצם $h(\chi_{r,\lambda}) = h_r(\lambda)$.

נתבונן ב־$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ויהי $Q = \{q_1, \ldots, q_l\}$ הבסיס הדואלי ל־$\{h_{p_1}, \ldots, h_{p_l}\}$, כלומר $(h_{p_i}, q_j) = \delta_{ij}$. אלה הם המשקלים היסודיים (Fundamental weights) של ϕ (של $\mathfrak{h}$, של $\mathfrak{g}$). נכתוב $p_i = \sum_{j=1}^{l} \mu_{ij} q_j$, אז

$$\mu_{ij} = \left(p_i, h_{p_j}\right) = \frac{2(p_i, p_j)}{(p_j, p_j)} = A_{p_j, p_i} \in \mathbb{Z}$$

לכן $P_i = \sum_{j=1}^{l} A_{ji} q_j$. נגדיר $Q = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{q_1, \ldots, q_l\}$. לכן $P \subseteq Q$ תת־חבורה. מטריצת המעבר נתונה ע"י $p_i = \sum_{j=1}^{l} A_{ji} q_i$ (זאת מטריצת Cartan).

תרגיל $[Q:P]=\det\left(A_{ji}\right)$
מחשבים ומקבלים

$\mathfrak{g}$	A_l	B_l	C_l	D_l	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$[Q:P]$	$l+1$	2	2	4	1	1	3	2	1

טבלה 9: האינדקס $[Q:P]$ למערכות שורשים שונות

דוגמא A_3: e_1-e_2, e_2-e_3, e_3-e_4. האינדקס במקרה זה הוא $\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$
(המטריצה הנ"ל היא מטריצת Cartan של A_3).

משפט 7.1 יהי $\chi\in\hat{P}_K$. אז $h\left(\chi\right)\in H$ אם ורק אם χ הוא צמצום לـP של כרקטר של Q.

הוכחה: ראינו כי H נוצרת ע"י כל האיברים מהצורה $h\left(\chi_{r,\lambda}\right)=h_r\left(\lambda\right)$ כאשר $\chi_{r,\lambda}\in\hat{P}_K$ המוגדר ע"י $\chi_{r,\lambda}\left(s\right)=\lambda^{A_{r,s}}$. $\chi_{r,\lambda}$ ניתן להרחבה לכרקטר של Q באופן הבא: נניח כי $a\in Q$, $a=\sum_{i=1}^{l}x_iq_i$, $x_i\in\mathbb{Z}$

$$\frac{2\left(r,a\right)}{\left(r,r\right)}=\left(\frac{2r}{\left(r,r\right)},a\right)=\left(h_r,a\right)=\sum_{i=1}^{l}x_i\left(h_r,q_i\right)$$

אנו יודעים כי אפשר לכתוב $h_r=\sum_{j=1}^{l}y_jh_{p_j}$, $y_j\in\mathbb{Z}$, ולכן

$$\left(h_r,a\right)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}x_iy_j\left(q_i,h_{p_j}\right)=\sum_{i=1}^{l}x_iy_j\in\mathbb{Z}$$

נגדיר $\chi_{\lambda,r}\left(a\right)=\lambda^{\sum_{i=1}^{l}x_iy_i}=\chi^{\frac{2(r,a)}{(r,r)}}=\chi^{\left(h_r,a\right)}$.
בכיוון ההפוך: נניח כי $\chi\in\hat{Q}_K$. נסמן $\chi\left(q_i\right)=\lambda_i$. אז

$$\chi_{p_i,\lambda_i}\left(q_j\right)=\lambda_i^{\left(h_{p_i},q_j\right)}=\lambda_i^{\delta_{ij}}=\begin{cases}\lambda_i & i=j\\ 1 & i\neq j\end{cases}$$

אם $x_i\in\mathbb{Z}$ לכל $1\leq i\leq l$ אז מתקיים

$$\begin{aligned}\chi\left(\sum_{i=1}^{l}x_iq_i\right)&=\prod_{i=1}^{l}\chi\left(q_i\right)^{x_i}=\prod_{i=1}^{l}\lambda_i^{x_i}=\prod_{i=1}^{l}\chi_{p_i,\lambda_i}\left(x_iq_i\right)\\&=\prod_{i=1}^{l}\chi_{p_i,\lambda_i}\left(\sum_{j=1}^{l}x_jq_j\right)\end{aligned}$$

המעבר האחרון נכון כי χ_{p_i,λ_i} מעביר חיבור לכפל, וטריוואלי על q_j לـ$i\neq j$.
לכן $\chi=\prod_{i=1}^{l}\chi_{p_i,\lambda_i}$ וכנ"ל כשנצמצם לـp ואז $h\left(\chi\restriction_P\right)=\prod_{i=1}^{l}h\left(\chi_{p_i,\lambda_i}\right)=\prod_{i=1}^{l}h_{p_i}\left(\lambda_i\right)\in H$. ■

למה 7.2 H מנרמלת את $X_{\pm r}$ לכל $r \in \phi$.

הוכחה: יהי $\chi \in \hat{P}_K$ ונחשב $h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1}$. נפעיל על בסיס Chevalley:

$$s \in \Pi \qquad \begin{aligned} h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} h_s &= h(\chi) x_r(t) h_s \\ &= h(\chi)(h_s - A_{s,r} t e_r) \\ &= h_s - A_{s,r} t \chi(r) e_r \\ &= x_r(\chi(r) t) \end{aligned}$$

$$h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} e_s = \chi(-s) h(\chi) x_r(t) e_s$$

נזכר כי

$$x_r(t) e_s = \begin{cases} e_r & s = r \\ e_{-r} + t h_r - t^2 e_r & s = -r \\ \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i} t^i e_{ir+s} & s \neq \pm r \end{cases}$$

ולכן

$$h(\chi) x_r(t) e_s = \begin{cases} \chi(r) e_r & s = r \\ \chi(-r) e_{-r} + t h_r - \chi(r) t^2 e_r & s = -r \\ \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i} t^i \chi(ir+s) e_{ir+s} & s \neq \pm r \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{aligned} h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} e_s &= \begin{cases} e_r & s = r \\ e_{-r} + t h_r - (\chi(r) t)^2 e_r & s = -r \\ \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i} (t\chi(r))^i e_{ir+s} & s \neq \pm r \end{cases} \\ &= x_r(\chi(r) t) e_s \end{aligned}$$

הראינו $h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r) t) \in X_r$. ■

מסקנה 7.3 H מנרמלת את U ואת V ולכן $UH, VH \subseteq G$ הן תת־חבורות.

