מבוא לאנליזה הרמונית

אלעד זלינגר

תקציר

רשימות אלו מבוססות על ההרצאות בקורס "מבוא לאנליזה הרמונית" (סימול 0366-3025) שהועבר על ידי פרופסור יפים גלוסקין בסמסטר ב' שנת הלימודים תשע"ה באוניברסיטת תל אביב. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה ברשימות אלה. לתגובות, תיקונים ועוד, אנא פנו לelad88 בgmail.

תוכן עניינים

1 פונקציות על המעגל

אנחנו נזהה בקורס הזה את המעגל

$$\mathbb{T} \quad = \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

עם הקטע $[-\pi, \pi]$ באופן הבא: בהנתן העתקה $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ נוכל להסתכל עליה כהעתקה מ$[-\pi, \pi]$ בתור ההעתקה $t \to f\left(e^{it}\right)$ (ולהפך).

הגדרה 1.1 ביטוי פורמלי מהצורה $\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ נקרא פולינום טריגונומטרי מדרגה N. מסמנים את כל הפולינומים הטריגונומטריים הנ"ל בτ_N.

ביטוי מτ_N ניתן להתאים לפונקציה ע"י הצבה: $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$.
כזכור מתקיימת הזהות

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt \quad = \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

בהנתן פונקציית ההצבה ניתן למצוא את המקדמים לכן:

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t) e^{-int} dt$$

הגדרה 1.2 ביטוי פורמלי מהצורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ נקרא טור טריגונומטרי.

הגדרה 1.3 לפונקציה $f \in L_1[-\pi, \pi]$ מגדירים את מקדמי הפוריה בתור

$$\hat{f}(n) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

מגדירים את הטור פוריה של f בתור הטור הטריגונומטרי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$

טענה 1.4 נניח כי $f, g \in L_1[-\pi, \pi]$ אז

1. $\widehat{f+g}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$
2. $\widehat{\lambda \cdot f}(n) = \lambda \cdot \hat{f}(n)$
3. ל$f_\tau(t) = f(t-\tau)$ מתקיים $\widehat{f_\tau}(n) = \hat{f}(n) \cdot e^{-in\tau}$

הוכחה: נוכיח רק את 3.

$$\begin{aligned}\widehat{f_\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)\,e^{-int}dt\\ \underset{s=t-\tau}{} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,e^{-in(s+\tau)}ds\\ &= e^{-in\tau}\hat{f}(n)\end{aligned}$$

■

משפט 1.5 תהי $f\in C[-\pi,\pi]$, ונניח כי f גזירה ב$a\in[-\pi,\pi]$. אז הטור פוריה של f בa מתכנס ל$f(a)$.

הוכחה: נניח ראשית כי $a=0$ ו$f(a)=0$. נגדיר פונקציית עזר

$$g(t) = \begin{cases}\frac{f(t)}{e^{it}-1} & t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}\\ -if'(0) & t=0\end{cases}$$

אז g רציפה. לפי הלמה של רימן־לבג מתקיים לכן כי

$$\hat{g}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

נשים לב כי:

$$\begin{aligned}f(t) &= g(t)\left(e^{it}-1\right) = g(t)\,e^{it}-g(t)\\ \hat{f}(n) &= \hat{g}(n-1)-\hat{g}(n)\end{aligned}$$

נקבל כי

$$\begin{aligned}\sum_{n=-M}^{N}\hat{f}(n) &= \hat{g}(-M-1)-\hat{g}(-M)+\hat{g}(-M)-\hat{g}(-M+1)+\ldots+\hat{g}(N)\\ &= \hat{g}(-M-1)-\hat{g}(N) \underset{N,M\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

אבל $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ זו בדיוק ההצבה $t=0$ בתור ההרמוני והנחנו $f(0)=0$. לכן קיבלנו את הדרוש.

כעת נגדיר לf כללית $h(t)=f(t+a)-f(a)$. אז $h(0)=0$ וקיים $h'(0)$. מהמקרה הקודם מתקיים

$$\sum_{n=-N}^{M}\hat{h}(n) \underset{N,M\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ומתקיים

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\cdot e^{ina}$$

ל$0\neq n$ ו

$$\begin{aligned}\hat{h}\left(0\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(t+a\right)-f\left(a\right)\right)dt\\ &= \hat{f}\left(0\right)-f\left(a\right)\end{aligned}$$

ולכן נקבל

$$\sum_{n=-N}^{M}\hat{f}\left(n\right)e^{ina}-f\left(a\right) \quad \underset{N,M\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

כלומר הטור פוריה מתכנס ל$f\left(a\right)$ כדרוש. ■

נניח כי $g\in L_2\left[-\pi,\pi\right]$, כלומר $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g\left(t\right)\right|^2dt<\infty$. על $L_2\left[-\pi,\pi\right]$ מוגדרת המכפלה הפנימית

$$\left\langle g,h\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(t\right)\overline{h\left(t\right)}dt$$

ומתקיים אי־שוויון פרסבל

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{g}\left(n\right)\right|^2 \leq \left\|g\right\|_2^2$$

ומכאן מתקיים כי $\hat{g}\left(n\right)\underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow}0$.

משפט 1.6 תהי $f\in L_2\left[-\pi,\pi\right]$ ונניח כי קיים הגבול $\lim_{x\to0}\frac{f(x+a)-L}{x}$ אז מתקיים כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{ina}=L$.

הוכחה: כמו קודם, רק הפעם נגדיר

$$g\left(x\right) = \frac{f\left(x+a\right)-L}{e^{ix}-1}$$

כך שg תהיה רציפה ב0, ונשתמש בכך ש$g\in L_2[-\pi,\pi]$, ולכן $\hat{g}\left(n\right)\underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow}0$. ■

הערה 1.7 ניתן לשפץ את הטיעון למקרה בו $\left|f\left(x+a\right)-L\right|<x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ל$\varepsilon>0$ כלשהו.

טענה 1.8 תהי $f\in L_1\left[-\pi,\pi\right]$ אז לכל n מתקיים $\left|\hat{f}\left(n\right)\right|\leq\left\|f\right\|_1$.

הוכחה:

$$\left\|f\right\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(t\right)\right|dt$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(n)\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}dt\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt \\ &= \|f\|_1\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.9 לכל $f \in L_1[-\pi,\pi]$ מתקיים $\hat{f}(n) \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

הוכחה: תהי f כנ"ל. מתקיים כי $L_1 = \overline{C[-\pi,\pi]}$. לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $g \in C[-\pi,\pi]$ כך ש-$\|f-g\|_1 < \varepsilon$. אז מתקיים

$$\hat{f}(n) = \widehat{f-g}(n) + \hat{g}(n)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(n)\right| &\le \left|\widehat{f-g}(n)\right| + |\hat{g}(n)| \\ &\le \|f-g\|_1 + |\hat{g}(n)| \\ &\le \varepsilon + |\hat{g}(n)| \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\end{aligned}$$

לכן

$$\overline{\lim}_{|n|\to\infty}\left|\hat{f}(n)\right| \le \varepsilon$$

לכל $\varepsilon > 0$ ולכן קיים הגבול $\lim_{|n|\to\infty} f(n) = 0$. ■

מסקנה 1.10 ניתן לשפר את המשפט אודות התכנסות טור פוריה: אם $f \in L_1[-\pi,\pi]$ ומתקיים $\frac{f(x+a)-L}{x} \in L_1[-\pi,\pi]$ אז מתקיים כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\,e^{ina} = L$.

הערה 1.11 מקרה פרטי: אם $f \in L_1[-\pi,\pi]$ ומתקיים $|f(x+a)-L| < |x|^{\varepsilon}$ ל-$\varepsilon > 0$ אז מתקיים כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\,e^{ina} = L$.

מסקנה 1.12 אם $f_1,f_2 \in L_1[-\pi,\pi]$ ו-$f_1 \equiv f_2$ בקטע $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ אז טורי הפוריה שלהם מסכימים בקטע זה (ומתכנסים לפונקציה על קטע זה).

משפט 1.13 נניח כי $f \in L_1(\mathbb{T})$ וכי $\hat{f}(0) = 0$. נגדיר $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$. אז

1. F פונקציה 2π-מחזורית
2. לכל $n \neq 0$ מתקיים כי $\hat{F}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}(n)$

הוכחה: תהי f כנ"ל

1. מתקיים כי

$$F(2\pi+t) = \int_0^{2\pi+t} f(x)\,dx$$

מאחר וf היא 2π מחזורית מתקיים גם כי

$$F(t) = \int_{2\pi}^{2\pi+t} f(x)\,dx$$

מכאן

$$\begin{aligned} F(t+2\pi)-F(t) &= \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\ &= 2\pi\hat{f}(0)=0 \end{aligned}$$

2. מתקיים

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,e^{-int}dt$$

מתקיים כי לכל קבוע $\int_{-\pi}^{\pi} ce^{-int}dt=0$ (ל$n\neq 0$) ולכן נוכל להוסיף לF קבוע מבלי לשנות את ערך האינטגרל:

$$\begin{aligned} \hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t)+\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx\right)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{t} f(x)\,dx\right)e^{-int}dt \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{F}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{t} f(x)\,dx\right)e^{-int}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{\{-\pi\leq x<t\leq\pi\}}(x,t)\,f(x)\,dx\cdot e^{-int}\right)dt \\ \text{Fubini-Tonelli} &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{\{-\pi\leq x<t\leq\pi\}}(x,t)\,f(x)\cdot e^{-int}dt\right)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\int_{x}^{\pi} e^{-int}dt\right)dx \end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned} \int_x^{\pi} e^{-int}dt &= -\frac{1}{in}e^{-int}\mid_{t=x}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{in}\left((-1)^n-e^{-inx}\right) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[e^{-inx}-(-1)^n\right]dx \\ &= \frac{1}{in}\left[\hat{f}(n)-(-1)^n\hat{f}(0)\right]=\frac{\hat{f}(n)}{in}\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.14 אם $f\in C^1(\mathbb{T})$ אז מתקיים $\widehat{f'}(n)=in\hat{f}(n)$ ולכן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\cdot n\right|^2 < \infty$$

ניתן להכליל: אם $f\in C^k(\mathbb{T})$ אז

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\cdot n^k\right|^2 < \infty$$

בפרט $\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$.

נניח כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|<\infty$ אז $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{int}$ מתכנס במידה שווה (מבוחן M של וירשטראס) ולכן $a_n=\hat{f}(n)$ (האינטגרל והסכום מתחלפים כי הסכום מתכנס במידה שווה). באופן דומה, אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\cdot n^k\right|<\infty$ אז $f\in C^k(\mathbb{T})$ (נגדיר פונקציה ע"י הטור הנ"ל, הוא מתכנס במידה שווה, ואז מתקיים כי f שווה לאינטגרל הkי של הטור הנ"ל ולכן גזירה k פעמים)

מסקנה 1.15 $f\in C^\infty(\mathbb{T})$ אם ורק אם $\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ לכל k.

1.1 קונבולוציה

משפט 1.16 יהיו $f,g\in L_1(\mathbb{T})$ אז כמעט בכל מקום מתקיים כי $f(x-y)g(y)\in L_1(dy)$ (כלומר אינטגרבילית לפי y ב$[-\pi,\pi]$), ומתקיים כי

1. $h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)dy\in L_1(dx)$
2. $\|h\|_1\le\|f\|_1\cdot\|g\|_1$
3. $\hat{h}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$

הוכחה: מה הקושיה? למה צריך להראות כי הפונקציה $f(x-y)g(y)$ אינטגרבילית? אם שתי הפונקציות היו רציפות, לא הייתה בעיה. אם שתי הפונקציות היו L_2, אז לא הייתה בעיה, כי יש אי־שוויון קושי שוורץ, אבל באופן כללי מכפלה של שתי פונקציות אינטגרביליות

לא בהכרח אינטגרבילית (למשל $\frac{1}{\sqrt{x}}$ כפול עצמה ב$[0,1]$). נשתמש במשפט Fubini-Tonelli:
ברור כי $f(x-y)\,g(y)$ מדידה כמכפלה של שתי פונקציות מדידות.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)\,g(y)|\,dx\right)dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)|\,dx\,|g(y)|\,dy$$

מאחר וf 2π-מחזורית מתקיים כי

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx = 2\pi\,\|f\|_1$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)\,g(y)|\,dx\right)dy &= \int_{-\pi}^{\pi}\|f\|_1\,|g(y)|\,dy\\ &= (2\pi)^2\,\|f\|_1\,\|g\|_1<\infty\end{aligned}$$

ולכן h אינטגרבילית:

$$\begin{aligned}(2\pi)^2\,\|h\|_1 &= 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|\,dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\,g(y)\,dy\right|dx\\ &\le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)\,g(y)|\,dydx\\ \text{Fubini-Tonelli}\quad &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)\,g(y)|\,dxdy\\ &= (2\pi)^2\,\|f\|_1\,\|g\|_1\end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{aligned}\hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\,g(y)\,dye^{-inx}\right)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\,g(y)\,e^{-inx}dy\right)dx\end{aligned}$$

מתקיים

$$\left|f(x-y)\,g(y)\,e^{-inx}\right| = |f(x-y)\,g(y)|$$

ולכן כמו קודם

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x-y)\,g(y)\,e^{-inx}\right|dydx \le (2\pi)^2\,\|f\|_1\,\|g\|_1$$

לכן שוב אנו עומדים בתנאים של משפט Fubini-Tonelli ולכן נוכל להחליף את סדר האינטגרציה:

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,g(y)\,e^{-inx}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,e^{-iny}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,e^{-in(x-y)}dx\right)dy \\
\underset{x-y=t}{} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,e^{-iny}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,e^{-in(x-y)}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,e^{-iny}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}dt\right)dy \\
&= \hat{g}(n)\cdot 2\pi\cdot\hat{f}(n) = 2\pi\cdot\hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)
\end{aligned}$$

■

הגדרה 1.17 ל-$f,g\in L_1(\mathbb{T})$, הפונקציה

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

נקראת הקונבולוציה של f ו-g ומסמנים $h=f*g$.

טענה 1.18 מתקיימות התכונות הבאות:

1. $f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$
2. $(\lambda f)*g=f*(\lambda g)=\lambda(f*g)$
3. $f*g=g*f$
4. $f*(g*h)=(f*g)*h$

הוכחה: הלינאריות ברורה.
קומוטטיביות:

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,g(y)\,dy \\
\underset{x-y=z}{} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\,g(x-z)\,dz \\
&= (g*f)(x)
\end{aligned}$$

אסוציאטיביות:

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,g(y)\,dy \\
((f*g)*h)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f*g)(t-z)\,h(z)\,dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-z-y)\,g(y)\,dyh(z)\,dz
\end{aligned}$$

נסמן $w=z+y$ כלומר $y=w-z$ ונקבל

$$\begin{aligned}
(2\pi)^2\left((f*g)*h\right)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-z-y)\,g(y)\,dyh(z)\,dz\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-w)\,g(w-z)\,h(z)\,dwdz\\
\text{Fubini-Tonelli} &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-w)\,g(w-z)\,h(z)\,dzdw\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t-w)\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(w-z)\,h(z)\,dz}_{2\pi(g*h)(w)}dw\\
&= (2\pi)^2\left(f*(g*h)\right)(t)
\end{aligned}$$

■

קיבלנו לכן אלגברה על $L_1(\mathbb{T})$. לאלגברה זו אין יחידה.

1.1.1 דומאות לקונבולוציות

הערה 1.19 (דוגמה):

$$\begin{aligned}
g(x) &= e^{inx}\\
(f*g)(x) &= (g*f)(x)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-y)}f(y)\,dy\\
&= e^{inx}\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

הערה 1.20 (דוגמה):

$$g(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\in\tau_N$$

אז

$$g*f = \sum_{n=-N}^{N} a_n\hat{f}(n)\,e^{inx}$$

הערה 1.21 (דוגמה): יהי $\delta>0$. נסמן

$$h = h_\delta=\frac{1}{2\delta}\chi_{[-\delta,\delta]}$$

אז

$$\begin{aligned}(h*f)(x) &= \frac{1}{2\delta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y)\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y)\,dy\end{aligned}$$

ומתקיים כי הערך $\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y)\,dy$ הוא ממוצע סביב הנקודה x.

משפט 1.22 תהי $f\in L_1(\mathbb{T})$

1. אם $\varphi\in C(\mathbb{T})$ אז $f*\varphi\in C(\mathbb{T})$
2. אם $\varphi\in C^1(\mathbb{T})$ אז $f*\varphi\in C^1(\mathbb{T})$ ו-$(f*\varphi)'(x)=(f*\varphi')(x)$

הערה 1.23 אם φ רציפה ו-f אינטגרבילית לבג אז האינטגרל $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-y)f(y)\,dy$ מוגדר לכל x.

הוכחה: תהי f כנ"ל

.1

$$(\varphi*f)(x+\Delta)-(\varphi*f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)\right]f(y)\,dy$$

נשים לב כי מאחר ו-φ רציפה, היא חסומה ע"י $M>0$ ולכן

$$\left|\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)\right| < 2M$$

וממשפטי התכנסות (למשל הנשלטת), מתקיים

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\to0}(\varphi*f)(x+\Delta)-(\varphi*f)(x) &= \lim_{\Delta\to0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)\right]f(y)\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{\Delta\to0}\left[\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)\right]f(y)\,dy\\ &= 0\end{aligned}$$

.2

$$\frac{(\varphi*f)(x+\Delta)-(\varphi*f)(x)}{\Delta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)}{\Delta}\right]f(y)\,dy$$

ממשפט לגרנז' מתקיים כי לכל y קיים $\xi\in[x-y,x-y+\Delta]$ עם $\frac{\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)}{\Delta}=\varphi'(\xi)$. לכן

$$\left|\frac{\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)}{\Delta}\right| \leq \max_{z\in\mathbb{T}}\left|\varphi'(z)\right|$$

ולכן שוב ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\to0}\frac{(\varphi*f)(x+\Delta)-(\varphi*f)(x)}{\Delta} &= =\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)}{\Delta}\right]f(y)\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{\Delta\to0}\left[\frac{\varphi(x+\Delta-y)-\varphi(x-y)}{\Delta}\right]f(y)\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x-y)f(y)\,dy\\ &= (\varphi'*f)(x)\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.24 תהי $\varphi\in C^k(\mathbb{T})$. אז $\varphi*f\in C^k(\mathbb{T})$ לכל $f\in L_1(\pi)$.