למה 7.4 $UH \cap V = \{1\}$

הוכחה: נניח כי $b \in UH \cap V$ ונראה כי b פועל זהותית על בסיס Chevalley. כיוון ש$b \in V$, $b \cdot h_s = h_s + x$ כאשר $x \in \sum_{r \in \phi^-} \mathfrak{g}_r$. כיוון ש $b \in UH$, נקבל כי $x \in \sum_{r \in \phi^+} \mathfrak{g}_r$ ולכן $x = 0$. מכאן, $b \cdot h_s = h_s$.

כיוון ש$b \in V$, $b \cdot e_s = e_s + x$ כאשר $x \in \mathfrak{h} + \sum_{r \prec s} \mathfrak{g}_r$ (משפט 5.11 סעיף 3 ע"י חלוקה למקרים כמו בהוכחה הקודמת). באופן דומה, כיוון ש$b \in UH$, נקבל כי $b \cdot e_s = \alpha e_s + y$ כאשר $y \in \mathfrak{h} + \sum_{r \succ s} \mathfrak{g}_r$, ועכשיו אפשר להסיק $\alpha = 1$, $x = y = 0$ ולכן $b \cdot e_s = e_s$ לכל $s \in \phi$. ■

באותו אופן מוכיחים

למה 7.5 $VH \cap U = \{1\}$

מסקנה 7.6 $UH \cap VH = H$

7.2 תת־החבורה N

סימנו $n_r = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $r \in \phi$.

הגדרה 7.7 נסמן בN את התת־חבורה הנוצרת ע"י H וע"י $\{n_r \mid r \in \phi\}$.

למה 7.8 לכל $r, s \in \phi$ מתקיים

$$n_r x_s\left(t\right) n_r^{-1} = x_{w_r(s)}\left(\eta_{r,s} \cdot t\right)$$

הוכחה: נוכיח מעל $K = \mathbb{C}$. $x_s\left(t\right) = \exp\left(t \cdot \mathrm{ad}_{e_s}\right)$. n_r הוא אוטומורפיזם של $\mathfrak{g}$. ראינו לכן (למה 5.3, טענה 6.11):

$$n_r x_s\left(t\right) n_r^{-1} = \exp\left(t \cdot \mathrm{ad}_{n_r e_s}\right) = \exp\left(t \cdot \mathrm{ad}_{\eta_{r,s} \cdot e_{w_r(s)}}\right) = x_{w_r(s)}\left(\eta_{r,s} \cdot t\right)$$

ואז זה נכון גם מעל K. ■

מסקנה 7.9 $n_r X_s n_r^{-1} = X_{w_r(s)}$ לכל $r, s \in \phi$.

משפט 7.10 יש הומומורפיזם $\varphi : N \to W_\phi$, גרעינו הוא H, כך שלכל $r \in \phi$, $\varphi\left(n_r\right) = w_r$.
בפרט $H \lhd N$ וכן $W \cong {}^N/_H$ כך ש $n_r H \overset{\sim}{\mapsto} w_r$.
יתר על כן, נניח כי $h\left(\chi\right) \in H$, אז לכל $n \in N$, $nh\left(\chi\right) n^{-1} = h\left(\chi^n\right)$, כאשר χ^n הוא הכרקטר כך ש $\chi^n\left(s\right) = \chi\left(w^{-1}\left(s\right)\right)$ לכל $s \in \phi$ כאשר $\varphi\left(n\right) = w$.

הוכחה: איבר כללי בN הוא מהצורה $h_1 n_{r_1} h_2 n_{r_2} \cdot \dots \cdot h_k n_{r_k} h_{k+1}$ כאשר $h_i \in H$ ו $r_i \in \phi$.
נגדיר העתקה $\varphi : N \to W$ לפי

$$\varphi\left(h_1 n_{r_1} \cdot \dots \cdot h_k n_{r_k} h_{k+1}\right) = w_{r_1} \cdot \dots \cdot w_{r_k}$$

ההגדרה טובה: נניח כי

$$h_1 n_{r_1} \cdot \dots \cdot h_k n_{r_k} h_{k+1} = h'_1 n_{r'_1} \cdot \dots \cdot h'_{k'} n_{r'_{k'}} h_{k'+1}$$

נפעיל על e_s ונקבל

$$\underbrace{\alpha\left(h_1, \dots, h_{k+1}; r_1, \dots, r_k\right)}_{\in K^*} e_{w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_k}(s)} = \underbrace{\alpha\left(h'_1, \dots, h'_{k'+1}; r'_1, \dots, r'_{k'}\right)}_{\in K^*} e_{w_{r'_1} w_{r'_2} \dots w_{r'_{k'}}(s)}$$

ולכן $w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_k}\left(s\right) = w_{r'_1} w_{r'_2} \dots w_{r'_{k'}}\left(s\right)$ לכל $s \in \phi$ ולכן $w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_k} = w_{r'_1} w_{r'_2} \dots w_{r'_{k'}}$.
עכשיו ברור כי φ הומומורפיזם על שגרעינו מכיל את H. נראה כי $H \lhd N$. ראינו כי $n_r \cdot h_s = h_{w_r(s)}$ מכאן נסיק כי לכל $n \in N$, $n \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.
יהי $n \in N$, $h\left(\chi\right) \in H$, אז $n^{-1} \cdot h_s \in \mathfrak{h}$. $h\left(\chi\right)$ פועל זהותית על $\mathfrak{h}$ ולכן $h\left(\chi\right)\left(n^{-1} h_s\right) = n^{-1} h_s$ ולכן $nh\left(\chi\right) n^{-1} h_s = h_s$. מכאן $nh\left(\chi\right) n^{-1}$ פועל זהותית על $\mathfrak{h}$. נראה כי $nh\left(\chi\right) n^{-1} e_s = \chi\left(w^{-1}\left(s\right)\right) e_s$ לכל $s \in \phi$, כאשר $\varphi\left(n\right) = w$: מאחר ו

$n_r \cdot e_s = \eta_{r,s} e_{w_r(s)}$, נסיק כי $n^{-1} \cdot e_s = \eta \cdot e_{w^{-1}(s)}$ כאשר $\eta \in K^*$ וכאשר $\varphi(n) = w$. מכאן

$$\begin{aligned} h(\chi)\left(n^{-1} \cdot e_s\right) &= \eta\chi\left(w^{-1}(s)\right) e_{w^{-1}(s)} \\ nh(\chi) n^{-1} \cdot e_s &= \eta\chi\left(w^{-1}(s)\right) \underbrace{n e_{w^{-1}(s)}}_{\eta^{-1} e_s} = \chi\left(w^{-1}(s)\right) e_s = \chi^n(s) e_s \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו $nh(\chi) n^{-1} = h(\chi^n)$.

נקבל הומומורפיזם על $\overline{\varphi} : {}^{N}/_{H \to W}$ ע"י $\overline{\varphi}(Hn) = \varphi(n)$. נראה כי $\overline{\varphi}$ איזומורפיזם.

נזכר בנוסחאות מטענה 6.13. מנוסחאות אלה

$$n_s = x_s(1) x_s(-1) x_s(1) \qquad s \in \phi$$

נצמיד ב-n_r:

$$\begin{aligned} n_r n_s n_r^{-1} &= \left(n_r x_s(1) n_r^{-1}\right)\left(n_r x_s(-1) n_r^{-1}\right)\left(n_r x_s(1) n_r^{-1}\right) \\ &= x_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) x_{-w_r(s)}(-\eta_{r,-s}) x_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) \\ \underbrace{}_{\eta_{r,s} \cdot \eta_{r,-s} = 1} &= n_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) \\ &= h_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) n_{w_r(s)}(-1)^{-1} \\ &= h_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) n_{w_r(s)} \end{aligned}$$

ניקח מודולו H:

$$\begin{aligned} (Hn_r)(Hn_s)\left(Hn_r^{-1}\right) &= n_{w_r(s)} \\ \overline{\varphi}(n_r)\overline{\varphi}(n_s)\overline{\varphi}(n_r)^{-1} &= \overline{\varphi}\left(n_{w_r(s)}\right) \end{aligned}$$

כיוון ש $n_r^2 = h_r(-1) \in H$ (כי $n_r = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $h_r(-1) = \phi_r \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$), אז $\varphi\left(n_r^2\right) = 1$.

הוכחנו (משפט 2.28) כי W נוצרת כחבורה אבסטרקטית ע"י w_r עם היחסים

$$\begin{cases} w_r w_s w_r^{-1} = w_{w_r(s)} \\ w_r^2 = 1 \end{cases}$$

ולכן יש הומומורפיזם $\xi : W \to {}^{N}/_{H}$ כך ש $\xi(w_r) = Hn_r$ לכל $r \in \phi$. מכאן, ξ הוא הפכי של $\overline{\varphi}$ ובפרט $\overline{\varphi}$ איזומורפיזם. ■

מסקנה 7.11 $N \cap \hat{H} = H$

הוכחה: ההכלה $\supseteq$ ברורה. נניח כי $n \in N \cap \hat{H}$. לכל $s \in \phi$, כיוון ש $n = h(\chi) \in \hat{H}$, נקבל $n \cdot \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_s$. כיוון ש $n \in N$, $n \cdot \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_{w(s)}$ כאשר $w = \varphi(n)$. מכאן, $w(s) = s$ לכל $s \in \phi$ ולכן $n \in \ker\varphi = H$. ■

מסקנה 7.12 .1 $U \cap N = \{1\}$

2. $UH \cap N = H$

הוכחה:

1. נניח כי $n \in U \cap N$ ויהי $s \in \phi$. כיוון ש $n \in N$, $n \cdot e_s = \eta e_{w(s)}$ כאשר $w = \varphi(n)$, $\eta \in K^*$. כיוון ש$n \in U$, נקבל $n \cdot e_s = e_s + x$ כאשר $x \in \mathfrak{h} + \sum_{r \succ s} \mathfrak{g}_r$. מכאן $e_s + x = \eta e_{w(s)}$ ולכן $x = 0$, $\eta = 1$ ו$w(s) = s$. לכן $w = \mathrm{id}$.
2. $UH \cap N = (U \cap N) H = H$ והמעבר מתבצע מכך שN מכילה את H (אפילו כתת־חבורה נורמלית).

■

8 פירוק Bruhat

8.1 הלמה של Bruhat

יהי $r \in \Pi$. נגדיר U_r להיות תת־החבורה של U הנוצרת ע"י $\{X_s \mid r \neq s \in \phi^+\}$. מתקיים

$$U_r = \prod_{r \neq s \in \phi^+} X_s$$

(בדומה להוכחה של משפט 5.11 סעיף 3)

למה 8.1 X_r, X_{-r} מנרמלות את U_r.

הוכחה: מנוסחת הקומוטטור של Chevalley, $[U_r, X_r] \subseteq U_r$.
בנוגע ל$[X_{-r}, U_r]$ - השורשים המופיעים בנוסחת הקומוטטור הם $-ir + js$, $x_s(u) \in U_r$, $x_{-r}(t) \in X_{-r}$ ל$i, j \geq 1$. אם זהו שורש, אז הוא חיובי: $r \neq s \in \phi^+$, נרשום $s = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i$ (כאשר $\Pi = \{p_1, \ldots, p_l\}$), אז יש $p_{i_0} \neq r$ עם $\alpha_{i_0} > 0$, ואז המקדם של i_0 ב$-ir + js$ הוא $j\alpha_{i_0} > 0$ ולכן שאר המקדמים ≤ 0, וכמובן $-ir + js \neq r$. נסיק כי $[X_{-r}, U_r] \subseteq U_r$. ■

מסקנה 8.2 $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ חלקית לנורמליזטור של U_r, ובפרט n_r מנרמל את U_r.

מסקנה 8.3 1. $X_r U_r = U_r X_r = U$

2. $U_r X_{-r} = X_{-r} U_r$ תת־חבורה.

הוכחה:

1. $U_r X_r$ היא תת־חבורה של U, אשר מכילה את $\bigcup_{s \in \phi^+} X_s$. קבוצה זאת יוצרת את U ולכן $U_r X_r = U$.
2. כי X_{-r} מנרמלת את U_r.

■

הגדרה 8.4 $B = UH$ זאת תת־חבורת בורל של G (מסקנה 7.3).

טענה 8.5 יהי $r\in\Pi$, אז $B\cup Bn_rB$ היא תת־חבורה.