1.2 יחידה אפרוקסימטיבית

הגדרה 1.25 סדרה $k_n\in L_1(\mathbb{T})$ נקראת יחידה אפרוקסימטיבית אם:

1. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(t)\,dt=1$
2. $\sup_n\|k_n\|_1<\infty$
3. לכל $\delta>0$ מתקיים

$$\int_{\delta<|t|\le\pi}|k_n(t)|\,dt\quad\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\quad0$$

הערה 1.26 (דוגמה): תהי $\varphi\in L_1[-\pi,\pi]$ חיובית עם $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx=1$. נגדיר $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\chi_{[-\varepsilon\pi,\varepsilon\pi]}(x)$ אז

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_\varepsilon(x)|\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_\varepsilon(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon\pi}^{\varepsilon\pi}\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\\ &\underset{\frac{x}{\varepsilon}=t}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt\\ &= 1\end{aligned}$$

בנוסף מתקיים

$$\begin{aligned}\int_{\delta<|x|\le\pi\varepsilon}|\varphi_\varepsilon(x)|\,dx &= \int_{\delta<|x|\le\pi\varepsilon}\left|\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\frac{dx}{\varepsilon}\\ &= \int_{\frac{\delta}{\varepsilon}<|t|\le\pi}|\varphi(t)|\,dt\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

הערה 1.27 (דוגמה): גרעין Fejer:

$$\begin{aligned}\sigma_N(x) &= \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)e^{ikx}\\ &= \frac{1}{N+1}\left[\frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2\end{aligned}$$

ראינו כי זו יחידה אפרוקסימטיבית בחדו"א 2, נראה בהמשך עוד הוכחה לכך.

משפט 1.28 (אי־שוויון מינקובסקי): תהי $F(x,y)\in L_1(dx\times dy)$. הערך $f(x)=\int_{[-\pi,\pi]}F(x,y)\,dy$ מוגדר כמעט בכל מקום ומתקיים (ל־$1\le p<\infty$)

$$\|f\|_p \le \int_{[-\pi,\pi]}\|F(\cdot,y)\|_p\,dy$$

כאשר

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ \|F(\cdot,y)\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}|F(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

(הפונקציה $\|F(\cdot,y)\|_p$ מדידה לפי משפט Tonelli)

הוכחה: נשתמש באי השוויון הידוע

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}|fg|\,dx \le \|f\|_p\|g\|_q$$

כאשר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\begin{aligned}2\pi\|f\|_p^p &= \int_{[-\pi,\pi]}|f(x)|^p\,dx\\ &= \int_{[-\pi,\pi]}|f(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx\\ &\le \int_{[-\pi,\pi]}|f(x)|^{p-1}\left|\int_{[-\pi,\pi]}F(x,y)\,dy\right|dx\\ &\le \int_{[-\pi,\pi]}\int_{[-\pi,\pi]}|f(x)|^{p-1}|F(x,y)|\,dydx\\ &= \int_{[-\pi,\pi]}\int_{[-\pi,\pi]}|f(x)|^{p-1}|F(x,y)|\,dxdy\\ &\le \int_{[-\pi,\pi]}2\pi\|F(\cdot,y)\|_p\cdot\left\|f(x)^{p-1}\right\|_q dy\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\|f\|_p^p \leq \left\|f(x)^{p-1}\right\|_q \cdot \int_{[-\pi,\pi]} \|F(\cdot,y)\|_p \, dy$$

נחשב

$$\begin{aligned}
\left\|f(x)^{p-1}\right\|_q &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \left(|f(x)|^{p-1}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|^{pq-q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
{\scriptstyle \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1} \quad &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|^{p} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f(x)\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

אז קיבלנו

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &\leq \left\|f(x)^{p-1}\right\|_q \cdot \int_{[-\pi,\pi]} \|F(\cdot,y)\|_p \, dy \\
&= \|f(x)\|_p^{\frac{p}{q}} \int_{[-\pi,\pi]} \|F(\cdot,y)\|_p \, dy \\
\|f\|_p &\leq \int_{[-\pi,\pi]} \|F(\cdot,y)\|_p \, dy
\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.29 אם $f \in L_1(\mathbb{T})$ ו$g \in L_p(\mathbb{T})$ אז $f * g \in L_p(\mathbb{T})$ ו$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= (g*f)(x) \\
& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) f(y) \, dy
\end{aligned}$$

נגדיר $F(x,y) = g(x-y) f(y)$. מתקיים

$$\|F(\cdot,y)\|_p = |f(y)| \cdot \|g\|_p$$

נציב במשפט $F(x,y) = g(x-y) f(y)$ ונקבל

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{-\pi}^{\pi} F(x,y) \, dy\right\|_p &\leq \int_{[-\pi,\pi]} \|F(\cdot,y)\|_p \, dy \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} |f(y)| \cdot \|g\|_p \, dy \\
&= 2\pi \|f\|_1 \|g\|_p
\end{aligned}$$

אבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x-y)f(y)\,dy = f*g = g*f$$

ולכן

$$\begin{aligned}\|f*g\|_p &= \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,y)\,dy\right\|_p \\ &\le \|f\|_1\|g\|_p\end{aligned}$$

ולכן קיבלנו $\|f*g\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p$ ■

מסקנה 1.30 ל$f \in L_1(\mathbb{T})$ נסמן $K_f g = f*g$, אז $K_f \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{T}))$ ומתקיים $\|K_f\| \le \|f\|_1$.

משפט 1.31 נסמן לפונקציה f ולτ ממשי $f_\tau(x) = f(x-\tau)$

1. אם $f \in C(\mathbb{T})$ אז $f_\tau \underset{\tau\to 0}{\rightrightarrows} f$
2. ל$1 \le p < \infty$ אם $f \in L_p(\mathbb{T})$ אז $f_\tau \xrightarrow[\tau\to 0]{(L_p)} f$

הוכחה:

.1

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f\| &= \max_{x\in\mathbb{T}}|f_\tau(x) - f(x)| \\ &= \max_{x\in\mathbb{T}}|f(x-\tau) - f(x)|\end{aligned}$$

נבחר $|\tau| < \delta$

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f\| &\le \sup_{|\tau|<\delta}\max_{x\in\mathbb{T}}|f(x-\tau) - f(x)| \\ &= \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{T}\\ |x-y|<\delta}}|f(x) - f(y)| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0\end{aligned}$$

והגבול האחרון שואף ל0 כי פונקציה רציפה על קטע סגור רציפה בו במידה שווה.

2. יהי $\varepsilon > 0$. $C(\mathbb{T})$ צפוף ב$L_p(\mathbb{T})$ ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $g \in C(\mathbb{T})$ כך ש $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ ואז לכל $\tau > 0$

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f\|_p &= \|(f_\tau - g_\tau) + (g_\tau - g) + (g - f)\|_p \\ &\le \left\|\underbrace{f_\tau - g_\tau}_{(f-g)_\tau}\right\|_p + \|g_\tau - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\le \frac{2}{3}\varepsilon + \|g_\tau - g\|_p\end{aligned}$$

אנו יודעים כי באופן כללי מתקיים לפונקציה רציפה h

$$\begin{aligned}\|h\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|^p\,dx\\ &\le \left(\max_{x\in\mathbb{T}}|h(x)|\right)^p\\ &= \|h\|_{C(\mathbb{T})}^p\end{aligned}$$

ולכן $\|h\|_p \le \|h\|_{C(\mathbb{T})}$.
נבחר $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in [-\pi, \pi]$ עם $|x-y| < \delta$ מתקיים $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$
(ניתן לעשות זאת כי g רציפה ולכן רציפה במידה שווה על קטע סגור)
אז ל$\tau < \delta$ מתקיים כמו קודם

$$\begin{aligned}\|g_\tau - g\|_p &\le \|g_\tau - g\|_{C(\mathbb{T})}\\ &\le \sup_{|\tau|<\delta}\max_{x\in\mathbb{T}}|g(x-\tau) - g(x)|\\ &= \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{T}\\ |x-y|<\delta}}|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f\|_p &\le \frac{2}{3}\varepsilon + \|g_\tau - g\|_p\\ &\le \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.32 הוכחנו כי אם $X = C(\mathbb{T})$ או $X = L_p(\mathbb{T})$ אז הפונקציה $\varphi : \mathbb{R} \to X$ המוגדרת ע"י $\varphi(\tau) = f_\tau$ היא רציפה ולכן ל$I \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית מתקיים כי $\varphi(I)$ קומפקטית.

משפט 1.33 אם $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ יחידה אפרוקסימטיבית אז לכל $f \in L_p(\mathbb{T})$ (או $f \in C(\mathbb{T})$) מתקיים $f \xrightarrow[n\to\infty]{(L_p)} k_n * f$ (או $f \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} k_n * f$)

הוכחה:

$$\begin{aligned}(k_n * f - f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(y)\,f(x-y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(y)\,f(x)\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(y)\,(f(x-y) - f(x))\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(y)\,(f_y(x) - f(x))\,dy\end{aligned}$$

נשתמש באי־שוויון מינקובסקי:

$$\begin{aligned}\left\|k_n * f - f\right\|_p &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|k_n(y)\left(f_y(x) - f(x)\right)\right\|_p dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|k_n(y)\right|\left\|f_y(x) - f(x)\right\|_p dy\end{aligned}$$

ל־$\delta > 0$ נפרק את האינטגרל לשני אינטגרלים:

$$\begin{aligned}\left\|k_n * f - f\right\|_p &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|y|\leq\pi}\left|k_n(y)\right|\left\|f_y(x) - f(x)\right\|_p dy + \\ &\quad \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\leq\delta}\left|k_n(y)\right|\left\|f_y(x) - f(x)\right\|_p dy \\ &\leq 2\left\|f\right\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|y|\leq\pi}\left|k_n(y)\right| dy + M\sup_{|y|\leq\delta}\left\|f_y - f\right\|_p\end{aligned}$$

כאשר M הוא קבוע המתאים ליחידה האפרוקסימטיבית (כלומר $\sup_n \left\|k_n\right\|_1 \leq M$)
יהי $\varepsilon > 0$. מהטענה הקודמת קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|y| \leq \delta$ מתקיים $\left\|f_y - f\right\|_p < \frac{\varepsilon}{2M}$.
בנוסף לכך, מתקיים $\int_{\delta<|y|\leq\pi}\left|k_n(y)\right| dy \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ולכן נוכל למצוא N כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\int_{\delta<|y|\leq\pi}\left|k_n(y)\right| dy < \frac{\varepsilon \cdot 2\pi}{2 \cdot 2\left\|f\right\|_p}$$

ולכן נקבל לכל $n > N$

$$\begin{aligned}\left\|k_n * f - f\right\|_p &\leq 2\left\|f\right\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|y|\leq\pi}\left|k_n(y)\right| dy + M\sup_{|y|<\delta}\left\|f_y - f\right\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

■

הערה 1.34 (תרגיל): לחזור על ההוכחה ל־$C(\mathbb{T})$ במקום $L_p(\mathbb{T})$.

מסקנה 1.35 נגדיר $T_n : L_p \to L_p$ ($T_n : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$) באופן הבא:

$$T_n f = k_n * f$$

זוהי סדרת אופרטורים חסומה: $\left\|T_n\right\| \leq M$ ומתקיים $T_n f \xrightarrow[n\to\infty]{(L_p)} f$ ($T_n f \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$).

הערה 1.36 (תרגיל): תהי $f \in L_p$, יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים מספר סופי של נקודות $t_1, \ldots, t_n \in [-\pi, \pi]$ כך שלכל $t \in [-\pi, \pi]$ קיים $1 \leq j \leq n$ כך ש $\left\|f_t - f_{t_j}\right\|_{L_p} < \varepsilon$
(להשתמש בעובדה של $f \in L_p(\mathbb{T})$ מתקיים כי ההעתקה $\varphi(\tau) = f_\tau$ רציפה)

מסקנה 1.37 (תרגיל): אם $f \in L_1(\mathbb{T})$ ולכל $t \in (a,b)$ מתקיים $f(t) = 0$, אז לכל $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ מתקיים כי אם נסמן $g_s(t) = \frac{f_s(t)}{e^{it}-1}$ אז $0 \underset{s\in[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} \widehat{g_s}(n)$ ומתקיים $0 \underset{t\in[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}$.

הגדרה 1.38 נסמן $f \in A(\mathbb{T})$ אם $f \in C(\mathbb{T})$ כך ש-$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$.

אם $f,g \in A(\mathbb{T})$ אז

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \\ g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) e^{int} \end{aligned}$$

הטורים מתכנסים בהחלט, ניקח מכפלה שלהם (למשל מכפלת קושי):

$$\begin{aligned} (fg)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{g}(n-k) \right) e^{int} \\ \widehat{fg}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{g}(n-k) \end{aligned}$$

זה מזכיר קצת קונבולוציה. נראה בהמשך שזו קונבולוציה מעל חבורת המספרים השלמים.

1.2.1 גרעין Fejer

כזכור גרעין Fejer הוא הפונקציה המוגדרת ע"י

$$(N+1)\sigma_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} (N+1-|k|) e^{ikt}$$

נזכר בזהות הטריגונומטרית

$$\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{it} - 2 + e^{-it}\right)$$

זהו פולינום טריגונומטרי. נסמן

$$h(t) = -4(N+1)\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \sigma_N(t)$$

ונסמן לרגע $f(t) = (N+1)\sigma_N(t)$. מהזהות הקודמת מתקיים

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \hat{f}(n+1)\cdot 1 - \hat{f}(n)\cdot 2 + \hat{f}(n-1)\cdot 1 \\ &= -2\hat{f}(n) + \hat{f}(n-1) + \hat{f}(n+1) \end{aligned}$$

מתקיים כי ל$n \neq 0, \pm(N+1)$, $\hat{h}(n) = 0$ כי $\hat{f}(n)$ היא סדרה כמעט חשבונית ולכן $\hat{f}(n) = \frac{\hat{f}(n-1)+\hat{f}(n+1)}{2}$ לכל n פרט לnים הנ"ל.
מתקיים $\hat{f}(0) = N+1$ ו$\hat{f}(\pm N) = 1$ ולכן

$$\begin{aligned}\hat{h}(n) &= \left(\hat{f}(n+1) - \hat{f}(n)\right) + \left(\hat{f}(n-1) - \hat{f}(n)\right)\\ \hat{h}(0) &= (N-(N+1)) + (N-(N+1)) = -2\\ \hat{h}(\pm(N+1)) &= 0 + (1-0) = 1\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}h(t) &= -2 + e^{i(N+1)t} + e^{-i(N+1)t}\\ &= \left(e^{\frac{i(N+1)t}{2}} - e^{-\frac{i(N+1)t}{2}}\right)^2\\ &= -4\left(\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)t\right)\right)^2\end{aligned}$$

לכן קיבלנו

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2$$

מההגדרה הראשונה של $\sigma_N(t)$ נקבל כי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\sigma_N(t)\,dt = \|\sigma_N\|_1 = 1$$

ומאחר וσ_N חיובית נקבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}|\sigma_N(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\sigma_N(t)\,dt = 1$$

ל$\delta > 0$ מתקיים כי ל$\delta < |t| \leq \pi$

$$\sigma_N(t) \leq \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2}$$

ולכן

$$\int_{\delta\leq|t|<\pi}\sigma_N(t)\,dt \leq \frac{2\pi}{N+1}\cdot\frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

לכן קיבלנו כי σ_N יחידה אפרוקסימטיבית.

מסקנה 1.39 משפט ויירשטראס: $\left\{e^{int}\right\}$ שלמה ב$L_p(\mathbb{T})$ ל$1 \leq p < \infty$ (או ב$C(\mathbb{T})$)

הוכחה: ל$f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$) מתקיים כי $f * \sigma_N \xrightarrow{(L_p)} f$ ($f * \sigma_N \rightrightarrows f$) ומאחר ו$\sigma_N$ פולינום טריגונומטרי, גם $f * \sigma_N$ פולינום טריגונומטרי. ■

מסקנה 1.40 משפט יחידות: תהי $f\in L_1(\mathbb{T})$ ולכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $\hat{f}(n)=0$ אז $f\equiv 0$.

הוכחה: לכל N מתקיים כי $\sigma_N * f = 0$ כי

$$(\sigma_N * f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\,\hat{\sigma_N}(n)\,e^{int}$$

אבל מאחר וσ_N יחידה אפרוקסימטיבית מתקיים כי $f\xrightarrow{(L_1)}\sigma_N * f$ ולכן $f=0$. ■

1.3 שימושים

1.3.1 משוואת חום

משוואת החום היא משוואה מהצורה

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

עם תנאי שפה $U(0,x)=\varphi(x)$. המשוואה מתארת את הטמפרטורה בתוך גליל ככל שעובר הזמן - כלומר הערך $U(t,x)$ מתאר את הטמפרטורה בתוך גליל במרחק x מהשפה בזמן t. במימדים גבוהים ממימד 1 יש להחליף את צד ימין בלפלסיאן של U. אנחנו נניח למען הפשטות כי $c=1$ מאחר וניתן להניח כי אנו ביחידות בהן $c=1$.

משפט 1.41 לכל $\varphi\in C(\mathbb{T})$ קיימת פונקציה יחידה $U(t,x)$ כך ש

1. $U\in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{T})$
2. $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$
3. נסמן $U_t(x)=U(t,x)$ אז $U_t \underset{t\to 0}{\rightrightarrows} \varphi$

הוכחה: יחידות: נניח ראשית כי U כנ"ל קיימת. מאחר ו$U\in C^\infty$ נוכל לכתוב

$$U_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\,e^{inx}$$

מאחר ו$U\in C^\infty$ נוכל לגזור איבר־איבר ולכן

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_t(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\,(in)^2\,e^{inx}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\left(-n^2\right)e^{inx}\end{aligned}$$

כאשר

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(t,x)\,e^{-inx}dx$$

מאחר ו־$U\in C^{\infty}$ ניתן לגזור מתחת לאינטגרל:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c_n\left(t\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(U\left(t,x\right)e^{-inx}\right)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}U\left(t,x\right)\left(e^{-inx}\right)dx\end{aligned}$$

לכן

$$\frac{\partial U}{\partial t}\left(t,x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'\left(t\right)e^{inx}$$

(כי גם $\frac{\partial U}{\partial t}$ היא C^{∞}) ולכן נקבל שוויון

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_t\left(x\right) &= \frac{\partial U}{\partial t}\left(t,x\right)\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(t\right)\left(-n^2\right)e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'\left(t\right)e^{inx}\end{aligned}$$

נקבל לכן שוויון של המקדמים

$$c_n'\left(t\right) = -n^2c_n\left(t\right)$$

הפתרון למשוואה זו הוא

$$c_n\left(t\right) = c_n\left(0\right)\cdot e^{-n^2t}$$

לכן

$$U\left(t,x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(0\right)e^{-n^2t}e^{inx}$$

מאחר ו־U מקיימת $U_t \underset{t\to 0}{\rightrightarrows} \varphi$ אז נקבל כי

$$\begin{aligned}c_n\left(t\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U\left(t,x\right)e^{-inx}dx\\ \lim_{t\to 0}c_n\left(t\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U\left(t,x\right)e^{-inx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{t\to 0}U\left(t,x\right)e^{-inx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(x\right)e^{-inx}dx\\ &= \hat{\varphi}\left(n\right)\end{aligned}$$

ולכן $c_n\left(0\right)=\hat{\varphi}\left(n\right)$. כלומר קיבלנו כי

$$U\left(t,x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}\left(n\right)e^{-n^2t}e^{inx}$$

זה מראה את היחידות.