הוכחה: כיוון ש $n_r^2\in H\subseteq B$ הסגירות ביחס ללקיחת הופכי היא ברורה:

$$\left(Bn_rB\right)^{-1}=Bn_r^{-1}B=Bn_rB$$

סגירות ביחס לכפל נותר לבדוק עבור איברים מהצורה $=(Bn_rB)\cdot\left(\underbrace{Bn_rB}_{Bn_r^{-1}B}\right)$ $B\left(n_rBn_r^{-1}\right)B$. לכן די להראות כי $n_rBn_r^{-1}\subseteq B\cup Bn_rB$.

$$\begin{aligned}n_rBn_r^{-1}=n_rUHn_r^{-1}&=n_rX_rU_rHn_r^{-1}\\&=\left(\underbrace{n_rX_rn_r^{-1}}_{X_{w_r(r)}=X_{-r}}\right)\left(\underbrace{n_rU_rn_r^{-1}}_{U_r}\right)\left(\underbrace{n_rHn_r^{-1}}_{H}\right)\\&=X_{-r}U_rH\subseteq X_{-r}B\end{aligned}$$

לכן די להראות כי $X_{-r}\subseteq B\cup Bn_rB$.
יהי $t\in K$, נתבונן ב$x_{-r}(t)$. אם $t=0$ אז $x_{-r}(t)=\mathrm{id}\in B$.
נניח כי $t\neq0$. נשתמש בזהות $n_r(t)=x_r(t)\,x_{-r}\left(-t^{-1}\right)x_r(t)$ ונקבל

$$x_{-r}(t)=x_r\left(t^{-1}\right)\underbrace{n_r\left(-t^{-1}\right)}_{h_r(-t^{-1})n_r}x_r\left(t^{-1}\right)\in Bn_rB$$

■

משפט 8.6 יהי $r\in\Pi$. יהי $n\in N$ כך ש $\varphi(n)=w$. אז

$$(BnB)\,(Bn_rB)\subseteq BnB\cup Bnn_rB$$

בפירוט: אם $w(r)\in\phi^+$ אז $(BnB)\,(Bn_rB)=Bnn_rB$. אם $w(r)\in\phi^-$ אז $(BnB)\,(Bn_rB)=BnB\cup Bnn_rB$.

הוכחה: נניח כי $w(r)\in\phi^+$.

$$\begin{aligned}BnB\cdot Bn_rB=BnBn_rB&=BnUHn_rB\\&=BnX_rU_rHn_rB\\&=B\left(nX_rn^{-1}\right)nU_rHn_rB\\&=B\left(\underbrace{nX_rn^{-1}}_{X_{w(r)}\subseteq B}\right)nn_r\left(\underbrace{n_r^{-1}U_rn_r}_{U_r}\right)\left(\underbrace{n_r^{-1}Hn_r}_{H}\right)B\\&=Bnn_rB\end{aligned}$$

נניח כי $w(r)\in\phi^-$. נגדיר $w'=w\cdot w_r$. אז $w'(r)=w(-r)=-w(r)\in\phi^+$.
נניח כי $\varphi(n')=w'$, אז $\varphi(n')=\varphi(nn_r)$ $\Longleftarrow$ $\varphi(n'n_r)=\varphi(n)$ $\Longleftarrow$ $n'n_rH=nH$ $\Longleftarrow$ $Bn'n_rB=BnB$ ובנוסף $Bn'B=Bnn_rB$.
מהחלק הראשון, כיוון ש $w'(r)\in\phi^+$, $Bn'B\cdot Bn_rB=Bn'n_rB=BnB$. כעת

$$\begin{aligned}(BnB)(Bn_rB)&=(Bn'n_rB)(Bn_rB)\\&=(Bn'B\cdot Bn_rB)(Bn_rB)\\&=(Bn'B)(Bn_rB\cdot Bn_rB)\end{aligned}$$

מהטענה הקודמת $Bn_rB\cdot Bn_rB\subseteq B\cup Bn_rB$ ולכן

$$\begin{aligned}(BnB)(Bn_rB)&\subseteq(Bn'B)(B\cup Bn_rB)\\&=Bn'B\cup(Bn'B\cdot Bn_rB)\\&=Bnn_rB\cup BnB\end{aligned}$$

זה מראה ש$(BnB)(Bn_rB)\subseteq Bnn_rB\cup BnB$.
נעבור להראות את ההכלה ההפוכה. כיוון ש$nn_r\in BnB\cdot Bn_rB$, נקבל $Bnn_rB\subseteq BnB\cdot Bn_rB$. לכן די להראות כי $BnB\subseteq(BnB)(Bn_rB)$ נשים לב כי

$$\begin{aligned}nx_r(1)n_r&=nn_r\left(n_r^{-1}x_r(1)n_r\right)\\&=nn_rx_{w_r(r)}\left(\underbrace{\eta_{r,-r}}_{-1}\right)\\&=nn_rx_{-r}(-1)\\&=nn_r\underbrace{x_r(-1)}_{\in B}n_rx_r(-1)\in Bnn_rBn_rB\end{aligned}$$

כעת

$$\begin{aligned}Bnn_rBn_rB=(Bnn_rB)(Bn_rB)&=Bn'BBn_rB\\&=Bn'n_rB\\&=BnB\end{aligned}$$

ולכן $BnB=Bnx_r(1)n_rB\supseteq(BnB)(Bn_rB)$, כנדרש. ■

ע"י לקיחת הופכי נקבל:

מסקנה 8.7

$$(Bn_rB)\cdot(BnB)=\begin{cases}Bn_rnB & w^{-1}(r)\in\phi^+\\Bn_rnB\cup BnB & w^{-1}(r)\in\phi^-\end{cases}$$

8.2 זוגות (B,N) ((B,N) **Pairs**)

הגדרה 8.8 תהי G חבורה ותהיינה B,N תת־חבורות. נאמר שחבורות אלה הן זוג (B,N) עבור G אם:

1. G נוצרת ע"י $B\cup N$.
2. $B\cap N\triangleleft N$
3. נסמן $W={}^{N}/_{B\cap N}$. אז W נוצרת ע"י קבוצת איברים $\{w_i\}_{i\in I}$, כולם מסדר 2.
4. נניח כי $w_i=n_i+B\cap N$. אז $(Bn_iB)(BnB)\subseteq Bn_inB\cup BnB$ לכל $n\in N$.
5. $n_iBn_i\neq B$ לכל $i\in I$.

טענה 8.9 כאשר G חבורת Chevalley, אז בסימונים הנ"ל, G היא חבורה עם זוג (B,N).

הוכחה: ראינו כי $B\cap N=H\triangleleft N$ (מסקנה 7.12) ־ זה 2. ראינו כי $W\cong {}^{N}/_{H}={}^{N}/_{B\cap N}$ (משפט 7.10) וראינו כי W נוצרת ע"י $\{w_r\mid r\in\Pi\}$ ־ זה 3.
4 זאת מסקנה 8.7.
5: נניח כי $r\in\Pi$. אז $n_rX_rn_r^{-1}=X_{-r}\not\subseteq B$. כעת

$$n_rBn_r=n_rBn_r^{-1}\supseteq n_rX_rn_r^{-1}=X_{-r}$$

ולכן $n_rBn_r\neq B$.
1: יהי $s\in\phi$. יש $r\in\Pi$ ו $w\in W$ כך ש $s=w(r)$. נניח כי $\varphi(n)=w$ ואז $nX_rn^{-1}=X_s$. מכאן $X_s\subseteq\langle N\cup B\rangle$ לכל שורש $s\in\phi$ $\Longleftarrow$ $G\subseteq\langle N\cup B\rangle\subseteq G$. ∎

טענה 8.10 תהי G חבורה עם זוג (B,N)

1. $G=BNB$
2. תהי $J\subseteq I$ תת־קבוצה. תהי $W_J\subseteq W$ תת־החבורה של W הנוצרת ע"י $\{w_i\}_{i\in J}$. נסמן $N_J=\varphi^{-1}(W_J)$, כאשר $\varphi:N\to {}^{N}/_{B\cap N}=W$ הומומורפיזם המנה. אז $P_J=BN_JB$ היא תת־חבורה.

הוכחה: נתחיל ב2. ברור כי P_J סגורה ביחס ללקיחת הופכי.

סגירות ביחס לכפל נשים לב כי מ4 ל$n'\in N_J$ מתקיים

$$n'BN_JB=n'\bigcup_{n\in\varphi^{-1}(W_J)}BnB\subseteq\bigcup_{n\in\varphi^{-1}(W_J)}Bn'nB\cup BnB=BN_JB$$

נניח כי $j_1,\dots,j_k\in J$. אז

$$\begin{gathered}n_{j_k}BN_JB\subseteq BN_JB\\ n_{j_{k-1}}n_{j_k}BN_JB\subseteq n_{j_{k-1}}BN_JB\subseteq BN_JB\\ \vdots\\ n_{j_1}n_{j_k}BN_JB\subseteq n_{j_1}BN_JB\subseteq BN_JB\end{gathered}$$

(כאשר $\varphi\left(n_{j_i}\right)=w_{j_i}$). מזה נובע $\left(BN_JB\right)\left(BN_JB\right)=BN_JB$.

1 נובע מכך שנקח $J=I$ ואז $N_J=N$ ולכן $BNB\subseteq G$ תת־חבורה. כיוון שהיא מכילה את $B\cup N$, זאת כל G. ■

משפט 8.11 תהי G חבורה בעלת זוג (B,N). אז $BnB=Bn'B$ כאשר $n,n'\in N$ אם ורק אם $\varphi\left(n\right)=\varphi\left(n'\right)$ (כאשר φ הוא ההומומורפיזם על W $\varphi:N\to W$ שגרעינו $B\cap N$).

הוכחה: נניח כי $\varphi\left(n\right)=\varphi\left(n'\right)$, אז $n'\in\left(B\cap N\right)n$ ובפרט נקבל $Bn'B=BnB$.

נעבור להוכחת הכיוון ההפוך. כזכור, W נוצרת ע"י קבוצה של איברים מסדר 2, $\left\{w_i\right\}_{i\in I}$. תהי l פונקציית האורך על W לפי יוצרים אלה. נסמן $w=\varphi\left(n\right)$, $w'=\varphi\left(n'\right)$. נניח כי $BnB=Bn'B$ ונניח כי $l\left(w\right)\leq l\left(w'\right)$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $l\left(w\right)$.

אם $l\left(w\right)=0$, אז $w=1$, כלומר $n\in B\cap N$ ואז $BnB=B$ ולכן $Bn'B=B$ ואז $n'\in B\cap N$, ולכן $w'=1$.

נניח כי $l\left(w\right)\geq1$. נכתוב $w=w_iw''$ כאשר $l\left(w''\right)=l\left(w\right)-1$.

יהיו $n'',n_i\in N$ כך ש $\varphi\left(n''\right)=w''$, $\varphi\left(n_i\right)=w_i$ ואז $\varphi\left(n_in''\right)=\varphi\left(n\right)$ ולכן

$$Bn_in''B=BnB=Bn'B$$

מכאן

$$n_in''B\subseteq Bn'B$$

מאחר ו $n_i^2\in B\cap N$, $n_i^{-1}\in n_i\left(B\cap N\right)\subseteq n_iB$ ואז

$$n''B\subseteq n_iBn'B\subseteq\left(Bn_iB\right)\left(Bn'B\right)$$

מסעיף 4 בהגדרת זוג (B,N), נקבל $Bn''B\subseteq Bn_in'B\cup Bn'B$.

לכן $Bn''B=Bn_in'B$ או $Bn''B=Bn'B$.

במקרה הראשון בו $Bn''B=Bn_in'B$, נקבל $l\left(w''\right)=l\left(w\right)-1\leq l\left(w'\right)-1$. באופן כללי מתקיים $l\left(w'\right)-1\leq l\left(w_iw'\right)$ ולכן במקרה זה $l\left(w''\right)\leq l\left(w_iw'\right)$. מאינדוקציה נקבל $w''=w_iw'$ ולכן $w=w'$.

במקרה השני בו $Bn''B=Bn'B$, נקבל באינדוקציה כי $w''=w'$ אבל אז

$$l\left(w'\right)=l\left(w''\right)=l\left(w\right)-1<l\left(w'\right)$$

סתירה. ■

מסקנה 8.12 הקבוצה ${}_B\backslash{}^G/{}_B$ נמצאת בהתאמה חד־חד־ערכית ועל עם W.

טענה 8.13 בסימונים הקודמים, נניח כי $l\left(w_iw\right)\geq l\left(w\right)$. אז $Bn_iB\cdot BnB=Bn_inB$. ($\varphi\left(n\right)=w$, $\varphi\left(n_i\right)=w_i$)

הוכחה: באינדוקציה על $l\left(w\right)$. אם $l\left(w\right)=0$ אז $w=1$ ואז $n\in B\cap N\subseteq B$ וכן $Bn_inB=Bn_iB$.

נניח כי $l\left(w\right)\geq1$. נכתוב $w=w'\cdot w_j$ כאשר $j\in I$ וכן $l\left(w'\right)=l\left(w\right)-1$. נניח כי $n',n_j\in N$, כך ש $\varphi\left(n'\right)=w'$, $\varphi\left(n_j\right)=w_j$. כמו קודם, $BnB=Bn'n_jB$.