נראה כעת קיום: נגדיר

$$U\left(t,x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}\left(n\right)e^{-n^{2}t}e^{inx}$$

מתקיים כי $U\left(t,x\right)\in C^{\infty}$ (מהשוואה ל$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^{2}t}e^{inx}$ ושימוש בבוחן M של ויירשטראס)

מתקיים כי U מקיימת את משוואת החום, לפי בנייתה.

נגדיר $g_{t}\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^{2}t}e^{inx}$, $G\left(t,x\right)=g_{t}\left(x\right)$. מתקיים $g_{t}\in C^{\infty}\left(\mathbb{T}\right)$ לכל $t>0$. נראה בהמשך כי g_{t} פונקציה אי־שלילית.

נניח כי $\varphi\in A\left(\mathbb{T}\right)$, כלומר $\varphi\in C\left(\mathbb{T}\right)$ ו$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{\varphi}\left(n\right)\right|<\infty$. מתקיים

$$U_{t}\left(x\right) = \left(\varphi*g_{t}\right)\left(x\right)$$

מאחר ו $g_{t}\geq0$ מתקיים כי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_{t}\left(x\right)\right|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_{t}\left(x\right)dx=\widehat{g_{t}}\left(0\right)=1$$

נסתכל על המשפחה של האופרטורים

$$T_{t}f = g_{t}*f$$

מתקיים כי $T_{t}\in\mathcal{L}\left(C\left(\mathbb{T}\right)\right)$ וכי

$$\left\Vert T_{t}\right\Vert \leq \left\Vert g_{t}\right\Vert _{1}=1$$

(ראינו באופן כללי כי לפונקציה $g\in L_{1}$ מתקיים כי האופרטור $Tf=g*f$ מקיים $\left\Vert T\right\Vert \leq\left\Vert g\right\Vert _{1}$)

מתקיים כי $T_{t}f\underset{t\to0}{\longrightarrow}f$ לכל $f\in A\left(\mathbb{T}\right)$ (כי $f_{t}\left(x\right)=T_{t}f\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^{2}t}\hat{f}\left(n\right)e^{inx}$ במידה שווה בt ולכן ניתן להחליף גבול וסכום ולקבל $\lim_{t\to0}f_{t}\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{inx}=f\left(x\right)$ ומאחר והפונקציה $f_{t}\left(x\right)$ רציפה בשני המשתנים על קבוצה קומפקטית, מתקיים כי ההתכנסות $\lim_{t\to0}f_{t}\left(x\right)=f\left(x\right)$ במ"ש)

מתקיים כי $A\left(\mathbb{T}\right)$ צפוף ב$C\left(\mathbb{T}\right)$ (כי $A\left(\mathbb{T}\right)$ מכיל את כל הפולינומים הטריגונומטריים) ולכן מהלמה הבאה אנחנו נקבל כי לכל $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ מתקיים כי $T_{t}f\underset{t\to0}{\longrightarrow}f$.

למה 1.42 נניח כי X,Y מרחבים נורמיים, $S_{t}\in\mathcal{L}\left(X,Y\right)$ וקיים $M>0$ כך ש $\left\Vert S_{t}\right\Vert \leq M<\infty$ לכל $t>0$. נניח כי $E\subseteq X$ צפופה ו$T\in\mathcal{L}\left(X,Y\right)$ כך שלכל $x\in E$ מתקיים $S_{t}x\underset{t\to0}{\longrightarrow}Tx$, אז לכל $x\in X$ מתקיים כי $S_{t}x\underset{t\to0}{\longrightarrow}Tx$.

הוכחה: יהי $x\in X$ ו$\varepsilon>0$. יהי $y\in E$ כך ש $\left\Vert x-y\right\Vert <\frac{\varepsilon}{10\left(M+\left\Vert T\right\Vert \right)}$. כיוון ש$S_{t}y\underset{t\to0}{\longrightarrow}Ty$,

קיים $\delta>0$ כך שלכל $|t|<\delta$ מתקיים $\|S_t y - Ty\| < \frac{\varepsilon}{10}$. לכל $|t|<\delta$ מתקיים לכן

$$\begin{aligned}
\|S_t x - Tx\| &= \|(S_t - T)\,y + (S_t - T)\,(x-y)\| \\
&\leq \|(S_t - T)\,y\| + \|(S_t - T)\,(x-y)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{10} + \|S_t - T\|\,\|x-y\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{10} + (\|S_t\| + \|T\|)\,\frac{\varepsilon}{10\,(M+\|T\|)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{10} + (M + \|T\|)\,\frac{\varepsilon}{10\,(M+\|T\|)} \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{10} < \varepsilon
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו כי $\overline{\lim}_{t\to 0}\|S_t x - Tx\| < \varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$ ולכן $S_t x \underset{t\to 0}{\longrightarrow} Tx$. ■

כעת נשאר להראות כי $g_t \geq 0$, זה מראה כאמור כי $\|g_t\| = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}|g_t(x)|\,dt = 1$ ואז ניתן להפעיל את הלמה.
מתקיים ל$g \in C(\mathbb{T})$ כי $g \geq 0$ אם ורק אם לכל $f \in C^2(\mathbb{T})$ עם $f \geq 0$ מתקיים $\int_{[-\pi,\pi]} fg dx \geq 0$ (כי אם $g(t_0) < 0$ לt_0 כלשהו אז קיימים $\delta,\varepsilon>0$ כך שלכל $|x-t_0|<\delta$ מתקיים $g(x) \leq -\varepsilon < 0$ ואז במקרה זה ניתן לבנות פונקציה חיובית עם תומך בקטע הנ"ל ואינטגרל על המכפלה שלהן יצא שלילי)
נשים לב כי

$$(g_t * f)(0) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} g_t(x)\,f(-x)\,dx$$

ולכן מספיק להוכיח כי לכל $0 \leq f \in C^2(\mathbb{T})$ ולכל $t>0$ מתקיים $(g_t * f) \geq 0$. נשים לב כי $C^2(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T})$.
נסמן $U(t,x) = (g_t * f)(x)$ - מאחר ו$f \in A(\mathbb{T})$ ראינו כי מתקיים כי U מקיימת את משוואת החום:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}U \\
U(0,x) &= f(x)
\end{aligned}$$

נגדיר $V(t,x) = e^{-t}U(t,x)$. מספיק להראות כי V אי־שלילית.
לכל t,x מתקיים

$$|U(t,x)| \quad \leq \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right| < \infty$$

ולכן מתקיים כי

$$V(t,x) \underset{\substack{t\to\infty \\ x\in\mathbb{T}}}{\rightrightarrows} 0$$

אם $V(t_0,x_0) < 0$ ל$t_0>0$ ו$x_0 \in \mathbb{T}$ אז קיים (t_1,x_1) כך ש$V(t_1,x_1)$ מינימום גלובלי של V ו$0 < t_1 < \infty$. (זאת מאחר וקיים T כך שלכל $t>T$ מתקיים כי $V(t,x)$ קרוב

מאוד לכל x ולכן הפונקציה V מקבלת מינימום על הקבוצה הקומפקטית $[0,T]\times\mathbb{T}$.
המינימום לא יכול להתקבל על $t=0$ כיוון ששם מתקיים $U(0,x)=f(x)$)

$$\begin{aligned} U(t,x) &= V(t,x)e^t \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= e^t V + e^t\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}$$

בנוסף

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}e^t$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}e^t &= e^t V(t,x) + e^t\frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= V + \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}$$

נציב (t_1,x_1) ונקבל $\frac{\partial}{\partial t}V\mid_{(t_1,x_1)}=0$ כי במינימום מתקבל 0 בגרדיאנט. ולכן

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\mid_{(t_1,x_1)} &= V\mid_{(t_1,x_1)} + \frac{\partial V}{\partial t}\mid_{(t_1,x_1)} \\ V(t_1,x_1) &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\mid_{(t_1,x_1)} \end{aligned}$$

מתקיים כי $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\mid_{(t_1,x_1)}\geq 0$ כי (t_1,x_1) נקודת מינימום ולכן נקבל

$$V(t_1,x_1) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\mid_{(t_1,x_1)}\geq 0$$

סתירה. לכן קיבלנו $V\geq 0$ כנדרש. ■

1.3.2 בעיית דיריכלה

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\right\} \\ \overline{\mathbb{D}} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\right\} \end{aligned}$$

בעיית דיריכלה היא הבאה: בהנתן $f\in C(\mathbb{T})$ למצוא $U\in C^2(\mathbb{D})$ המקיימת $\Delta U=0$

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U$$

כך שמתקיים $f= U\mid_{\partial\mathbb{D}} = U\mid_{\mathbb{T}}$ ו־$U\in C^2(\mathbb{D})\cap C\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$.
נחשוב על $\mathbb{C}\supseteq\mathbb{D}$ ונרשום $z=re^{it}$, $\mathbb{D}=\{z \mid |z|<1\}$.

$$V(r,t) = U(r\cos t, r\sin t)$$

מהצבה זו מקבלים משוואה מהסגנון

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}V\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}V=0$$

לא נשתמש בנוסחה זו, במקום זאת נרשום שוב

$$V(r,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(r)e^{int}$$

כאשר שוב המקדמים ניתנים ע"י הנוסחה

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V(r,t)e^{-int}dt$$

לאחר שנציב את הביטוי הנ"ל במשוואה ונשווה את כל המקדמים, נקבל כי כל מקדם מקיים את המשוואה בעצמו, כלומר כל מקדם הוא פונקציה הרמונית.
ביתר פירוט: מתקיים

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}V\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}V=0\\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}V+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}V\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}V=0\end{aligned}$$

לכן

$$\Delta\left(c_n(r)e^{int}\right) = c_n''(r)e^{int}+\frac{1}{r}c_n'(r)e^{int}+\frac{1}{r^2}\left(-n^2\right)c_n(r)e^{int}$$

לאחר השוואת מקדמים של הטור מקבלים כי

$$c_n''(r)e^{int}+\frac{1}{r}c_n'(r)e^{int}+\frac{1}{r^2}\left(-n^2\right)c_n(r)e^{int} = 0$$

ולכן

$$c_n''(r)+\frac{1}{r}c_n'(r)+\frac{1}{r^2}\left(-n^2\right)c_n(r) = 0$$

נשים לב כי $z^n=r^ne^{int}$ ו-$\overline{z^{-n}}=r^{-n}e^{int}$ הן פונקציות הרמוניות (הראשונה היא אנליטית והשנייה היא צמודה של הופכית של אנליטית), ולכן נקבל כי $c_n(r)=r^n,r^{-n}$ פתרונות של המשוואה הנ"ל. מכאן נקבל כי מאחר והמשוואה מסדר 2, כל c_n ניתן לכתיבה כצירוף לינארי של r^n ו-r^{-n}. אבל מאחר ו-$r^{-|n|}$ לא חסומה, נפסול אותה ונקבל כי $c_n(r)=r^{|n|}\cdot c_n$.

משפט 1.43 לכל $f\in C(\mathbb{T})$ קיים פתרון יחיד לבעיית דיריכלה.

הוכחה: יחידות: תהי U הרמונית. מפונקציות מרוכבות אנו יודעים כי

$$U(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U\left(x+re^{it}\right)dt$$

(כי יש V צמודה לU, כלומר $\Delta V=0$ כך ש$U+iV\in\mathcal{A}\left(\mathbb{D}\right)$)
מכאן נובעת היחידות: אם $U_1\mid_{\mathbb{T}}=U_2\mid_{\mathbb{T}}$ נסמן $U=U_1-U_2$ אז U הרמונית כהפרש של פונקציות הרמוניות ולכן מתקיים

$$\max_{x\in\mathbb{D}}\left|U\left(x\right)\right| \quad\leq\quad \max_{x\in\mathbb{T}}\left|U\left(x\right)\right|=0$$

קיום: כפי שראינו אם קיים פתרון לבעיית דיריכלה, הוא מהצורה

$$U\left(re^{it}\right) \quad=\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n r^{|n|}e^{int}$$

בנוסף אם $f\underset{r\to1}{\rightrightarrows}U\left(re^{it}\right)=U_r\left(e^{it}\right)$ אז מתקיים

$$\widehat{U_r}\left(n\right) \quad=\quad c_n\cdot r^{|n|}\underset{r\to1}{\longrightarrow}\hat{f}\left(n\right)$$

כלומר נקבל כי $c_n=\hat{f}\left(n\right)$. לכן ננחש את הפתרון

$$U_r\left(t\right) \quad=\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)r^{|n|}e^{int}$$

צריך להוכיח כי $f\underset{r\to1}{\rightrightarrows}U_r$. נשים לב כי מקדמי פוריה של U_r הם מכפלה של מקדמי f עם מקדמים אחרים, ולכן U_r קונבולוציה: נסמן

$$P_r\left(t\right) \quad=\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{int}$$

אז $U_r\left(t\right)=\left(P_r*f\right)\left(t\right)$.
לפונקציה $P\left(re^{it}\right)=P_r\left(e^{it}\right)$ קוראים גרעין פואסון, ומסתבר כי היא פונקציה הרמונית (כי $r^{|n|}e^{int}$ פונקציה הרמונית לכל n). נמצא נוסחה ל$P_r\left(t\right)$:

$$\begin{aligned}
P_r\left(t\right) &= \sum_{n=-\infty}^{0}r^{-n}e^{int}+\sum_{n=0}^{\infty}r^{n}e^{int}-1\\
&= \frac{1}{1-re^{-it}}+\frac{1}{1-re^{it}}-1\\
&= \frac{1-re^{it}+1-re^{-it}-\left(1-re^{it}\right)\left(1-re^{-it}\right)}{\left(1-re^{it}\right)\left(1-re^{-it}\right)}\\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}
\end{aligned}$$

נבדוק כי P_r יחידה אפרוקסימטיבית, וזה כבר יראה את הדרוש.

.1

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}P_r\left(t\right)dt \quad=\quad \widehat{P_r}\left(0\right)=r^0=1$$

2. מהנוסחה ל-P_r נובע כי $P_r(t) \geq 0$ ולכן

$$\begin{aligned} \|P_r\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |P_r(t)|\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} P_r(t)\,dt = 1 \end{aligned}$$

3. ל-$\delta > 0$ מתקיים כי אם $|t| \geq \delta$ אז $\cos t \leq \cos\delta$ ולכן

$$|P_r(t)| \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} \underset{r\to 1}{\longrightarrow} \frac{1-1}{1-2\cos\delta+1} = 0$$

ולכן

$$\begin{aligned} \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |P_r(t)|\,dt &\leq \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}dt \\ &\leq 2\pi\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\right) \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

■

הערה 1.44 מאחר ו-P_r יחידה אפרוקסימטיבית, נוכל לכאורה למצוא פתרון לבעיית דיריכלה עם $f \in L_p$. אבל למעשה מובטח לנו רק $f \xrightarrow[r\to 1]{(L_p)} P_r * f$ וזה לא מבטיח כי $(P_r * f)(x) \longrightarrow f(x)$ ל-$x \in \mathbb{T}$.

הגדרה 1.45 נקרא ליחידה אפרוקסימטיבית K_n, יחידה אפרוקסימטיבית רגולרית, אם K_n מקיימת את התכונה

$$\sup_{t\geq\delta} |K_n(t)| \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

לכל $\delta > 0$.

משפט 1.46 תהי K_n יחידה אפרוקסימטיבית רגולרית. נניח כי $f \in L_1(\mathbb{T})$ ו-$a \in \mathbb{T}$ נקודת רציפות של f. אז מתקיים

$$(K_n * f)(a) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad f(a)$$

הוכחה: נגדיר פונקציית עזר

$$g(t) = f(a+t) - f(a)$$

לכן מספיק להוכיח את המשפט עבור $a=f\left(a\right)=0$

$$\left|2\pi\left(K_{n}*f\right)\left(a\right)\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}K_{n}\left(t\right)f\left(t\right)dt\right|$$

יהי $\delta>0$ אז

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_{n}\left(t\right)f\left(t\right)dt\right| \leq \left|\int_{\left|t\right|\leq\delta}K_{n}\left(t\right)f\left(t\right)dt\right|+\left|\int_{\left|t\right|>\delta}K_{n}\left(t\right)f\left(t\right)dt\right|$$

קיים $M>0$ כך שמתקיים כי $\left\Vert K_{n}\right\Vert _{1}\leq M$ לכל n. נסמן $\lambda_{n}=\sup_{\left|t\right|\geq\delta}\left|K_{n}\left(t\right)\right|$. נשתמש באי־שוויון

$$\left|\int_{D}\varphi\psi dt\right| \leq \sup_{t\in D}\left|\varphi\left(t\right)\right|\int_{D}\left|\psi\right|dt$$

אז

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\left|t\right|\leq\delta}K_{n}\left(t\right)f\left(t\right)dt\right| & \leq \sup_{\left|t\right|\leq\delta}\left|f\left(t\right)\right|\int_{\left|t\right|\leq\delta}\left|K_{n}\left(t\right)\right|dt\\
 & \leq \sup_{\left|t\right|\leq\delta}\left|f\left(t\right)\right|\int_{-\pi}^{\pi}\left|K_{n}\left(t\right)\right|dt\\
\left|\int_{\left|t\right|>\delta}K_{n}\left(t\right)f\left(t\right)dt\right| & \leq \sup_{\left|t\right|\geq\delta}\left|K_{n}\left(t\right)\right|\cdot\int_{\left|t\right|>\delta}\left|f\left(t\right)\right|dt\\
 & \lambda_{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(t\right)\right|dt
\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\overline{\lim_{n\to0}}\left|2\pi\left(K_{n}*f\right)\left(a\right)\right| \leq 2\pi M\underbrace{\sup_{\left|t\right|\leq\delta}\left|f\left(t\right)\right|}_{\underset{\delta\to0}{\longrightarrow0}}+\underbrace{\lambda_{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(t\right)\right|dt}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow0}}$$

ולכן קיבלנו $\left(K_{n}*f\right)\left(a\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f\left(a\right)$. ■

הערה 1.47 במקרה בו K_{n} זוגית (כלומר $K_{n}\left(t\right)=K_{n}\left(-t\right)$) נקבל כי

$$\begin{aligned}
\left(K_{n}*f\right)\left(a\right) & = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}K_{n}\left(t\right)f\left(a-t\right)\right)dt\\
 & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(K_{n}\left(-t\right)f\left(a+t\right)\right)dt\\
 & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(K_{n}\left(t\right)\frac{f\left(a+t\right)+f\left(a-t\right)}{2}\right)dt
\end{aligned}$$

ולכן במקרה זה מתקיים

$$\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}L\quad\Longrightarrow\quad(K_n*f)(a)\longrightarrow L$$

משפט 1.48 נניח כי

$$\frac{1}{h}\int_0^h\left(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2}\right)dt\quad\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\quad f(a)$$

אז מתקיים $(P_r*f)(a)\underset{r\to 1}{\longrightarrow}f(a)$.