ההוכחה תהיה בדרך השלילה. כזכור, מ4 בהגדרת זוג (B,N), מתקיים

$$Bn_iB\cdot BnB\subseteq Bn_inB\cup BnB$$

נניח בשלילה כי $Bn_iB\cdot BnB$ חותכת את BnB. זה קורה אם ורק אם

$$(n_iBn)\cap(BnB)\neq\emptyset$$

כיוון ש $n=b_1n'n_jb_2$, זה שקול לכך ש

$$(n_iBn'n_j)\cap(BnB)\neq\emptyset$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(n_iBn')\cap(BnBn_j)\neq\emptyset$$

באינדוקציה $Bn_iB\cdot Bn'B=Bn_in'B$, כי

$$l(w')=l(w)-1\leq l(w_iw)-1=l(w_iw'w_j)-1\leq l(w_iw')$$

לכן מתקיימת ההנחה $l(w')\leq l(w_iw')$ ו$l(w')<l(w)$ ולכן

$$n_iBn'\subseteq Bn_in'B$$

מכאן $(Bn_in'B)\cap(BnB\cdot Bn_jB)\neq\emptyset$. מתקיים $BnB\cdot Bn_jB\subseteq Bnn_jB\cup BnB$ מסעיף 4 בהגדרת זוג (B,N) ע"י לקיחת הופכי. לכן

$$(Bn_in'B)\cap(Bnn_jB\cup BnB)\neq\emptyset$$

נסיק כי $Bn_in'B=Bnn_jB$ או $Bn_in'B=BnB$. ממשפט 8.11 נסיק $w_iw'=ww_j$ או $w_iw'=w$. במקרה הראשון $w_iw'=w'\Longleftarrow w_i=1$. סתירה. במקרה השני $w'=w_iw$ ואז

$$l(w)-1=l(w')=l(w_iw)\geq l(w)$$

סתירה. ■

טענה 8.14 נניח כי $l(w_iw)\leq l(w)$. אז $Bn_iB\cdot BnB$ חותך את BnB.

הוכחה: מסעיף 4 בהגדרת זוג (B,N)

$$n_iBn_i\subseteq B\cup Bn_iB$$

מסעיף 5 בהגדרה, $n_iBn_i\neq B$ ולכן $(n_iBn_i)\cap(Bn_iB)\neq\emptyset$. נכפיל ב$n_i$: $(n_iB)\cap(Bn_iBn_i)\neq\emptyset$ ולכן $(n_iBn)\cap(Bn_iBn_in)\neq\emptyset$.

נשים לב כי $l(w_iw)\geq l(w)=l(w_iw_iw)$ ולכן מטענה 8.13, $Bn_iB\cdot Bn_inB=Bn_i^2nB=BnB$. לכן $Bn_iBn_in\subseteq BnB$ ומכאן $(n_iBn)\cap(BnB)\neq\emptyset$. לכן $Bn_iB\cdot BnB$ חותך את BnB. ■

הערה 8.15 אם $l(w_i w) \le l(w)$ אז $Bn_iB \cdot BnB = Bn_inB \cup BnB$: ההכלה $\subseteq$ היא סעיף 4 בהגדרת זוג (B,N). ההכלה $Bn_inB \subseteq Bn_iB \cdot BnB$ תמיד נכונה וההכלה $BnB \subseteq Bn_iB \cdot BnB$ נובעת מהטענה האחרונה.

מסקנה 8.16 לכל $w \in W$, $i \in I$, $l(w_i w) \neq l(w)$.

הוכחה: אחרת שתי הטענות האחרונות נכונות, ונקבל $Bn_iB \cdot BnB = Bn_inB = Bn_inB \cup BnB$. מכאן $BnB \subseteq Bn_inB$ ולכן $BnB = Bn_inB$. ממשפט 8.11 נקבל $w = w_i w$ ואז $w_i = 1$. סתירה. ■

מסקנה 8.17 נניח כי $l(w_i w) < l(w)$, אז $n_i \in B\left(nBn^{-1}\right)B$.

הוכחה: ראינו כי $(n_iBn) \cap (BnB) \neq \emptyset$. מכאן $n_iB \cap BnBn^{-1} \neq \emptyset$ ומכאן $n_i \in B\left(nBn^{-1}\right)B$. ■

8.3 תת־חבורות פרבוליות

תהי $J \subseteq I$ (כאשר $\{w_i\}_{i\in I}$ קבוצת יוצרים של W). תהי $W_J \subseteq W$ תת־החבורה הנוצרת ע"י $\{w_j\}_{j\in J}$. סימנו $N_J = \varphi^{-1}(W_J) \subseteq N$. הגדרנו $P_J = BN_JB$ וראינו שזאת תת־חבורה (טענה 8.10 סעיף 2).

טענה 8.18 יהי $n \in N$ ונסמן $\varphi(n) = w$. נכתוב $w = w_{i_1} \cdot \dots \cdot w_{i_k}$ כאשר $l(w) = k$. יהיו $n_{i_1}, \dots, n_{i_k}$ מקורות תחת φ של $w_{i_1}, \dots, w_{i_k}$, ונסמן $J = \{i_1, \dots, i_k\}$. אז שלוש תת־החבורות הבאות שוות:

$$\left\langle B, nBn^{-1}\right\rangle = \langle B, n\rangle = P_J$$

הוכחה: ההכלה $\left\langle B, nBn^{-1}\right\rangle \subseteq \langle B, n\rangle$ ברורה. ההכלה $\langle B, n\rangle \subseteq P_J$ נכונה כי $n = hn_{i_1} \cdot \dots \cdot n_{i_k}$ כאשר $h \in B \cap N$ ואז $n \in P_J$.

מתקיים $l(w_{i_1} w) = l(w) - 1 < l(w)$ ולכן ממסקנה 8.17,

$$n_{i_1} \in BnBn^{-1}B \subseteq \left\langle B, nBn^{-1}\right\rangle$$

מתקיים $l(w_{i_2}(w_{i_1} w)) < l(w_{i_1} w)$ ולכן מאותה מסקנה $n_{i_2} \in \left\langle B, n_{i_1}nBn^{-1}n_{i_1}^{-1}\right\rangle \subseteq \left\langle B, nBn^{-1}\right\rangle$ וכו'. בסה"כ נקבל כי $n_{i_1}, \dots, n_{i_k} \in \left\langle B, nBn^{-1}\right\rangle$.

כיוון ש־P_J נוצרת ע"י B ו־$\{n_{i_k}, \dots, n_{i_k}\}$ נקבל כי $P_J \subseteq \left\langle B, nBn^{-1}\right\rangle$. ■

משפט 8.19 קבוצת כל התת־חבורות הפרבוליות של G היא בדיוק קבוצת כל התת־חבורות של G אשר מכילות את B.