הערה 1.49 ממשפט לבג אם $f\in L_1(\mathbb{T})$, אז כמעט בכל מקום מתקיים $\frac{d}{dt}\int_0^t f(s)\,ds=f(t)$ ולכן מגרסה זו נובעת גרסה חלשה יותר:

משפט 1.50 אם $f\in L_1(\mathbb{T})$ אז לכמעט כל $a\in\mathbb{T}$ מתקיים $(P_r*f)(a)\underset{r\to 1}{\longrightarrow}f(a)$.

הוכחה: (של הגרסה החזקה יותר): נגדיר יחידה אפרוקסימטיבית חדשה. נטען כי $\frac{-\sin t}{r}\cdot P_r'(t)$ היא יחידה אפרוקסימטיבית רגולרית.

$$\begin{aligned}P_r'(t)&=\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\right)'\\&=\frac{-(2r\sin t)\left(1-r^2\right)}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}\end{aligned}$$

כעת נסמן

$$\begin{aligned}Q_r(t)&=-\frac{\sin t}{r}P_r'(t)\\&=\frac{2\sin^2 t\left(1-r^2\right)}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}\geq 0\end{aligned}$$

נניח כי $\delta>0$ וכי $\delta<|t|\leq\pi$ אז

$$\frac{2\sin^2 t\left(1-r^2\right)}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}\quad\leq\quad\frac{2\left(1-r^2\right)}{\left(1-2r\cos\delta+r^2\right)^2}\underset{r\to 1}{\longrightarrow}0$$

נחשב את $\int_{-\pi}^{\pi}Q_r(t)\,dt$:

$$\begin{aligned}P_r(t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{int}\\P_r'(t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(in)\,r^{|n|}e^{int}\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}Q_r(t) &= -\frac{\sin t}{r}P_r'(t)\\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{e^{-it}-e^{it}}{2i}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(in)\,r^{|n|}e^{int}\end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_r(t)\,dt = \widehat{Q_r}(0)=\frac{1}{2ri}(ir-(-i)r)=1$$

לכן $Q_r(t)$ יחידה אפרוקסימטיבית.

כעת נחלק את הוכחת המשפט לשני חלקים: בחלק הראשון נסתכל במקרה בו $a=0$, $\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=0$ ו-$\mathrm{supp}f\subseteq[-1,1]$, כלומר לכל $1\le|t|\le\pi$ מתקיים $f(t)=0$. אנו צריכים להוכיח כי

$$(P_r*f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\,f(t)\,dt\xrightarrow[r\to1]{}f(a)$$

כאשר $f(a)=f(0)=\lim_{h\to0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t)\,dt$.

נסמן $F(h)=\int_{-h}^{h}f(t)\,dt$ אז

$$\begin{aligned}(P_r*f)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\,f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\left(\frac{f(t)+f(-t)}{2}\right)dt\end{aligned}$$

נסמן $f^e(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$ - החלק הזוגי של הפונקציה f. כעת

$$\begin{aligned}P_r(t) &= P_r(-\pi)+\int_{-\pi}^{t}P_r'(s)\,ds\\ (P_r*f)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(P_r(-\pi)\,f^e(t))\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{t}P_r'(s)\,ds f^e(t)\right)dt\\ \underbrace{}_{\text{Fubini}} &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{s}^{\pi}P_r'(s)\,f^e(t)\right)dtds\end{aligned}$$

כי $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$ ולכן גם $\int_{-\pi}^{\pi} f^e(t)\,dt = 0$. מתקיים

$$\begin{aligned}
\int_s^{\pi} f^e(t)\,dt &= \frac{1}{2}\left(\int_s^{\pi} f(t)\,dt + \int_s^{\pi} f(-t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_s^{\pi} f(t)\,dt - \int_{-s}^{-\pi} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_s^{\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{-s} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt}_{\hat{f}(0)=0} - \int_{-s}^{-s} f(t)\,dt\right) \\
&= -\frac{1}{2}F(s)
\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{aligned}
(P_r * f)(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r'(s)\,\frac{F(s)}{2}ds \\
&= \frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_r(s)\,\frac{F(s)}{2\sin s}ds
\end{aligned}$$

מתקיים כי $F(h) \in C(\mathbb{T})$ רציפה ומחזורית (מחזורית מהתכונה $\hat{f}(0) = 0$) ובנוסף

$$F(1) = 2\pi\hat{f}(0)$$

ולכן ל$h > 1$ מתקיים כי $F(h) = 0$ (כי התומך של f הוא ב$[-1,1]$), לכן מתקיים כי

$$\lim_{s\to\pm\pi}\frac{F(s)}{2\sin s} = 0$$

נראה גם רציפות ב0:

$$\frac{F(s)}{2\sin s} = \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f(t)\,dt\cdot\frac{s}{\sin s}\xrightarrow[s\to 0]{} f(0)\cdot 1 = f(0)$$

לכן אם נגדיר $g(s) = \begin{cases}\frac{F(s)}{2\sin s} & s\neq 0,\pm\pi\\ f(0) & s = 0\\ 0 & s = \pm\pi\end{cases}$ אז g פונקציה רציפה ואז מהמשפט שהוכחנו
על יחידה אפרוקסימטיבית רגולרית מתקיים

$$(P_r * f)(0) = \frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\,Q_r(s)\,ds \xrightarrow[r\to 1]{} g(0) = f(0)$$

זה מוכיח את המשפט במקרה בו $a = 0$, $\hat{f}(0) = 0$, $\mathrm{supp} f \subseteq [-1,1]$.

חלק שני של ההוכחה: נניח כי f כללית. נגדיר $g(t)=f(a+t)$. נסמן

$$\begin{aligned}g_1(t) &= g(t)\cdot\chi_{[-1,1]}(t)\\ g_2(t) &= g(t)-g_1(t)\end{aligned}$$

g_2 רציפה ב0, ומאחר וP_r רגולרית, מתקיים כי

$$(P_r*g_2)(0) \underset{r\to1}{\longrightarrow} g_2(0)=0$$

נסתכל על $h\in C[-\pi,\pi]$ כלשהי, $\mathrm{supp}f\subseteq[-1,1]$ ו$\hat{h}(0)=\hat{g_1}(0)$. (יש אינסוף פונקציות כאלה, נבחר אחת כזאת).
נכתוב

$$g_1(t) = (g_1-h)(t)+h(t)$$

אז g_1-h מקיימת את כל התכונות של החלק הראשון בהוכחה של המשפט ולכן

$$P_r*(g_1-h)(0) \underset{r\to1}{\longrightarrow} g_1(0)-h(0)$$

h רציפה ולכן $P_r*h\rightrightarrows h$ ובפרט $(P_r*h)(0)\underset{r\to1}{\longrightarrow}h(0)$ ולכן

$$(P_r*g_1)(0) = (P_r*(g_1-h))(0)+(P_r*h)(0)\underset{r\to1}{\longrightarrow}g_1(0)-h(0)+h(0)=g_1(0)$$

מכאן קיבלנו $(P_r*g)(0)\underset{r\to1}{\longrightarrow}g(0)$. ■

1.4 פונקציה רציפה עם טור פוריה מתבדר

נזכר כי את הסכום הסופי $S_N(t)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{int}$ ניתן לכתוב כ

$$S_N(t) = (D_N*f)(t)$$

כאשר

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N}e^{ikt}=\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

נקראת גרעין דיריכלה. גרעין Fejer שראינו מתקבל מגרעין דיריכלה ע"י סכימת Cesaro:

$$\sigma_N(t) = \frac{\sum_{k=0}^{N}D_k(t)}{N+1}$$

וגרעין פואסון מתקבל ע"י סכימת Abel: מסתכלים על הגבול

$$\lim_{r\to1^-}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)r^{|n|}e^{int}$$

נבנה פונקציה $f\in C(\mathbb{T})$ כך ש $\sum_{n=\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ מתבדר.
נמצא $f_N\in\tau_{2N}$ כך ש$\|f_N\|_{C(\mathbb{T})}\le1$ אבל $\alpha_N=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f_N}(n)$ ישאפו ל∞.

משפט 1.51 $\sup_N \sup_{-\pi\le x\le\pi}\left|\int_0^x D_N(t)\,dt\right| < \infty$

הוכחה: $D_N(t) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. נסמן $H_N(t) = \frac{2\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t}$. אז

$$|D_N(t) - H_N(t)| = \left|\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\right| \cdot \left|\frac{2\sin\frac{t}{2} - t}{t\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|$$

נסמן $\varphi(t) = \frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{t\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. זו פונקציה רציפה ל$t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ ובנוסף מתקיים

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\varphi(t) &= \lim_{t\to 0}\frac{2\left(t-2\sin\frac{t}{2}\right)}{t^2}\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\ &= 2\lim_{t\to 0}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{t^2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\ &= 2\cdot 0\cdot 1 = 0\end{aligned}$$

לכן נוכל להמשיך את $\varphi(t)$ לפונקציה רציפה $\varphi\in C([-\pi,\pi])$ ולכן

$$|D_N(t) - H_N(t)| \le |\varphi(t)|$$

נקבל

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x D_N(t)\,dt\right| &\le \left|\int_0^x H_N(t)\,dt\right| + \left|\int_0^x D_N(t) - H_N(t)\,dt\right|\\ &\le \left|\int_0^x H_N(t)\,dt\right| + \int_0^x |D_N(t)-H_N(t)|\,dt\\ &\le \int_0^x|\varphi(t)|\,dt + \left|\int_0^x H_N(t)\,dt\right|\\ &\le \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|\,dt + 2\left|\int_0^x\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t}dt\right|\\ \underbrace{}_{\substack{s=\left(N+\frac{1}{2}\right)t\\ ds=\left(N+\frac{1}{2}\right)dt}} &= 2\pi\|\varphi\|_1 + 2\left|\int_0^{\left(N+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin s}{s}ds\right|\end{aligned}$$

אבל $\frac{\sin s}{s}$ אינטגרבילית ב$(-\infty,\infty)$ ולכן הפונקציה $\left|\int_0^x\frac{\sin s}{s}ds\right|$ חסומה. ■

נגדיר כעת $F_N(t) = \int_0^t (D_N(s)-1)\,ds$ כלומר

$$\begin{aligned}F_N(t) &= \sum_{\substack{k=-N\\ k\neq 0}}^{N}\frac{e^{ikt}-e^{ik0}}{ik}\\ &= \sum_{\substack{k=-N\\ k\neq 0}}^{N}\frac{e^{ikt}}{ik}\end{aligned}$$

כי הקבועים מבטלים אחד את השני (כי לכל קבוע מופיע גם הנגדי שלו בסכום).

מהמשפט קיים קבוע $C>0$ כך ש$\left|F_N(t)\right|\leq C$ לכל $N\in\mathbb{N}$ ו$t\in[-\pi,\pi]$. נגדיר $P_N=e^{iNt}\cdot\frac{F_N}{\left\|F_N\right\|_{C(\mathbb{T})}\cdot i}$ אזי $P_N\in\tau_{2N}$ ו$\left\|P_N\right\|_{C(\mathbb{T})}=1$ ומתקיים

$$\alpha_N\left(P_N\right)=\frac{1}{i}\sum_{k=-N}^{-1}\frac{1}{k\cdot\left\|F_N\right\|_{C(\mathbb{T})}}=\frac{iH_N}{\left\|F_N\right\|_{C(\mathbb{T})}}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

כי $\left\|F_N\right\|_{C(\mathbb{T})}\leq C$ לכל N.

הגדרה 1.52 אם $f\in L^1(\mathbb{T})$ אז נגדיר את הספקטרום של f בתור הקבוצה

$$\operatorname{Spec}(f)=\left\{k\in\mathbb{Z}\mid\hat{f}(k)\neq0\right\}$$

נבחר סדרות $N_k,M_k\in\mathbb{N}$, כך ש$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\log N_k}<\infty$ (למשל $N_k=2^{2^k}$). את התנאי על M_k נכתוב אחר כך.

נתבונן בסכום

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{iM_kt}}{\log N_k}P_{N_k}(t)$$

נשים לב כי $\left|\frac{e^{iM_kt}}{\log N_k}P_{N_k}(t)\right|\leq\frac{1}{\log N_k}$ ולכן הטור הנ"ל מתכנס במידה שווה לפי בוחן M ויירשטראס. לכן $f\in C(\mathbb{T})$.

נסמן $f_k=\frac{e^{iM_kt}}{\log N_k}P_{N_k}(t)$. מתקיים

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}\left(f_k\right)&=M_k+\operatorname{Spec}\left(P_{N_k}\right)\\&=M_k+\{0,1,2,\ldots,2N_k\}\end{aligned}$$

ובפרט מתקיים כי $\operatorname{Spec}\left(f_k\right)\subseteq\left[M_k-2N_k,M_k+2N_k\right]$.

נבחר M_k כך שהקטעים $\left[M_k-2N_k,M_k+2N_k\right]$ זרים (למשל $M_k=4N_k$ כאשר $N_k=2^{2^k}$).

נקבל כי

$$\hat{f}(n)=\begin{cases}\widehat{f_K}(n)&n\in\operatorname{Spec}\left(f_K\right)\\0&\text{else}\end{cases}$$

מתנאי קושי נקבל כי $\left|\sum_{n=1}^{N_K}\frac{\widehat{P_{N_K}}(n)}{\log N_k}\right|$ צריך לשאוף ל0 (אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ מתכנס). אבל זה לא קורה כי $\left|\sum_{n=1}^{N_K}\frac{\widehat{P_{N_K}}(n)}{\log N_k}\right|\geq\frac{H_{N_k}}{C\cdot\log N_k}\geq\frac{1}{C}$.

למה 1.53 אם $g\in L_1(\mathbb{T})$ אז $\|g\|_1=\sup_{\substack{P\in\tau\\\|P\|_{C(\mathbb{T})\leq1}}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,P(t)\,dt\right\}$.

הוכחה: ברור כי לכל P כזה מתקיים כי

$$\|g\|_1 \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,P(t)\,dt$$

נגדיר $h(t)=\operatorname{sign} g(t)$. אז h מדידה ומתקיים

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,h(t)\,dt = \|g\|_1$$

נתבונן ב$g \xrightarrow{L_1} g_N=\sigma_N * g$. מתקיים

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,h(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} ((g-g_n)(t))\,h(t)\,dt+\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)\,h(t)\,dt$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} ((g-g_n)(t))\,h(t)\,dt\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |((g-g_n)(t))|\,|h(t)|\,dt\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |((g-g_n)(t))|\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,h(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)\,h(t)\,dt$$

נסמן $\tilde{h}(t)=h(-t)$. מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,h(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)\,h(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)\,\tilde{h}(-t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(-t)\,\tilde{h}(t)\,dt\end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(-t)\,\tilde{h}(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_N * g)(-t)\,\tilde{h}(t)\,dt\\ &= \left((\sigma_N * g) * \tilde{h}\right)(0)\\ &= \left(g * \left(\sigma_N * \tilde{h}\right)\right)(0)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(\sigma_N * \tilde{h}\right)(-t)\,dt\end{aligned}$$

נסמן $P_N(t)=\left(\sigma_N * \tilde{h}\right)(-t)$. זהו פולינום טריגונומטרי המקיים $\|P_N\|_{C(\mathbb{T})}\leq 1$ ובנוסף מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,P_N(t)\,dt \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \|g\|_1$. ■

משפט 1.54 נגדיר $L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\,dt = \|D_N\|_1$. אז קיים קבוע $C > 0$ עבורו $L_N \geq C \cdot \log N$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\,dt &= 2\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt \\
&\geq 4\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t}\right|dt \\
&= 4\int_0^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}\frac{|\sin t|}{t}dt \\
&\geq 4\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{|\sin t|}{t}dt \\
&\geq 4\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\pi(k+1)}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}|\sin t|\,dt \\
&= \frac{4}{\pi}\cdot 2H_N = \frac{8}{\pi}H_N
\end{aligned}$$

לכן $L_N \geq \frac{4}{\pi^2}H_N \geq \frac{4}{\pi^2}\log N$. ■

מסקנה 1.55 לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים פולינום טריגונומטרי P_N כך ש

$$\sum_{n=-N}^{N}\hat{P_N}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(-t)\,P_N(t)\,dt \geq \frac{1}{2}L_N \geq C\log N$$

וכן $\|P_N\|_{C(\mathbb{T})} \leq 1$.

1.5 סדרות המתפלגות במידה אחידה (Equidistributed sequences)

הגדרה 1.56 סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T} = [-\pi,\pi]$ נקראת מתפלגת במידה אחידה אם לכל קטע $[a,b] \subseteq [-\pi,\pi]$ מתקיים

$$\lim_{N\to\infty}\frac{|[a,b]\cap\{a_1,\ldots,a_N\}|}{N} = \frac{b-a}{2\pi}$$

כלומר

$$\frac{1}{N}\left|\{k \leq N \mid a_k \in [a,b]\}\right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b-a}{2\pi}$$

משפט 1.57 (Weyl): תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ סדרה. נסתכל עליה כסדרה ב$\mathbb{T}$ ע"י מודולו 2π. נגדיר

$$I_N(\varphi) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(a_k)$$

ואם קיים הגבול נגדיר

$$I(\varphi) = \lim_{N\to\infty} I_N(\varphi)$$

התנאים הבאים שקולים:

1. a_n מתפלגת במידה אחידה, כלומר לכל $[a,b]\subseteq[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$I\left(\chi_{[a,b]}\right) = \frac{b-a}{2\pi}$$

2. לכל $l>0$ טבעי מתקיים

$$I\left(e^{ilt}\right) = 0$$

3. לכל $\varphi\in C(\mathbb{T})$ מתקיים

$$I(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt$$

הוכחה: נסמן

$$\mathcal{E} = \left\{f \mid \exists \lim_{N\to\infty} I_N(f)\right\}$$

ברור כי $\mathcal{E}$ הוא מרחב לינארי וכי הפונקציה $I(f)=\lim_{N\to\infty}I_N(f)$ היא העתקה לינארית.
אם $f_n\in\mathcal{E}$ עם $f_n\rightrightarrows f$ אז $I_N(f)-I_N(f_n)=I_N(f-f_n)$ ואז

$$|I_N(f)-I_N(f_n)| = |I_N(f-f_n)|\le\|f-f_n\|_{C(\mathbb{T})}$$

ומכאן מקבלים כי $I_N(f)$ היא סדרת קושי:

$$\begin{aligned}|I_N(f)-I_M(f)| &\le |I_N(f)-I_N(f_n)|+|I_N(f_n)-I_M(f_n)|+|I_M(f_n)-I_M(f)|\\ &\le 2\|f-f_n\|_{C(\mathbb{T})}+|I_N(f_n)-I_M(f_n)|\end{aligned}$$

עבור n גדול מספיק $\|f-f_n\|_{C(\mathbb{T})}<\frac{\varepsilon}{4}$ וקיים K גדול מספיק כך שלכל $M,N>K$ מתקיים $|I_N(f_n)-I_M(f_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$. מכאן נקבל כי אם $f_n\rightrightarrows f$ אז $f\in\mathcal{E}$ וקל לראות גם כי $I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n)$:

$$\begin{aligned}|I_N(f)-I_N(f_n)| &\le \|f-f_n\|_{C(\mathbb{T})}\\ \lim_{N\to\infty}|I_N(f)-I_N(f_n)|=|I(f)-I(f_n)| &\le \|f-f_n\|_{C(\mathbb{T})}\\ \lim_{n\to\infty}|I(f)-I(f_n)| &\le \lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{C(\mathbb{T})}=0\end{aligned}$$

כעת נראה $3 \implies 1$: מ1 נובע כי לכל $[a,b] \subseteq [-\pi,\pi]$ מתקיים $\chi_{[a,b]} \in \mathcal{E}$. כעת זה אומר שכל פונקציית מדרגות $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{[a_k,b_k]} \in \mathcal{E}$. אנו יודעים כי לכל פונקציה רציפה $\varphi \in C[-\pi,\pi]$ קיימת סדרת פונקציות מדרגות φ_n המתכנסת במידה שווה לφ. מאחר וכל $\varphi_n \in \mathcal{E}$ וf $\varphi_n \rightrightarrows$ נקבל כי $\varphi \in \mathcal{E}$. בנוסף מתקיים

$$I\left(\chi_{[a,b]}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[a,b]}(t)\,dt$$

מכאן מאחר ו$\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ מתקיים

$$\begin{aligned} I(\varphi_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt \\ I(\varphi)=\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt \end{aligned}$$

זה מראה ש$3 \implies 1$.

ברור כי $2 \implies 3$. נראה כי $3 \implies 2$. נשים לב ראשית כי ל$l<0$ מתקיים

$$I_N\left(e^{-ilt}\right) = \overline{I_N\left(e^{ilt}\right)}$$

ולכן

$$I\left(e^{ilt}\right) = \overline{I\left(e^{-ilt}\right)} = 0$$

בנוסף נשים לב כי

$$I_N(\mathbb{1}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1 = 1$$

ולכן $I(\mathbb{1}) = 1$. לכן לכל l שלם מתקיים

$$I\left(e^{ilt}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt}dt$$

לכן לכל פולינום טריגונומטרי $P \in \tau$ מתקיים $I(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(t)\,dt$. מכיוון שכל פונקציה רציפה ניתנת לקירוב במידה שווה ע"י פולינומים טריגונומטריים נקבל כי מתקיים 3.

$1 \implies 3$: נשים לב ראשית כי אם $\psi \leq \varphi$ אז $I_N(\varphi) \leq I_N(\psi)$. נשים לב כי ל$\chi_{[a,b]}$ ול$\varepsilon > 0$ קיימות פונקציות רציפות $f_+^\varepsilon, f_-^\varepsilon$ כך ש

$$f_-^\varepsilon \leq \chi_{[a,b]} \leq f_+^\varepsilon$$

וכך שמתקיים

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f_{+}^{\varepsilon}-f_{-}^{\varepsilon}\right)dt \quad < \quad \varepsilon$$

לכל N מתקיים

$$I_N\left(f_{-}^{\varepsilon}\right) \quad \leq \quad I_N\left(\chi_{[a,b]}\right) \leq I_N\left(f_{+}^{\varepsilon}\right)$$

ולכן לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{-}^{\varepsilon} dt \quad &\leq \quad \underline{\lim}_{N\to\infty} I_N\left(\chi_{[a,b]}\right) \\
&\leq \quad \overline{\lim}_{N\to\infty} I_N\left(\chi_{[a,b]}\right) \\
&\leq \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{+}^{\varepsilon} dt
\end{aligned}$$

ומתקיים כי

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{+}^{\varepsilon} dt \quad &\leq \quad \varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{-}^{\varepsilon} dt \\
&\leq \quad \varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b]} dt \\
&= \quad \frac{b-a}{2\pi} + \varepsilon
\end{aligned}$$

ובאופן דומה

$$\frac{b-a}{2\pi} - \varepsilon \quad \leq \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{-}^{\varepsilon} dt$$

כלומר קיבלנו לכל $\varepsilon > 0$ כי

$$\frac{b-a}{2\pi} - \varepsilon \quad \leq \quad \underline{\lim}_{N\to\infty} I_N\left(\chi_{[a,b]}\right) \leq \overline{\lim}_{N\to\infty} I_N\left(\chi_{[a,b]}\right) \leq \frac{b-a}{2\pi} + \varepsilon$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{N\to\infty} I_N\left(\chi_{[a,b]}\right) \quad &= \quad \overline{\lim}_{N\to\infty} I_N\left(\chi_{[a,b]}\right) \\
&= \quad \lim_{N\to\infty} I_N\left(\chi_{[a,b]}\right) \\
&= \quad I\left(\chi_{[a,b]}\right) \\
&= \quad \frac{b-a}{2\pi}
\end{aligned}$$

■

1.6 משפט Herglotz

הגדרה 1.58 סדרה $(a_n)\subseteq\mathbb{C}$ נקראת מוגדרת חיובית אם לכל סדרה סופית $(z_n)\subseteq\mathbb{C}$ מתקיים

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{n-m}z_n\overline{z_m}\quad\geq\quad 0$$

הערה 1.59 מאחר וכמעט כל הz_nים אפסים, הסכום סופי ואין שאלה של התכנסות.

הגדרה 1.60 נניח כי $\varphi\in\left(C\left(\mathbb{T}\right)\right)^{*}=C^{*}\left(\mathbb{T}\right)$ פונקציונל לינארי על מרחב הפונקציות הרציפות על המעגל $\mathbb{T}$. נאמר כי $\varphi\geq 0$ אם לכל $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עם $f\geq 0$ מתקיים כי $\varphi\left(f\right)\geq 0$.

הגדרה 1.61 ל $\varphi\in C^{*}\left(\mathbb{T}\right)$ נגדיר מקדם פוריה בתור $\hat{\varphi}\left(n\right)=\overline{\varphi\left(e^{int}\right)}$.

משפט 1.62 (Herglotz): $(a_n)\subseteq\mathbb{C}$ מוגדרת חיובית אם ורק אם קיים $\varphi\in C^{*}\left(\mathbb{T}\right)$ פונקציונל אי־שלילי $\varphi\geq 0$ כך שלכל n שלם מתקיים $a_n=\hat{\varphi}\left(n\right)$.

הוכחה: $\Longleftarrow$: נניח כי $\varphi\in C^{*}\left(\mathbb{T}\right)$ עם $\varphi\geq 0$, כך ש $a_n=\hat{\varphi}\left(n\right)$. תהי z_n סדרה סופית. נסתכל על

$$\begin{aligned}\sum_{n,m}\hat{\varphi}\left(n-m\right)z_n\overline{z_m} &= \sum_{n,m}\overline{\varphi\left(e^{i(n-m)t}\right)}z_n\overline{z_m}\\ &= \overline{\varphi\left(\sum_{n,m}e^{i(n-m)t}\overline{z_n}z_m\right)}\\ &= \overline{\varphi\left(\sum_{n,m}\overline{e^{-int}z_n}e^{-imt}z_m\right)}\\ &= \overline{\varphi\left(\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{e^{-int}z_n}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-imt}z_m\right)\right)}\\ &= \overline{\varphi\left(\overline{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-int}z_n\right)}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-imt}z_m\right)\right)}\\ &= \overline{\varphi\left(\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-imt}z_m\right|^{2}\right)}\end{aligned}$$

מאחר ו$\varphi\geq 0$ ו$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-imt}z_m\right|^{2}\geq 0$ מתקיים כי $\varphi\left(\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-imt}z_m\right|^{2}\right)\geq 0$

ובפרט ממשי ואז

$$\begin{aligned}\sum_{n,m}\hat{\varphi}\left(n-m\right)z_n\overline{z_m} &= \overline{\varphi\left(\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-imt}z_m\right|^2\right)}\\ &= \varphi\left(\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-imt}z_m\right|^2\right)\\ &\geq 0\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$: נגדיר לפולינום טריגונומטרי $P=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{int}$ את הפונקציונל

$$\begin{aligned}\varphi\left(P\right) &= \sum_{n=-N}^{N}c_n\varphi\left(e^{int}\right)\\ &= \sum_{n=-N}^{N}c_n\overline{a_n}\end{aligned}$$

(רוצים $\varphi\left(e^{int}\right)=\overline{a_n}$)
נראה כי φ פונקציונל חסום אי־שלילי ואז ניתן להמשיכו כדרוש.

למה 1.63 יהי $P\in\tau_N$ פולינום טריגונומטרי עם $P\restriction_{\mathbb{T}}\geq 0$. אז קיים $Q\in\tau$ פולינום טריגונומטרי כך ש־$P\left(t\right)=\left|Q\left(t\right)\right|^2$ לכל $t\in\mathbb{T}$.

הוכחה: נכתוב

$$P\left(t\right) = \sum_{k=-N}^{N}c_ke^{ikt}$$

נניח כי $P\left(t\right)>0$. נגדיר

$$f\left(z\right) = \sum_{k=-N}^{N}c_kz^k$$

אז $f\left(z\right)\geq 0$ לכל $\left|z\right|=1$ ובפרט ל־$\left|z\right|=1$ מתקיים $f\left(z\right)\in\mathbb{R}$ ואז מתקיים

$$\begin{aligned}f\left(z\right) &= \overline{f\left(z\right)}\\ &= \sum_{k=-N}^{N}\overline{c_k}\cdot\overline{z}^k\\ &= \sum_{k=-N}^{N}\overline{c_k}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^k\\ &= \overline{f}\left(\frac{1}{z}\right)\end{aligned}$$

כאשר

$$\overline{f}\left(z\right) = \sum_{k=-N}^{N}\overline{c_k}z^k$$

מאחר ו$f\left(z\right)=\overline{f}\left(\frac{1}{z}\right)$ לכל $|z|=1$ מתקיים כי $f\left(z\right)=\overline{f}\left(\frac{1}{z}\right)$ לכל z (ממשפט היחידות: ניתן למשל להכפיל את שני הצדדים בz^N ואז נקבל שתי פונקציות הולומורפיות שמסכימות על $|z|=1$ ואז הן מסכימות על כל $\mathbb{C}$). נכתוב

$$\begin{aligned} z^N f\left(z\right) &= C\prod_{k=1}^{2N}\left(z-\alpha_k\right) \\ f\left(z\right) &= \frac{1}{z^N}\cdot C\prod_{k=1}^{2N}\left(z-\alpha_k\right) \\ \overline{f}\left(\frac{1}{z}\right) &= z^N\cdot\overline{C}\prod_{k=1}^{2N}\left(\frac{1}{z}-\overline{\alpha_k}\right) \end{aligned}$$

מכאן נקבל

$$\frac{1}{z^N}\cdot C\prod_{k=1}^{2N}\left(z-\alpha_k\right) = z^{-N}\cdot C_1\prod_{k=1}^{2N}\left(z-\frac{1}{\overline{\alpha_k}}\right)$$

כאשר C_1 קבוע אחר. מאחר ו$P>0$ על $|z|=1$ נוכל לחלק את השורשים לשתי קבוצות: השורשים שבתוך עיגול היחידה ואלה שמחוץ לו.
מכיוון שההעתקה $z\mapsto\frac{1}{\overline{z}}$ מעבירה את הפנים של עיגול היחידה לחוץ שלו ולהפך, ניתן לסדר את השורשים בזוגות כך ש

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{\overline{\alpha_1}} \\ \alpha_4 &= \frac{1}{\overline{\alpha_3}} \\ &\cdots \\ \alpha_{2k} &= \frac{1}{\overline{\alpha_{2k-1}}}=\beta_k \end{aligned}$$

ואז נכתוב

$$\begin{aligned} f\left(z\right) &= \frac{C}{z^N}\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(z-\beta_k\right)\left(z-\frac{1}{\overline{\beta_k}}\right) \\ &= C\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(z-\beta_k\right)\left(1-\frac{1}{z\cdot\overline{\beta_k}}\right) \end{aligned}$$

כעת ל$z\in\mathbb{T}$ מתקיים

$$\begin{aligned} \left(z-\beta_k\right)\left(1-\frac{1}{z\cdot\overline{\beta_k}}\right) &= \left(z-\beta_k\right)\left(1-\frac{\overline{z}}{\overline{\beta_k}}\right) \\ &= -\frac{1}{\overline{\beta_k}}\left|z-\beta_k\right|^2 \end{aligned}$$

ולכן

$$f(z) = C_2 \cdot \left|\prod_{k=1}^{N}(z-\beta_k)\right|^2$$

כאשר $C_2 \in \mathbb{C}$. נחזור ל$P(t)$ ונקבל

$$\begin{aligned} P(t) &= f\left(e^{it}\right) \\ &= C_2 \cdot \left|\prod_{k=1}^{N}\left(e^{it}-\beta_k\right)\right|^2 \end{aligned}$$

ומאחר ו$P(t) > 0$ לכל $t \in [-\pi,\pi]$ נקבל כי $C_2 > 0$. ■

הגדרנו לכל $P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ את הפונקציונל

$$\varphi(P) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{a_n}$$

נבדוק כי לכל $P > 0$ מתקיים $\varphi(P) \geq 0$. $P > 0$ ולכן מהלמה קיים

$$Q(t) = \sum_{|k|\leq N} d_k e^{ikt}$$

כך ש

$$P(t) = |Q(t)|^2$$

כלומר

$$\begin{aligned} P(t) &= Q(t)\overline{Q(t)} \\ &= \left(\sum_{|k|\leq N} d_k e^{ikt}\right)\left(\sum_{|l|\leq N} \overline{d_l} e^{-ilt}\right) \\ &= \sum_{|k|\leq N}\sum_{|l|\leq N} d_k \overline{d_l} e^{i(k-l)t} \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \sum_{|k|\leq N}\sum_{|l|\leq N} \overline{a_{k-l}} d_k \overline{d_l} \\ &= \overline{\sum_{|k|\leq N}\sum_{|l|\leq N} a_{k-l} \overline{d_k} d_l} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

כי a_k מוגדרת חיובית (ע"י בחירת $z_n = \overline{d_n}$).

נשים לב כי אם $P\geq 0$ אז לכל $\varepsilon>0$ מתקיים כי $P+\varepsilon\cdot\mathbb{1}>0$ ואז

$$\varphi\left(P\right)+\varepsilon\cdot\varphi\left(\mathbb{1}\right) = \varphi\left(P+\varepsilon\cdot\mathbb{1}\right)\geq 0$$

ולכן $\varphi\left(P\right)\geq 0$

ננסה לחסום את φ: נסתכל ראשית על פולינומים טריגונומטריים עם ערכים ממשיים:
יהי P פולינום טריגונומטרי עם $P\left(\mathbb{T}\right)\subseteq\mathbb{R}$. מתקיים

$$P \leq \|P\|_{C(\mathbb{T})}\cdot\mathbb{1}$$

ולכן

$$\|P\|_{C(\mathbb{T})}\cdot\varphi\left(\mathbb{1}\right) \geq \varphi\left(P\right)$$

באופן דומה ע"י הצבת $-P$ נקבל

$$\|P\|_{C(\mathbb{T})}\cdot\varphi\left(\mathbb{1}\right) \geq \varphi\left(-P\right)=-\varphi\left(P\right)$$

נשים לב כי

$$0\leq a_0 = \varphi\left(\mathbb{1}\right)$$

ע"י בחירת הסדרה $z_0=1$. מכאן נקבל כי

$$\left|\varphi\left(P\right)\right| \leq \|P\|_{C(\mathbb{T})}\cdot\varphi\left(\mathbb{1}\right)$$

אם $P=\sum_{k=-N}^{N}c_ke^{ikt}$ פולינום טריגונומטרי כללי נוכל לכתוב $P=\mathrm{Re}P+i\mathrm{Im}P$ כאשר

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}P &= \mathrm{Re}\sum_{k=-N}^{N}c_k\cdot e^{ikt}\\
&= \sum_{k=-N}^{N}\mathrm{Re}\left(c_k\cdot e^{ikt}\right)\\
&= \sum_{k=-N}^{N}\left(\frac{c_k\cdot e^{ikt}+\overline{c_k}\cdot e^{-ikt}}{2}\right)\\
&= \sum_{k=-N}^{N}\left(\frac{c_k+\overline{c_{-k}}}{2}\right)e^{ikt}\\
\mathrm{Im}P &= \mathrm{Im}\sum_{k=-N}^{N}c_k\cdot e^{ikt}\\
&= \sum_{k=-N}^{N}\left(\frac{c_k\cdot e^{ikt}-\overline{c_k}\cdot e^{-ikt}}{2i}\right)\\
&= \sum_{k=-N}^{N}\left(\frac{c_k-\overline{c_{-k}}}{2i}\right)\cdot e^{ikt}
\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}|\varphi(P)| &\leq |\varphi(\mathrm{Re}P)|+|\varphi(\mathrm{Im}P)| \\ &\leq \varphi(\mathbb{1})\cdot\left(\|\mathrm{Re}P\|_{C(\mathbb{T})}+\|\mathrm{Im}P\|_{C(\mathbb{T})}\right) \\ &\leq 2\cdot\varphi(\mathbb{1})\cdot\|P\|_{C(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

(תרגיל בית: להראות שבעצם $|\varphi(P)|\leq\varphi(\mathbb{1})\cdot\|P\|_{C(\mathbb{T})}$)

קיבלנו $\|\varphi\|\leq 2\varphi(\mathbb{1})$ ולכן φ פונקציונל חסום $\varphi\in\left(\tau,\|\cdot\|_{C(\mathbb{T})}\right)^*$. מלמה שראינו (בקורס על מרחבי הילברט), ניתן להמשיך את φ לפונקציונל על $C(\mathbb{T})$.