הוכחה: תהי $R \subseteq G$ תת־חבורה המכילה את B. נכתוב $R = \dot\bigcup_{x\in X_R} BxB$. כמובן, אפשר לקחת את הנציגים מתוך N; נניח $X_R \subseteq N$. לכן R נוצרת ע"י $B \cup X_R$.

$$R = \langle B, X_R\rangle = \left\langle \bigcup_{n\in X_R} \langle B, n\rangle \right\rangle = \left\langle \bigcup_{n\in X_R} P_{J_n} \right\rangle$$

כאשר, כשנכתוב $\varphi(n) = w_{i_1} \cdot \cdots \cdot w_{i_k}$, $k = l(\varphi(n))$, אז $J_n = \{i_1, \ldots, i_k\}$. לכן $R = P_{\bigcup_{n\in X_R} J_n}$, וזאת תת־חבורה פרבולית. ■

משפט 8.20 $P_{J_1} \neq P_{J_2}$ לתת־קבוצות $J_1, J_2 \subseteq I$, אם ורק אם $J_1 \neq J_2$. בנוסף, מתקיים $P_{J_1 \cap J_2} = P_{J_1} \cap P_{J_2}$.

הוכחה: ראשית נראה כי קבוצת היוצרים $\{w_i\}_{i\in I}$ היא מינימלית (אנחנו מניחים, כמובן, כי $i \neq j$ ל־$w_i \neq w_j$).

נניח בשלילה, כי יש $j \in I$ כך ש $w_j \in \langle w_i \mid i \neq j \rangle$. נכתוב $w_j = w_{i_1} \cdot \cdots \cdot w_{i_k}$ ייצוג מינימלי כאשר $i_1, \ldots, i_k \neq j$. נשתמש בטענה 8.18 ל־$\varphi(n_j) = w_j$ וקבוצת היוצרים $\{w_i\}_{j\neq i\in I}$. ראינו ל־$J = \{i_1, \ldots, i_k\}$ כי $P_J = \langle B, n \rangle = \langle B, n_{i_1}, \ldots, n_{i_k} \rangle$ כאשר $\varphi(n_{i_1}) = w_{i_1}, \ldots, \varphi(n_{i_k}) = w_{i_k}$.

לפי אותה טענה, כאשר נסתכל על הייצוג המינימלי של $w_j = w_j$ (הפעם לוקחים בתור היוצרים את כל $\{w_i\}_{i\in I}$), נקבל $P_{\{j\}} = \langle B, n_j \rangle = B \cup Bn_jB$.

נסיק

$$B \cup Bn_jB = \langle B, n_j \rangle = \langle B, n_{i_1}, \ldots, n_{i_k} \rangle \supseteq Bn_{i_1}B, \ldots, Bn_{i_k}B$$

ולכן $Bn_{i_1}B, \ldots, Bn_{i_k}B = Bn_jB$. ממשפט 8.11 נובע כי $w_{i_1} = \cdots = w_{i_k} = w_j$. סתירה.

נניח כי $P_{J_1} = P_{J_2}$, כלומר $BN_{J_1}B = BN_{J_2}B$. מכאן, לכל $n \in N_J$,

$$BnB \subseteq BN_{J_2}B$$

ולכן יש $n' \in N_{J_2}$ כך ש$BnB = Bn'B$ ולכן $\varphi(n) = \varphi(n')$. זה מראה ש$W_{J_1} \subseteq W_{J_2}$ ובפרט $w_j \in W_{J_2}$ לכל $j \in J_1$. ממה שהראנו עכשיו, נסיק כי $J_1 \subseteq J_2$ (כי לא ניתן לייצג את w_j ל־$j \in J_1$ בלי שימוש ביוצר זה). באותו אופן $J_2 \subseteq J_1$ ולכן $J_1 = J_2$.

באופן כללי $P_{J_1} \cap P_{J_2}$ היא תת־חבורה שמכילה את B, ולכן יש $J_3 \subseteq I$ כך ש

$$P_{J_1} \cap P_{J_2} = P_{J_3}$$

ממה שהראנו עכשיו, נובע ש $J_3 \subseteq J_1, J_2$ ולכן $J_3 \subseteq J_1 \cap J_2$. ברור ש $P_{J_1\cap J_2} \subseteq P_{J_1} \cap P_{J_2}$ ולכן $P_{J_1\cap J_2} \subseteq P_{J_3}$. שוב, נסיק כי $J_1 \cap J_2 \subseteq J_3$ ובסה"כ $J_3 = J_1 \cap J_2$. ■

משפט 8.21 תהי $J \subseteq I$. אז $N_G(P_J) = P_J$. כמו כן, לכל $J_1 \neq J_2 \subseteq I$, P_{J_1} אינה צמודה ל־P_{J_2}.

הוכחה: כיוון ש$B \subseteq P_J \subseteq N_G(P_J)$, יש $J' \subseteq I$ כך ש $P_{J'} = N_G(P_J)$. כיוון ש $P_J \subseteq N_G(P_J)$, נקבל ש $P_J \subseteq P_{J'}$ ולכן $J \subseteq J'$. נניח כי $j' \in J'$, אז $n_{j'} \in N_G(P_J)$ ולכן $n_{j'}Bn_{j'}^{-1} \subseteq n_{j'}P_Jn_{j'}^{-1} = P_J$. ראינו כי $\left\langle B, n'_jBn_{j'}^{-1} \right\rangle = \langle B, n_{j'} \rangle$. נסיק כי $n'_j \in P_J$. מכאן נסיק כי $J' \subseteq J$.

נניח כי $P_{J_2} = gP_{J_1}g^{-1}$. נכתוב $g = b_1nb_2$ כאשר $b_1, b_2 \in B$, $n \in N$. כיוון ש $B \subseteq P_{J_2}$ נקבל $P_{J_2} = nP_{J_1}n^{-1} \supseteq nBn^{-1}$. נסיק כי $P_{J_2} \supseteq \left\langle B, nBn^{-1} \right\rangle = \langle B, n \rangle$. לכן $n \in P_{J_2}$ ונקבל $P_{J_1} = P_{J_2}$ (ולכן $J_1 = J_2$). ■

8.4 פירוק לוי של חבורה פרבולית

נחזור לחבורת Chevalley G (ϕ מערכת השורשים המתאימה ל-G, $\Pi \subseteq \phi^+ \subseteq \phi$).

טענה 8.22 תהי $J \subseteq \Pi$, אז החבורה הפרבולית P_J נוצרת ע"י $H \cup \bigcup_{r\in\phi^+\cup\phi_J} X_r$, כאשר ϕ_J היא תת־קבוצה של השורשים שהם צירופים לינאריים של איברי J.

הוכחה: $P_J = BN_JB$ נוצרת ע"י B וע"י $\{n_r \mid r \in J\}$. אנו יודעים כי לכל $r \in \phi$, $n_r \in \langle X_r, X_{-r}\rangle$ (כאשר $n_r = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$), לכן לכל $r \in J$,

$$n_r \in \left\langle H \cup \bigcup_{r'\in\phi^+\cup\phi_J} X_{r'} \right\rangle$$

מכאן $P_J \subseteq \left\langle H \cup \bigcup_{r'\in\phi^+\cup\phi_J} X_{r'} \right\rangle$.