ל־$f\in C(\mathbb{T})$ עם $f>0$ מתקיים כי $\tau_N\ni\sigma_N*f\geq 0$ ומתקיים $\sigma_N*f\rightrightarrows f$. מכאן $0\leq\varphi(\sigma_N*f)$ וע"י מעבר לגבול $\varphi(f)\geq 0$.

אם $f\geq 0$ אז לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $f+\varepsilon\mathbb{1}>0$ ואז שוב $\varphi(f)+\varepsilon\varphi(\mathbb{1})=\varphi(f+\varepsilon\mathbb{1})\geq 0$ וע"י מעבר לגבול נקבל כי $\varphi(f)\geq 0$. ■

משפט 1.64 (Riesz–Kakutani): יהי K מרחב האוסדורף קומפקטי ותהי $\varphi\in C(K)^{\#}$ (כלומר $\varphi:C(K)\to\mathbb{R}$ פונקציונל לינארי) עם $\varphi\geq 0$. אז קיימת ויחידה מידת בורל סופית μ על K כך שלכל $f\in C(K)$ מתקיים

$$\varphi(f) = \int_K f d\mu$$

הערה 1.65 זהו משפט שמוכיחים בקורס על תורת המידה, לא נוכיחו.

נניח כי H מרחב הילברט. יהי $U\in\mathcal{L}(H)$ אופרטור אוניטרי ($UU^*=U^*U=I$) ויהי $f\in H$. נסתכל על

$$H_f = \overline{\mathrm{span}}\left\{U^nf\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$$

אם $H=H_f$ אומרים ש־U עם ספקטרום פשוט.

נסתכל בסדרה הבאה:

$$a_n = \langle U^nf,f\rangle$$

נטען כי a_n מוגדרת חיובית: נסתכל על הסכום

$$\begin{aligned}\sum_{n,m}a_{n-m}z_n\overline{z_m} &= \sum_n\sum_m\left\langle U^{n-m}f,f\right\rangle z_n\overline{z_m} \\ \underbrace{}_{U^{-1}=U^*} &= \sum_n\sum_m\left\langle U^nf,U^mf\right\rangle z_n\overline{z_m} \\ &= \left\langle\sum_n z_nU^nf,\sum_m z_mU^mf\right\rangle \\ &= \left\|\sum_n z_nU^nf\right\|^2\geq 0\end{aligned}$$

מהמשפט שהוכחנו וממשפט ריס קיימת מידה $\mu=\mu_f$ כך ש$a_n=\hat{\mu}(n)$ כלומר

$$a_n=\langle U^nf,f\rangle = \int_{\mathbb{T}}e^{-int}d\mu(t)$$

נגדיר העתקה $T:H_f^0\to L_2(\mathbb{T},d\mu)$ (כאשר $H_f^0=\operatorname{span}\{U^nf\mid n\in\mathbb{Z}\}$) על ידי

$$T(U^nf) = e^{-int}$$

(על פניו נראה כי העתקה זו אינה מוגדרת היטב כי ייתכן למשל כי $U^nf=U^mf$ ל$n\neq m$,
אבל נראה בהמשך שבמצב כזה מתקיים כי $e^{-int}=e^{-imt}$ לפי המידה μ)
נטען כי T איזומטריה. יהי

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_k c_kU^kf\\ \psi &= \sum_k d_kU^kf\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\psi\rangle &= \sum_k\sum_l c_k\overline{d_l}\underbrace{\langle U^kf,U^lf\rangle}_{a_{k-l}}\\ &= \sum_k\sum_l c_k\overline{d_l}\int_{\mathbb{T}}e^{-i(k-l)t}d\mu(t)\\ &= \int_{\mathbb{T}}\sum_k\sum_l c_k\overline{d_l}e^{-i(k-l)t}d\mu(t)\\ &= \int_{\mathbb{T}}\sum_k\left(c_ke^{-ikt}\right)\left(\overline{\sum_l d_le^{-ilt}}\right)d\mu(t)\end{aligned}$$

(מכאן אם $U^nf=U^mf$ אז $\langle U^nf-U^mf,U^nf-U^mf\rangle=0$ ואז גם
$\int_{\mathbb{T}}\left|e^{-int}-e^{-imt}\right|^2d\mu(t)=0$ ולכן T מוגדרת היטב)
מכאן נקבל

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\psi\rangle &= \int_{\mathbb{T}}\sum_k\left(c_ke^{-ikt}\right)\left(\overline{\sum_l d_le^{-ilt}}\right)d\mu(t)\\ &= \int_{\mathbb{T}}T\varphi\cdot\overline{T\psi}d\mu(t)\\ &= \langle T\varphi,T\psi\rangle\end{aligned}$$

ולכן T איזומטריה ונוכל להמשיכה לאופרטור

$$T:H_f \to L_2(\mathbb{T},d\mu)$$

אופרטור זה הוא על כי $\left\{e^{int}\right\}$ צפופה ב$L_2(\mathbb{T},d\mu)$. (הפונקציות הרציפות צפופות בL_2 לכל
מידת בורל, ולכן הפולינומים הטריגונומטריים צפופים בL_2).

נשים לב כי אם

$$\varphi = \sum_k c_k U^k f$$

אז

$$\begin{aligned} U\varphi &= \sum_k c_k U^{k+1} f \\ TU\varphi &= \sum_k c_k e^{-i(k+1)t} f \\ &= e^{-it} \sum_k c_k e^{-ikt} f \\ &= e^{-it} T\varphi \end{aligned}$$

משפט 1.66 (ארגודי של von Neumann): יהי H מרחב הילברט ויהי U אופרטור אוניטרי. נסמן $E = \mathrm{Ker}\,(U - I)$ ונסמן $P = P_E$ - ההטלה האורתוגונלית על E. אז לכל $f \in H$ מתקיים

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U^k f \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} Pf$$

הוכחה: ממה שראינו קודם, ניתן להניח כי $H = L_2(\mathbb{T}, d\mu)$ ו-$U = M_{e^{-ity}}$ כאשר $M_{e^{-ity}} f = e^{-it} f$. לכן

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U^k = M_{h_N}$$

כאשר

$$h_N = \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{-iNt} - 1}{e^{-it} - 1}$$

מתקיים כי

$$\|h_N\|_\infty \leq M < \infty$$

($M = 1$)
מתקיים כי ל-$t \neq 0$

$$h_N(t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ול-$t = 0$:

$$h_N(0) = 1$$

לכן ל$f \in L_2(d\mu)$ מתקיים כי באופן נקודתי

$$(h_N \cdot f)(t) \quad \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad \delta_{t,0} \cdot f(0)$$

בנוסף

$$|h_N \cdot f| \quad \leq \quad M|f|$$

ו$f \in L_2$ ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת (עם המז'ורנטה f) יש התכנסות של $h_N f$ ל$\delta_{t,0} \cdot f(0)$ בL_2.

נשים לב כי $g \in \mathrm{Ker}(U-I)$ אם ורק אם

$$Ug \quad \overset{L_2}{=} \quad g$$

כלומר אם ורק אם $Ug = g$ כמעט בכל מקום (ביחס למידה μ). זה שקול ל$e^{-it}g(t) = g(t)$ כמעט לכל t, ששקול לכך שכמעט לכל $t \neq 0$ מתקיים $g(t) = 0$. לכן $g \in \mathrm{Ker}(U-I)$ אם ורק אם $g(t) = \delta_{t,0} \cdot g(0)$. מכאן קל לראות ש$h_N$ מתכנסת להיטל המבוקש. ■

2 טרנספורם (התמרת) פוריה

2.1 מבוא

דיברנו עד כה על פונקציות מחזוריות עם מחזור 2π. מה קורה עם מחזור אחר $2T$? ברור כי ניתן להעביר את הקטע $[-T,T]$ ל$[-\pi,\pi]$ ע"י ההעתקה

$$t \quad \mapsto \quad \frac{\pi}{T} \cdot t = s$$

תהי f פונקציה $2T$ מחזורית. נגדיר

$$g(s) \quad = \quad f\left(\frac{T}{\pi} \cdot s\right)$$

g פונקציה 2π מחזורית ואם f הייתה פונקציה "די טובה" גם g פונקציה "די טובה" ואז

$$\begin{aligned} g(s) \quad &= \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) \cdot e^{ins} \\ f(t) \quad &= \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) \cdot e^{in\frac{\pi}{T}t} \end{aligned}$$

נחשב את מקדמי הפוריה של g:

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\, e^{-ins} ds \\ \underbrace{}_{\substack{t=\frac{T}{\pi}\cdot s \\ dt=\frac{T}{\pi}ds}} \quad &= \quad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) e^{-in\frac{\pi}{T}t} dt \\ &= \quad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-in\frac{\pi}{T}t} dt \end{aligned}$$

כעת נניח כי f פונקציה די טובה על הישר הממשי עם תומך קומפקטי. נניח $\mathrm{supp} f\subseteq[-T,T]$. נכתוב

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}e^{in\frac{\pi}{T}t}\int_{-T}^{T}f(x)\,e^{-in\frac{\pi}{T}x}dt\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,e^{in\frac{\pi}{T}(t-x)}dt\\
\underbrace{}_{\mathrm{supp} f\subseteq[-T,T]} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{in\frac{\pi}{T}(t-x)}dt
\end{aligned}$$

נגדיר פונקציית עזר

$$H(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i2\pi\cdot\xi(x-t)}dx$$

אז

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}H\left(\frac{n}{2T}\right)$$

הסכום הנ"ל מזכיר סכום רימן כשT שואף לאינסוף ולכן היינו מצפים ש

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}H\left(\frac{n}{2T}\right)\approx\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi)\,d\xi$$

הגדרה 2.1 תהי $f\in L_1(\mathbb{R})$. נגדיר את טרנספורם הפוריה של f להיות

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-ix\xi}dx$$

הפונקציה H שהגדרנו קודם ניתנת לביטוי

$$\begin{aligned}
H(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i2\pi\cdot\xi(x-t)}dx\\
&= \hat{f}(2\pi\cdot\xi)\cdot e^{i2\pi t\xi}
\end{aligned}$$

ולכן הציפייה שלנו היא שיתקיים

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(2\pi\cdot\xi)\cdot e^{i2\pi\xi t}d\xi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{i\xi t}d\xi\\
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-ix\xi}dx
\end{aligned}$$

הגדרה 2.2 הטרנספורם הפוריה ההפוך של פונקציה $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ מוגדר להיות הפונקציה $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{i\xi t}d\xi$.

טענה 2.3 טרנספורם פוריה הוא לינארי:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha\cdot f} &= \alpha\cdot\hat{f}\\ \widehat{f+g} &= \hat{f}+\hat{g}\end{aligned}$$

הוכחה: ברור מההגדרה. ∎

משפט 2.4 אם $f \in L_1(\mathbb{R})$ אז $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ רציפה במידה שווה, ומתקיים

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} := \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\hat{f}(\xi)\right| \le \|f\|_{L_1}$$

הוכחה: יהי $\xi \in \mathbb{R}$. מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(\xi)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx\right|\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)e^{-ix\xi}\right|dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\\ &= \|f\|_{L_1}\end{aligned}$$

כעת ל$\eta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{aligned}f(\xi+\eta)-f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left(e^{-i(\xi+\eta)x}-e^{-i\xi x}\right)dx\\ |f(\xi+\eta)-f(\xi)| &\le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\cdot\left|e^{-i(\xi+\eta)x}-e^{-i\xi x}\right|dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\cdot\left|e^{-i\eta x}-1\right|dx\end{aligned}$$

נשים לב כי באופן נקודתי מתקיים

$$\lim_{\eta\to 0}\left|e^{-i\eta x}-1\right| = 0$$

מצד שני מתקיים כי

$$|f(x)|\cdot\left|e^{-i\eta x}-1\right| \le 2\cdot|f(x)|$$

ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת מתקיים כי

$$\lim_{\eta\to0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\cdot\left|e^{-i\eta x}-1\right|dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\eta\to0}\left(|f(x)|\cdot\left|e^{-i\eta x}-1\right|\right)dx=0$$

ולכן

$$\lim_{\eta\to0}|f(\xi+\eta)-f(\xi)| \leq \lim_{\eta\to0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\cdot\left|e^{-i\eta x}-1\right|dx=0$$

מאחר והאינטגרל בצד ימין אינו תלוי ב־ξ, ההתכנסות במידה שווה. ■

מסקנה 2.5 האופרטור $\wedge : L_1(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$ הוא חסום.

משפט 2.6 (הלמה של רימן־לבג): תהי $f\in L_1(\mathbb{R})$ אז $\hat{f}(\xi)\underset{\xi\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$.

הוכחה: נניח ראשית $f=\chi_{[a,b]}$ אז

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[a,b]}(x)\,e^{-i\xi x}dx\\ &= \int_a^b e^{-i\xi x}dx\\ &= -\frac{1}{i\xi}\left[e^{-i\xi b}-e^{-i\xi a}\right]\\ &= \frac{e^{-i\xi a}-e^{-i\xi b}}{i\xi}\underset{\xi\to\pm\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

כעת תהי $f\in L_1(\mathbb{R})$ כללית ויהי $\varepsilon>0$. קיימת פונקציית מדרגות g כך ש־$\|f-g\|_1\leq\varepsilon$. לכל ξ מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(\xi)-\hat{g}(\xi)\right| &\leq \|f-g\|_1\leq\varepsilon\\ \left|\hat{f}(\xi)\right| &\leq \left|\hat{f}(\xi)-\hat{g}(\xi)\right|+|\hat{g}(\xi)|\leq|\hat{g}(\xi)|+\varepsilon\end{aligned}$$

כעת

$$\overline{\lim}_{\xi\to\pm\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \overline{\lim}_{\xi\to\pm\infty}|\hat{g}(\xi)|+\varepsilon=\varepsilon$$

לכל $\varepsilon>0$ ולכן מתקיים

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right| = \overline{\lim}_{\xi\to\pm\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|=0$$

תכונות נוספות של טרנספורם פוריה: ■

ל־$f \in L_1(\mathbb{R})$ ו־$y \in \mathbb{R}$ נגדיר $f_y(x) = f(x-y)$ ואז

$$\begin{aligned}
\widehat{f_y}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-ix\xi} dx \\
\underbrace{}_{z=x-y} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-iz\xi} e^{-iy\xi} dz \\
&= e^{-iy\xi} \cdot \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

אם $\lambda > 0$ ו־$g(x) = f(\lambda x)$ אז

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x)\, e^{-i\xi x} dx \\
\underbrace{}_{y=\lambda x} &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\xi \frac{y}{\lambda}} dy \\
&= \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

משפט 2.7 (דיני): נניח כי $f \in L_1(\mathbb{R})$ ונניח כי בנקודה $a \in \mathbb{R}$ מתקיים תנאי דיני:

$$\frac{f(x+a) - L}{x} \quad \in \quad L_1(\mathbb{R})$$

אז

$$L = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) \cdot e^{i\xi a} d\xi$$

הוכחה: נוכל להניח $a = 0$, אחרת נסתכל על $g(x) = f(x+a)$. מתקיים

$$\int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{-A}^{A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \right) d\xi$$

מאחר ו

$$\int_{-A}^{A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x)\, e^{-i\xi x} \right| dx \right) d\xi < \infty$$

ממשפט Fubini-Tonelli ניתן להחליף את סדר האינטגרציה:

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)\, d\xi &= \int_{-A}^{A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \right) d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-A}^{A} \left(e^{-i\xi x} \right) d\xi dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-ix} \Big|_{-A}^{A} \right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{e^{ixA} - e^{-ixA}}{ix} \right] dx
\end{aligned}$$

נכתוב

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\xi)\,d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-L)\left[\frac{e^{ixA}-e^{-ixA}}{ix}\right]dx+L\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{ixA}-e^{-ixA}}{ix}\right]dx\\ &= \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-L}{x}\cdot\left(e^{ixA}-e^{-ixA}\right)dx+L\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(Ax)}{x}dx\end{aligned}$$

מתנאי דיני מתקיים כי $\frac{f(x)-L}{x}\in L_1(\mathbb{R})$ ולכן מהלמה של רימן־לבג מתקיים כי האינטגרל הראשון שואף ל־0 כאשר $A\to\infty$. מכאן

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \lim_{A\to\infty}L\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(Ax)}{x}dx$$

כעת לכל $A>0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(Ax)}{x}dx &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}dy\\ &= 2\cdot 2\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}dy\\ &= 4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi\end{aligned}$$

ולכן

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\xi)\,d\xi = 2\pi L$$

■

הערה 2.8 (תרגיל בית): להראות כי בתנאי המשפט מתקיים

$$L = \lim_{A,B\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{B}\hat{f}(\xi)\cdot e^{i\xi a}d\xi$$

טענה 2.9 אם $f,g\in L_1(\mathbb{R})$ אז גם הפונקציה

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\,g(y)\,dy$$

מקיימת $h\in L_1(\mathbb{R})$ ומתקיים

$$\begin{aligned}\|h\|_1 &\le \|f\|_1\cdot\|g\|_1\\ \hat{h}(\xi) &= \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

מסמנים $h=f*g$ ־ הקונבולוציה של f ו־g.