להפך, כמובן $H \subseteq B \subseteq P_J$ ולכל $r \in \phi^+$, $X_r \subseteq B \subseteq P_J$. נניח כי $r \in \phi^- \cap \phi_J$. ראינו כי יש $s \in J$ ו-$w \in W_J$ כך ש-$w(s) = r$ (בגלל ש-$r \in \phi_J$, ראו טענה 2.33). נכתוב $w = w_{r_1} \cdot \dots \cdot w_{r_k}$, כאשר $r_1, \dots, r_k \in J$. ראינו כי (מסקנה 7.9)

$$n_{r_1} \cdot \dots \cdot n_{r_k} X_s n_{r_k}^{-1} \cdot \dots \cdot n_{r_1}^{-1} = X_{w(s)} = X_r$$

כיוון ש-$n_{r_1}, \dots, n_{r_k} \in N_J$, נסיק כי $X_r \subseteq P_J$ לכל $r \in \phi_J$. זה מראה את ההכלה השנייה. ■

תהי $U_J \subseteq P_J$ תת־החבורה הנוצרת ע"י $\bigcup_{r\in\phi^+\setminus\phi_J} X_r$. נשים כי הקבוצה $\phi^+ \setminus \phi_J$ סגורה במובן שאם $r, s \in \phi^+ \setminus \phi_J$ ו-$i, j \geq 1$ כך ש-$ir + js \in \phi^+$ אז $ir + js \in \phi^+ \setminus \phi_J$.

מכאן, ומנוסחת הקומוטטור מקבלים כי $U_J = \prod_{r\in\phi^+\setminus\phi_J} X_r$ (דומה למשפט 5.11 סעיף 3).

נגדיר את L_J להיות תת־החבורה של G הנוצרת ע"י $H \cup \left(\bigcup_{r\in\phi_J} X_r\right)$. ברור כי $L_J, U_J \subseteq P_J$. לפי הטענה הקודמת, $P_J = \langle L_J, U_J\rangle$.

משפט 8.23 (פירוק לוי):

1. $U_J \triangleleft P_J$
2. $P_J = L_J U_J$ - פירוק לוי של P_J
3. $L_J \cap U_J = \{1\}$
4. $P_J = N_G(U_J)$

U_J נקרא הרדיקל היוניפוטנטי של P_J ו-L_J נקרא חלק לוי (Levi part) של P_J.

הערה 8.24 כאשר $J = \emptyset$, אז $P_J = B$, $U_J = U$, $L_J = H$.

הוכחה:

1. נראה כי H וכל X_r כאשר $r \in \phi^+ \cup \phi_J$ מנרמלים את U_J.

H מנרמלת את U_J כי H מנרמלת כל חבורת שורש (למה 7.2).

נניח כי $r \in \phi^+$. נראה כי X_r מנרמלת את U_J. יהי $s \in \phi^+ \setminus \phi_J$ ונתבונן ב

$$x_r(t)\, x_s(u)\, x_r(t)^{-1} = x_s(u) \prod_{\substack{i,j \geq 1 \\ ir+js \in \phi}} x_{ir+js}\left(C_{i,j,r,s} t^i u^j\right) \tag{7}$$

אם $i,j \geq 1$ ו $ir+js \in \phi$ אז $ir+js \in \phi^+ \setminus \phi_J$ (קל לבדוק) ולכן (7) שייך לU_J. מכאן, $x_r(t)\, X_s x_r(t)^{-1} \subseteq U_J$.

נניח כי $r \in \phi_J$. יהי $s \in \phi^+ \setminus \phi_J$. נכתוב $x_r(t)\, x_s(u)\, x_r(t)^{-1}$ כמו קודם. שוב, $ir+sj \in \phi^+ \setminus \phi_J$ (קל לבדוק) ונקבל כי X_r מנרמלת את U_J.

2. נובע מ1 אוטומטית.

3. יהי $m \in L \cap U_J$. נפעיל את m על בסיס Chevalley של $\mathfrak{g}_K$. (בהמשך הכל נובע מנוסחאות הפעולה של $x_r(t)$ על בסיס Chevalley)

נניח כי $s \in \Pi$. כיוון ש$m \in U_J$, $m \cdot h_s = h_s + x$ כאשר $x \in \sum_{r \in \phi^+ \setminus \phi_J} \mathfrak{g}_r$, וכיוון ש$m \in L_J$ נקבל $m \cdot h_s \in \mathfrak{h} + \sum_{r \in \phi_J} \mathfrak{g}_r$. נסיק כי $x = 0$ ולכן $mh_s = h_s$.

יהי $s \in \phi_J$. כיוון ש$m \in U_J$,

$$m \cdot e_s = e_s + x \qquad\qquad x \in \sum_{r \in \phi \setminus \phi_J} \mathfrak{g}_r$$

(תרגיל), וכיוון ש$m \in L_J$, $m \cdot e_s \in \mathfrak{h} + \sum_{r \in \phi_J} \mathfrak{g}_r$. נסיק כי $x = 0$ ו$me_s = e_s$.

יהי $s \in \phi \setminus \phi_J$. כיוון ש$m \in U_J$

$$m \cdot e_s = e_s + x \qquad\qquad x \in \mathfrak{h} + \sum_{r \in s + (\phi \setminus \phi_J)} \mathfrak{g}_r$$

וכיוון ש$m \in L_J$, $m \cdot e_s = \alpha \cdot e_s + x'$ כאשר $x' \in \sum_{r \in s + \phi_J} \mathfrak{g}_r$. נסיק כי $x = 0$ וכי $m \cdot e_s = e_s$.

4. כיוון ש$U_J \triangleleft P_J$, $P_J \triangleleft N_G(U_J)$ ולכן $B \subseteq P_J \triangleleft N_G(U_J)$ תת־חבורה פרבולית, ולכן יש $J' \subseteq \Pi$ כך ש $N_G(U_J) = P_{J'}$. נסיק כי $P_J \subseteq P_{J'}$ ולכן $J \subseteq J'$.

אם $J \subsetneq J'$, יהי $r \in J' \setminus J$ ולכן $n_r U_J n_r^{-1} = U_J$ (כי $n_r \in N_G(U_J)$).

כיוון ש$r \in \phi^+ \setminus \phi_J$, $X_r \subseteq U_J$ ולכן $X_{-r} = X_{w_r(r)} = n_r X_r n_r^{-1} \subseteq U_J$. קיבלנו כי $X_{-r} \subseteq U_J$. סתירה.

■