הוכחה: באופן דומה למה שעשינו ב$\mathbb{T}$: ראשית מתקיים כי $f\left(x-y\right)g\left(y\right)\in L_{1}\left(\mathbb{R}^{2}\right)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x-y\right)g\left(y\right)\right|dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\left|g\left(y\right)\right|\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x-y\right)\right|dxdy$$

מאחר ומידת לבג אינווריאנטית להזזות מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x-y\right)\right|dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|dx$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|g\left(y\right)\right|\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|dxdy = \left\Vert f\right\Vert_{1}\cdot\left\Vert g\right\Vert_{1}$$

לכן ממשפט Fubini-Tonelli מתקיים $h\in L_{1}\left(\mathbb{R}\right)$. וממה שהראנו

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|h\left(x\right)\right|dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x-y\right)g\left(y\right)\right|dydx\\ &= \left\Vert f\right\Vert_{1}\cdot\left\Vert g\right\Vert_{1}\end{aligned}$$

באותו אופן מתקיים כי $f\left(x-y\right)g\left(y\right)\cdot e^{-i\xi x}\in L_{1}\left(\mathbb{R}^{2}\right)$ ואז

$$\begin{aligned}\hat{h}\left(\xi\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}h\left(x\right)e^{-ix\xi}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-y\right)g\left(y\right)dy\right)e^{-ix\xi}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-y\right)g\left(y\right)e^{-ix\xi}dx\right)dy\\ \underbrace{}_{\text{Fubini-Tonelli}} &= \int_{-\infty}^{\infty}g\left(y\right)e^{-iy\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-y\right)e^{-i\left(x-y\right)\xi}dx\right)dy\\ \underbrace{}_{x-y=z} &= \int_{-\infty}^{\infty}g\left(y\right)e^{-iy\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(z\right)e^{-iz\xi}dz\right)dy\\ &= \hat{f}\left(\xi\right)\cdot\hat{g}\left(\xi\right)\end{aligned}$$

■

משפט 2.10 (היחידות): אם $f\in L_{1}\left(\mathbb{R}\right)$ ו$\hat{f}=0$ אז $f\overset{\text{a.e.}}{=}0$.

הוכחה: יהי $a\in\mathbb{R}$, נסמן $g=\chi_{[0,a]}$ מתקיים כי

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}=0$$

נסמן

$$\begin{aligned} h\left(x\right) &= \left(f*g\right)\left(x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x-y\right)g\left(y\right)dy \\ &= \int_{0}^{a} f\left(x-y\right)dy \\ &= \int_{x-a}^{x} f\left(y\right)dy \end{aligned}$$

מתקיים כי h פונקציה רציפה וממשפט לבג מתקיים כמעט בכל מקום

$$h'\left(x\right) = f\left(x\right)-f\left(x-a\right)$$

ממשפט דיני, לכל x בו h גזירה מתקיים

$$h\left(x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}\left(\xi\right)\cdot e^{i\xi x}d\xi=0$$

ולכן $h\overset{\text{a.e.}}{=}0$. בגלל ש$h$ רציפה, מתקיים כי $h=0$. בפרט עבור $x=a$ נקבל

$$h\left(a\right) = \int_{0}^{a} f\left(y\right)dy$$

לא הנחנו דבר על a ולכן נקבל כי לכל $z\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$h\left(z\right) = \int_{0}^{z} f\left(y\right)dy=0$$

לפי משפט לבג מתקיים כי כמעט בכל מקום

$$f\left(z\right) = \frac{d}{dz}\int_{0}^{z} f\left(y\right)dy=0$$

■

2.1.1 דוגמאות

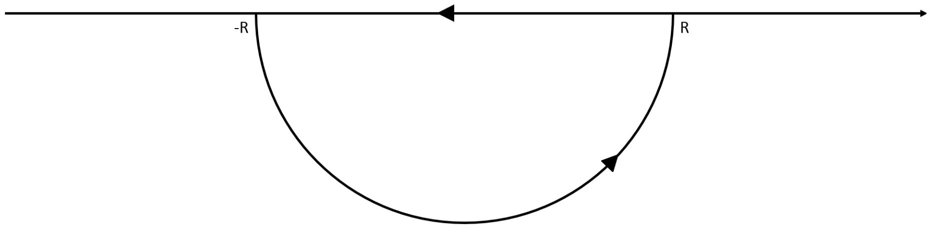
1. נחשב את הטרנפורם פוריה של הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x^{2}+a^{2}}$ כאשר $a>0$: צריך לחשב את האינטגרל

$$\hat{f}\left(\xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{a^{2}+x^{2}}dx$$

נחשב אינטגרל זה באמצעות משפט השארית של פונקציות מרוכבות. אם $\xi>0$, נסתכל על

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-i\xi z}}{z^{2}+a^{2}}dz$$

נסתכל על המסילה



נשים לב כי ל$\operatorname{Im} z \leq 0$ מתקיים כי $\operatorname{Re}(-i\xi z) \leq 0$ ואז האינטגרל על הקשת של המעגל שואף ל0

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-i\xi z}}{z^2+a^2} dz\right| &\leq \pi R \sup_{z\in\Gamma_R} \left|\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+a^2}\right| \\ &\leq \pi \quad \frac{R}{R^2-a^2} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}-\int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\xi z}}{a^2+z^2} dz &= -\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-i\xi z}}{a^2+z^2} dz + 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-ia}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+a^2}\right) \\ \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\xi z}}{a^2+z^2} dz &= -2\pi i \operatorname{Res}_{z=-ia}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+a^2}\right)\end{aligned}$$

נחשב את השארית

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=-ia}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+a^2}\right) &= \lim_{z\to -ia} (z+ai)\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+a^2}\right) \\ &= \lim_{z\to -ia} \frac{e^{-i\xi z}}{z-ai} \\ &= -\frac{e^{-a\xi}}{2ai}\end{aligned}$$

ולכן ל$\xi > 0$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{a^2+x^2} dx \\ &= -2\pi i \left(-\frac{e^{-a\xi}}{2ai}\right) \\ &= \frac{\pi}{a} e^{-a\xi}\end{aligned}$$

באופן דומה עבור $\xi < 0$ מקבלים

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{a^2+x^2} dx \\ \underbrace{}_{y=-x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(-\xi)y}}{a^2+y^2} dx\end{aligned}$$

ו-$-\xi > 0$ ואז

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{a\xi}$$

ובאופן כללי

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$$

2. אפשר לקבל את התוצאה הזאת גם מהכיוון ההפוך: נגדיר $f(x) = e^{-\lambda|x|}$ ל-$\lambda > 0$ אז

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x|}e^{-i\xi x}dx \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}e^{-i\xi x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}e^{-i\xi x}dx \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(\lambda+i\xi)x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-(-\lambda+i\xi)x}dx \\
&= -\frac{e^{-(\lambda+i\xi)x}}{\lambda+i\xi}\Big|_{0}^{\infty} + \frac{e^{-(-\lambda+i\xi)x}}{\lambda-i\xi}\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{\lambda+i\xi} + \frac{1}{\lambda-i\xi} \\
&= \frac{2\lambda}{\lambda^2+\xi^2}
\end{aligned}$$

ל-$x \neq 0$, f גזירה ואז נקבל ממשפט דיני כי

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda|x|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\lambda}{\lambda^2+\xi^2}e^{i\xi x}d\xi \\
\underbrace{}_{\xi=-\eta} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\lambda}{\lambda^2+\eta^2}e^{-i\eta x}d\eta
\end{aligned}$$

ולכן

$$e^{-\lambda|\xi|} = \frac{\lambda}{\pi}\cdot\widehat{\frac{1}{\lambda^2+x^2}}$$

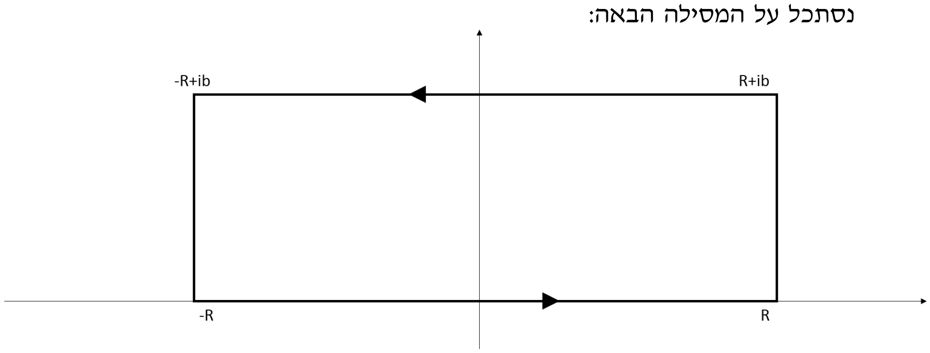
3. $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ כאשר $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}e^{-i\xi x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2-i\xi x}dx \\
&= e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\lambda}\cdot x+\frac{i\xi}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2}dx
\end{aligned}$$

היינו רוצים לבצע החלפת משתנים $y = \sqrt{\lambda}\cdot x+\frac{i\xi}{2\sqrt{\lambda}}$ ולקבל $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^{2}}dy$ אבל זה לא חוקי, כי מידת לבג אינווריאנטית להזזות רק על הישר הממשי, ואילו כאן אנחנו מזיזים במספר מרוכב. נראה כי ניתן להצדיק זאת:
נסמן $b=\frac{\xi}{2\lambda}$ ונרצה לחשב את

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda(z+ib)^{2}}dz \quad = \quad \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib}e^{-\lambda z^{2}}dz$$

נסתכל על המסילה הבאה:



נטען כי האינטגרל על הקווים האנכיים שואף ל0 ואז נקבל כי אכן קיים שוויון בין שני האינטגרלים המבוקשים. נסמן בI את אחד הקטעים האופקיים ($I=\pm R+[0,b]\,i$).
אז

$$\left|\int_{I}e^{-\lambda z^{2}}dz\right| \quad \le \quad |I|\cdot\max_{z\in I}\left|e^{-\lambda z^{2}}\right|$$

מתקיים כי ל$z\in I$, $z=\pm R+iy$ כאשר $0\le y\le b$

$$\operatorname{Re}\left(\pm R+iy\right)^{2} \quad = \quad R^{2}-y^{2}$$

ולכן

$$\operatorname{Re}\left(\lambda z^{2}\right) \quad = \quad \lambda\left(R^{2}-y^{2}\right)\ge\lambda\left(R^{2}-|b|^{2}\right)\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

ואז

$$\begin{aligned}\left|\int_{I}e^{-\lambda z^{2}}dz\right| \quad & \le \quad |b|\cdot\max_{z\in I}\left|e^{-\lambda z^{2}}\right| \\ & \le \quad |b|\cdot e^{-\lambda\left(R^{2}-|b|^{2}\right)}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

מאחר ו $e^{-\lambda z^2}$ פונקציה אנליטית נקבל כי

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-\lambda z^2}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R+ib}^{R+ib} e^{-\lambda z^2}dz \\
\int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} e^{-\lambda z^2}dz &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda z^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\widehat{e^{-\lambda x^2}} &= e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\lambda}\cdot x+\frac{i\xi}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2}dx \\
&= e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}\int_{-\infty+bi}^{\infty+bi} e^{-\lambda z^2}dz \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}
\end{aligned}$$

הערה 2.11 אם נציב $\lambda=\frac{1}{2}$ נקבל "פונקציה עצמית" של טרנספורם פוריה:

$$\widehat{e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}} = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

2.2 משפטי גזירה

משפט 2.12 תהי $f\in L_1(\mathbb{R})$, רציפה בהחלט (כלומר $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$ לכל x) ו$f'\in L_1(\mathbb{R})$. אז מתקיים $\widehat{f'}(\xi)=i\xi\hat{f}(\xi)$.

הוכחה: מאחר וf רציפה בהחלט

$$f(x) = f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$$

בגלל ש$f'\in L_1(\mathbb{R})$, קיים הגבול $\lim_{x\to\pm\infty}\int_0^x f'(t)\,dt$ ולכן קיים הגבול

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = f(0)+\lim_{x\to\pm\infty}\int_0^x f'(t)\,dt$$

ומאחר ו$f\in L_1(\mathbb{R})$ מתקיים כי

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

כעת

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-ix\xi} dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f'(x)\, e^{-ix\xi} dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\left[f(x)\, e^{-ix\xi} \right]_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} -i\xi f(x)\, e^{-ix\xi} dx \right) \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(f(A)\, e^{-ixA} - f(-A)\, e^{ixA} + \int_{-A}^{A} i\xi f(x)\, e^{-ix\xi} dx \right) \\
&= i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\xi} dx \\
&= i\xi \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

■

משפט 2.13 תהי $f \in L_1(\mathbb{R})$, נניח כי $g(x) = -ixf(x)$ מקיימת $g \in L_1(\mathbb{R})$, אז $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ ומתקיים

$$\left(\hat{f}\right)' = \hat{g}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{f}(\xi+\eta) - \hat{f}(\xi)}{\eta} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}}{\eta} \right) \cdot f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{e^{-i\eta x} - 1}{\eta} \right) \cdot f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-i\xi x} \left(\frac{e^{-i\eta x} - 1}{-ix\eta} \right) \cdot f(x)\, dx
\end{aligned}$$

נשים לב שבאופן נקודתי מתקיים

$$\frac{e^{-i\eta x} - 1}{-ix\eta} \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} \frac{d}{dz}\left(e^z\right)|_{z=0} = 1$$

נסמן $\eta x = a$ אז

$$\left| \frac{e^{-ia} - 1}{ia} \right| = \left| \frac{e^{-\frac{ia}{2}} - e^{\frac{ia}{2}}}{a} \right| = \left| \frac{-2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{a} \right| \le 1$$

לכן

$$\left| -ixe^{-i\xi x} \left(\frac{e^{-i\eta x} - 1}{-ix\eta} \right) \cdot f(x) \right| \le |-ix \cdot f(x)|$$

ומאחר ו $ix\cdot f(x)\in L_1(\mathbb{R})$ נקבל ממשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to0}\frac{\hat{f}(\xi+\eta)-\hat{f}(\xi)}{\eta} &= \lim_{\eta\to0}\int_{-\infty}^{\infty}-ixe^{-i\xi x}\left(\frac{e^{-i\eta x}-1}{-ix\eta}\right)\cdot f(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}-ixe^{-i\xi x}\cdot f(x)\cdot\lim_{\eta\to0}\left(\frac{e^{-i\eta x}-1}{-ix\eta}\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}-ixe^{-i\xi x}\cdot f(x)\,dx\\ &= \hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

■

מסקנה 2.14 מהמשפט הראשון שהוכחנו קיבלנו כי אם $f,f'\in L_1(\mathbb{R})$ אז

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\widehat{f'}(\xi)}{i\xi}$$

וניתן להמשיך באינדוקציה: אם $f,f',f'',\ldots,f^{(k)}\in L_1(\mathbb{R})$ אז $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(i\xi)^k}\widehat{f^{(k)}}$.

הערה 2.15 (תרגיל בית): אם $f\in L_1(\mathbb{R})$ו $x^kf(x)\in L_1(\mathbb{R})$ אז לכל $1\le j\le k$ מתקיים כי $x^jf(x)\in L_1(\mathbb{R})$ ובמקרה זה $\hat{f}(\xi)\in C^k(\mathbb{R})$.

מסקנה 2.16 נגדיר

$$S = \left\{f\mid f\in C^{\infty}(\mathbb{R})\mid\forall k,j,x^jf^{(k)}(x)\in L_1(\mathbb{R})\right\}$$

אז מהמשפטים שהוכחנו מתקיים כי אם $f\in S$ אז $\hat{f}\in S$ ואם $\hat{f}\in S$ אז $f\in S$. בנוסף מתקיים כי ההעתקה $f\mapsto\hat{f}$ היא על.

הוכחה: לכל k מתקיים $f^{(k)}\in L_1(\mathbb{R})$ ואז $\widehat{f^{(k)}}(\xi)=(i\xi)^k\cdot\hat{f}(\xi)\in L_1(\mathbb{R})$. מתקיים כי לז j כללי

$$\frac{d^j}{d\xi^j}\left(\hat{f}(\xi)\right) = \widehat{(-ix)^jf}(x)(\xi)\in L_1(\mathbb{R})$$

ולכן נקבל לכל j,k

$$\begin{aligned}\left(\widehat{(-ix)^jf(x)}\right)^{(k)}(\xi) &= (i\xi)^k\cdot\widehat{(-ix)^jf}(x)(\xi)\\ &= i^k\cdot\xi^k\cdot\left(\hat{f}\right)^{(j)}(\xi)\in L_1(\mathbb{R})\end{aligned}$$

נראה כי ההעתקה על וזה כבר יראה כי אם $\hat{f}\in S$ אז גם $f\in S$ (ההעתקה חח"ע ממשפט היחידות). תהי $g\in S$, נמצא $f\in S$ כך ש$g=\hat{f}$. אנחנו מחפשים f כך ש

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx$$

מאחר וכל הפונקציות בS גזירות, הן בפרט מקיימות את תנאי דיני ולכן מתקיים

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(x)\,e^{ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(-x)\,e^{-ix\xi}dx \end{aligned}$$

ואז מתקיים כי $f(x)=\frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x)\in S$ היא מקור כנדרש. ■

2.3 יחידות אפרוקסימטיביות

הגדרה 2.17 $K_\lambda\in L_1(\mathbb{R})$ נקראת יחידה אפרוקסימטיבית אם

1. לכל λ מתקיים

$$\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x)\,dx = 1$$

2.

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\|K_\lambda\|_1 < \infty$$

3. לכל $\delta>0$

$$\int_{|x|\geq\delta}|K_\lambda(x)|\,dx \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

טענה 2.18 תהי $f\in L_p(\mathbb{R})$ $(1\leq p<\infty)$ ונסמן ל$y\in\mathbb{R}$, $f_y(x)=f(x-y)$ אז

$$f_y \overset{(L_p)}{\underset{y\to 0}{\longrightarrow}} f$$

כלומר ההעתקה $f_y\mapsto y$ העתקה רציפה מ$\mathbb{R}$ לL_p.

הוכחה: לכל $A>0$ נגדיר

$$f^A = \chi_{[-A,A]}\cdot f$$

אז מתקיים כי $f \overset{(L_p)}{\underset{A\to\infty}{\longrightarrow}} f^A$. יהי $\varepsilon>0$, אז קיים A כך ש

$$\begin{aligned} g(x) &= f^A(x)=\chi_{[-A,A]}\cdot f(x) \\ \|f-g\|_p &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

מתקיים $g\in L_p\left[-A,A\right]$ וקיימת פונקציה רציפה $h\in C\left[-A,A\right]$ כך ש-$h\left(\pm A\right)=0$ ו-$\left\Vert g-h\right\Vert _p<\varepsilon$ ואז מתקיים

$$\left\Vert f_y-f\right\Vert _p \leq \left\Vert \left(f-g\right)_y-\left(f-g\right)\right\Vert _p+\left\Vert \left(g-h\right)_y-\left(g-h\right)\right\Vert _p+\left\Vert h_y-h\right\Vert _p$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\left\Vert \left(f-g\right)_y-\left(f-g\right)\right\Vert _p & \leq \left\Vert \left(f-g\right)_y\right\Vert _p+\left\Vert f-g\right\Vert _p\\ & = \left\Vert f-g\right\Vert _p+\left\Vert f-g\right\Vert _p\\ & \leq \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

ובאופן דומה

$$\left\Vert \left(g-h\right)_y-\left(g-h\right)\right\Vert _p \leq 2\varepsilon$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left\Vert f_y-f\right\Vert _p & \leq \left\Vert \left(f-g\right)_y-\left(f-g\right)\right\Vert _p+\left\Vert \left(g-h\right)_y-\left(g-h\right)\right\Vert _p+\left\Vert h_y-h\right\Vert _p\\ & \leq 2\varepsilon+2\varepsilon+\left\Vert h_y-h\right\Vert _p\\ & = 4\varepsilon+\left\Vert h_y-h\right\Vert _p\end{aligned}$$

מתקיים

$$\left|h_y\left(x\right)-h\left(x\right)\right| = \left|h\left(x-y\right)-h\left(x\right)\right|\leq\omega\left(h,y\right)$$

כאשר

$$\omega\left(h,y\right) = \sup_{x,\left|t\right|\leq y}\left|h\left(x-t\right)-h\left(x\right)\right|\underset{y\to0}{\longrightarrow}0$$

(כי h רציפה על הקטע הסגור $\left[-2A,2A\right]$ ולכן רציפה בו במידה שווה) וכעת

$$\begin{aligned}\left\Vert h_y-h\right\Vert _p^p & = \int_{-2A}^{2A}\left|h\left(x-y\right)-h\left(x\right)\right|^p dx\\ & \leq 4A\cdot\omega\left(h,y\right)^p\underset{y\to0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

לכן $\left\Vert h_y-h\right\Vert _p\underset{y\to0}{\longrightarrow}0$ ומכאן

$$\overline{\lim_{y\to0}}\left\Vert f_y-f\right\Vert _p \leq 4\varepsilon$$

מאחר ו-ε שרירותי מתקיים כי

$$\lim_{y\to0}\left\Vert f_y-f\right\Vert _p = 0$$

■

הגדרה 2.19 יהיו f,g מדידות. אם כמעט לכל x מתקיים כי $f\left(x-y\right)g\left(y\right)\in L_{1}\left(\mathbb{R},dy\right)$, נגדיר את הקונבולוציה $f*g$ להיות

$$\left(f*g\right)\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}}f\left(x-y\right)g\left(y\right)dy$$

הערה 2.20 אם $f,g\in L_{1}\left(\mathbb{R}\right)$ ראינו כי אכן מוגדרת הקונבולוציה.

טענה 2.21 יהי $1<p<\infty$ ו$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. נניח כי $f\in L_{p}\left(\mathbb{R}\right)$ ו$g\in L_{q}\left(\mathbb{R}\right)$ אז

$$\left|\left(f*g\right)\left(x\right)\right| \leq \left\Vert f\right\Vert _{p}\cdot\left\Vert g\right\Vert _{q}$$

הערה 2.22 (תרגיל בית): $f*g\in C\left(\mathbb{R}\right)$

טענה 2.23 יהי $p<\infty$, יהיו $f\in L_{p}\left(\mathbb{R}\right)$, $g\in L_{1}\left(\mathbb{R}\right)$ אז $f*g$ מוגדרת ומתקיים

$$\left\Vert f*g\right\Vert _{p} \leq \left\Vert f\right\Vert _{p}\cdot\left\Vert g\right\Vert _{1}$$

הוכחה: יהי $A>0$. נסתכל על האינטגרל

$$\left(\int_{-A}^{A}\left(\int_{-A}^{A}\left|f\left(x-y\right)g\left(y\right)\right|dy\right)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ראינו במקרה זה כי אם נסמן $F\left(x,y\right)=\left|f\left(x-y\right)g\left(y\right)\right|$ אז מתקיים

$$\begin{aligned}\left(\int_{-A}^{A}\left|\int_{-A}^{A}F\left(x,y\right)dy\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} & \leq \int_{-A}^{A}\left(\int_{-A}^{A}\left|F\left(x,y\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\\
 & \leq \int_{-A}^{A}\left(\int_{-A}^{A}\left|f\left(x-y\right)g\left(y\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\\
 & = \int_{-A}^{A}\left(\left|g\left(y\right)\right|^{p}\int_{-A}^{A}\left|f\left(x-y\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\\
 & = \int_{-A}^{A}\left|g\left(y\right)\right|\left(\int_{-A}^{A}\left|f\left(x-y\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\\
 & \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|g\left(y\right)\right|\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x-y\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\\
 & = \left\Vert g\right\Vert _{1}\cdot\left\Vert f\right\Vert _{p}
\end{aligned}$$

(ראה גם ההוכחה של הגרסה של המשפט על המעגל).
לכן

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F\left(x,y\right)dy\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|g\|_{1}\cdot\|f\|_{p}\\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x-y\right)g\left(y\right)\right|dy\right)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|f\|_{p}\cdot\|g\|_{1}\end{aligned}$$

ואז כמעט לכל x מתקיים כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x-y\right)g\left(y\right)\right|dy < \infty$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{p}^{p} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(f*g\right)\left(x\right)\right|^{p}dx\\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x-y\right)g\left(y\right)\right|dy\right)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \|f\|_{p}^{p}\cdot\|g\|_{1}^{p}\end{aligned}$$

כנדרש. ■

משפט 2.24 נניח כי $f\in L_{p}\left(\mathbb{R}\right)$ ו-K_{λ} יחידה אפרוקסימטיבית אז

$$K_{\lambda}*f \xrightarrow[\lambda\to\infty]{(L_{p})} 0$$

הוכחה: נכתוב

$$\begin{aligned}\left(K_{\lambda}*f-f\right)\left(x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-y\right)K_{\lambda}\left(y\right)dy-\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)K_{\lambda}\left(y\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(f_{y}-f\right)\left(x\right)\cdot K_{\lambda}\left(y\right)dy\end{aligned}$$

אז

$$
\begin{aligned}
\|K_\lambda * f - f\|_p &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |K_\lambda * f - f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f_y - f)(x) \cdot K_\lambda(y) \, dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)| \cdot |K_\lambda(y)| \, dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
\underbrace{}_{\text{Minkowski inequality}} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (|f(x-y) - f(x)| \cdot |K_\lambda(y)|)^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |K_\lambda(y)| \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} (|f(x-y) - f(x)|)^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |K_\lambda(y)| \cdot \|f_y - f\|_p \, dy
\end{aligned}
$$

כעת יהי $\delta > 0$, מתקיים

$$
\begin{aligned}
\|K_\lambda * f - f\|_p &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |K_\lambda(y)| \cdot \|f_y - f\|_p \, dy \\
&\leq \int_{|y|\geq\delta} |K_\lambda(y)| \cdot \|f_y - f\|_p \, dy + \int_{|y|\leq\delta} |K_\lambda(y)| \cdot \|f_y - f\|_p \, dy
\end{aligned}
$$

נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
\int_{|y|\geq\delta} |K_\lambda(y)| \cdot \|f_y - f\|_p \, dy &\leq \int_{|y|\geq\delta} \left|K_\lambda(y) \left(\|f\|_p + \|f_y\|_p\right)\right| dy \\
&= 2\|f\|_p \cdot \int_{|y|\geq\delta} |K_\lambda(y)| \, dy
\end{aligned}
$$

בנוסף קיים קבוע $M > 0$ כך ש $\|K_\lambda\|_1 \leq M$ לכל λ ואז

$$
\begin{aligned}
\int_{|y|\leq\delta} |K_\lambda(y)| \cdot \|f_y - f\|_p \, dy &\leq \sup_{|y|\leq\delta} \|f_y - f\|_p \cdot \int_{|y|\leq\delta} |K_\lambda(y)| \, dy \\
&\leq M \cdot \sup_{|y|\leq\delta} \|f_y - f\|_p
\end{aligned}
$$

מתקיים מרציפות ההעתקה

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} &\to L_p(\mathbb{R}) \\
y &\mapsto f_y
\end{aligned}
$$

כי

$$
M \cdot \sup_{|y|\leq\delta} \|f_y - f\|_p \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0
$$

בנוסף מהתכונה של יחידה אפרוקסימטיבית

$$\int_{|y|\geq\delta}|K_{\lambda}(y)|\cdot\|f_{y}-f\|_{p}\,dy \quad\leq\quad 2\|f\|_{p}\cdot\int_{|y|\geq\delta}|K_{\lambda}(y)|\,dy\underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow}0$$

כעת

$$\begin{aligned}
\|K_{\lambda}*f-f\|_{p} &\leq \int_{|y|\geq\delta}|K_{\lambda}(y)|\cdot\|f_{y}-f\|_{p}\,dy+\int_{|y|\leq\delta}|K_{\lambda}(y)|\cdot\|f_{y}-f\|_{p}\,dy\\
&\leq 2\|f\|_{p}\cdot\int_{|y|\geq\delta}|K_{\lambda}(y)|\,dy+M\cdot\sup_{|y|\leq\delta}\|f_{y}-f\|_{p}\\
\overline{\lim}_{\lambda\to\infty}\|K_{\lambda}*f-f\|_{p} &\leq \overline{\lim}_{\lambda\to\infty}2\|f\|_{p}\cdot\int_{|y|\geq\delta}|K_{\lambda}(y)|\,dy+\overline{\lim}_{\lambda\to\infty}M\cdot\sup_{|y|\leq\delta}\|f_{y}-f\|_{p}\\
&= M\cdot\sup_{|y|\leq\delta}\|f_{y}-f\|_{p}
\end{aligned}$$

ע"י מעבר לגבול כאשר $\delta\longrightarrow0$ מקבלים

$$\overline{\lim}_{\lambda\to\infty}\|K_{\lambda}*f-f\|_{p} \quad=\quad 0$$

■

הערה 2.25 (תרגיל בית): אם $f\in C(\mathbb{R})$ חסומה במידה שווה ורציפה במידה שווה אז $K_{\lambda}*f\rightrightarrows f$.

הגדרה 2.26 תהי f פונקציה מדידה. נאמר כי f אינטגרבילית לוקאלית (סימון: $f\in L_{1}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$) אם לכל $A>0$ מתקיים כי $\chi_{[-A,A]}\cdot f\in L_{1}(\mathbb{R})$.

הערה 2.27 ההגדרה "האמיתית" היא שf אינטגרבילית לוקאלית אם לכל קבוצה קומפקטית K מתקיים $\chi_{K}\cdot f\in L_{1}(\mathbb{R})$.

הגדרה 2.28 נאמר כי $\mathrm{supp}\varphi$ קומפקטית אם קיים $A>0$ כך שכמעט לכל $|x|>A$ מתקיים $\varphi(x)=0$.

נסמן ל$A>0$ וf מדידה את הפונקציה

$$f^{A} \quad:=\quad \chi_{[-A,A]}\cdot f$$

טענה 2.29 תהי $\varphi\in L_{1}(\mathbb{R})$ עם $\mathrm{supp}\varphi\subseteq[-A,A]$ ו$f\in L_{1}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ אז מוגדרת $\varphi*f$ ולכל $R>0$ ו$x\in[-R,R]$ מתקיים

$$(\varphi*f)(x) \quad=\quad \left(\varphi*f^{R+A}\right)(x)$$

הוכחה: יהי $R>0$, אז מאחר וf אינטגרבילית לוקאלית מתקיים $f^{R+A}\in L_1(\mathbb{R})$ ואז מוגדרת הקונבולוציה $f^{R+A}*\varphi$, כלומר כמעט לכל x מתקיים

$$f^{R+A}(x-y)\varphi(y) \quad\in\quad L_1(\mathbb{R},dy)$$

לכל $x\in[-R,R]$ מתקיים

$$f(x-y)\varphi(y) \quad=\quad f^{R+A}(x-y)\varphi(y)$$

לכל $y\in\mathbb{R}$ ואז

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\varphi(y)\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty}f^{R+A}(x-y)\varphi(y)\,dy\\ (f*\varphi)(x) &= \left(f^{R+A}*\varphi\right)(x)\end{aligned}$$

■

הגדרה 2.30 נסמן $\varphi\in C_K^m(\mathbb{R})$ אם $\varphi\in C^m(\mathbb{R})$ וקיים $A>0$ כך ש$\text{supp}\varphi\subseteq[-A,A]$.

טענה 2.31 תהי $f\in L_1(\mathbb{R})$ ו$\varphi\in C_K^m(\mathbb{R})$, אז $f*\varphi\in C^m(\mathbb{R})$

הוכחה: נראה ראשית ל$m=0$ ול$m=1$:

1. $m=0$:

$$\begin{aligned}(\varphi*f)(x+h)-(\varphi*f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+h-y)f(y)-\varphi(x-y)f(y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)]\cdot f(y)\,dy\end{aligned}$$

מאחר וφ רציפה בעלת תומך קומפקטי מתקיים כי $L=\sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi(y)|<\infty$ ואז

$$|\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)| \quad\le\quad 2L$$

לכן מתקיים כי

$$|\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)|\cdot|f(y)| \quad\le\quad 2L\cdot|f(y)|\in L_1(\mathbb{R})$$

וממשפט ההתכנסות הנשלטת מתקיים כי

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}((\varphi*f)(x+h)-(\varphi*f)(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to0}[\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)]\cdot f(y)\,dy\\ &= 0\end{aligned}$$

2. $m=1$:

$$\frac{(\varphi*f)(x+h)-(\varphi*f)(x)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)}{h}\right]\cdot f(y)\,dy$$

לכל x,y מתקיים כי $\frac{\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)}{h}=\varphi'(x-y+\theta h)$ כאשר $0\leq\theta\leq1$ ולכן

$$\left|\frac{\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)}{h}\right| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi'(y)|=L<\infty$$

כי $\varphi\in C_K^1(\mathbb{R})$ ולכן φ' רציפה בעלת תומך קומפקטי. נקבל שוב כי

$$\left|\left[\frac{\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)}{h}\right]\cdot f(y)\right| \leq L\cdot|f(y)|\in L_1(\mathbb{R})$$

ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת ניתן להחליף גבול ואינטגרל ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{(\varphi*f)(x+h)-(\varphi*f)(x)}{h} &= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to0}\left[\frac{\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)}{h}\right]\cdot f(y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(x-y)\cdot f(y)\,dy\\ &= \varphi'*f\in C(\mathbb{R})\end{aligned}$$

3. ל־m כללי נקבל באינדוקציה כי

$$\frac{d^m}{dx^m}(\varphi*f) = \left(\frac{d^m}{dx^m}\varphi\right)*f$$

■

מסקנה 2.32 אם $\varphi\in C_K^m(\mathbb{R})$ ו־$f\in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ אז $\varphi*f\in C^m(\mathbb{R})$.

הוכחה: לכל $R>0$ כך ש $\text{supp}\varphi\subseteq[-R,R]$ ולכל $x\in[-R,R]$ מתקיים $(\varphi*f)(x)=\varphi*f^{2R}$ כאשר $f^{2R}=f\cdot\chi_{[-2R,2R]}\in L_1(\mathbb{R})$ ואז מהטענה הקודמת מתקיים כי

$$\varphi*f^{2R} \in C^m(\mathbb{R})$$

ואז לכל $x\in(-R,R)$, גם $\varphi*f$ גזירה ברציפות ב־x, m פעמים. ■

טענה 2.33 תהי $\varphi\in L_1(\mathbb{R})$ ו־$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,dy=1$, אז המשפחה $K_\lambda(x)=\lambda\cdot\varphi(\lambda\cdot x)$ היא יחידה אפרוקסימטיבית.

הוכחה:

.1

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}K_{\lambda}(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\lambda\cdot\varphi(\lambda\cdot x)\,dx\\ \underbrace{}_{\lambda x=y} &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,dy\\ &= 1\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}\|K_{\lambda}\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}|\lambda\cdot\varphi(\lambda x)|\,dx\\ \underbrace{}_{\lambda x=y} &= \int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(y)|\,dy\\ &= M<\infty\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\delta}|\lambda\cdot\varphi(\lambda\cdot x)|\,dx &\underbrace{=}_{y=\lambda x} \int_{|y|>\lambda\cdot\delta}|\varphi(y)|\,dy\\ &= \int_{\lambda\delta}^{\infty}|\varphi(y)|\,dy+\int_{-\infty}^{-\lambda\delta}|\varphi(y)|\,dy \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

■

מסקנה 2.34 $C_K^{\infty}(\mathbb{R})$ צפוף ב-$L_p(\mathbb{R})$ ל-$1\le p<\infty$.

הוכחה: נסמן

$$\psi(x) = \begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

אז $\psi\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. נגדיר

$$\varphi_0(x) = \psi(x+1)\,\psi(-x+1)$$

אז $\varphi_0\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ו-$\mathrm{supp}\varphi_0\subseteq[-1,1]$ ולכל $x\in(-1,1)$ מתקיים $\varphi_0(x)>0$. נגדיר

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx}$$

נגדיר $K_{\lambda}(x)=\lambda\varphi(\lambda x)$, מהטענה האחרונה זו יחידה אפרוקסימטיבית. לכן לכל $f\in L_{p}^{K}=\{f\in L_{p}\mid\exists A>0,\mathrm{supp}f\subseteq[-A,A]\}$ מתקיים כי

$$K_{\lambda}*f \quad \overset{(L_p)}{\longrightarrow} \quad f$$

בגלל ש$f\in L_{p}^{K}(\mathbb{R})\subseteq L_{1}(\mathbb{R})$ ו$K_{\lambda}\in C_{K}^{\infty}$, מתקיים כי $K_{\lambda}*f\in C_{K}^{\infty}(\mathbb{R})$ (כי אם $\mathrm{supp}f\subseteq[-R,R]$ ו$\mathrm{supp}\varphi\subseteq[-A,A]$ אז $\mathrm{supp}(f*\varphi)\subseteq[-(R+A),R+A]$).
לכן $C_{k}^{\infty}(\mathbb{R})$ צפוף ב$L_{p}^{K}(\mathbb{R})$ ומתקיים כי $L_{p}^{K}(\mathbb{R})$ צפוף ב$L_{p}(\mathbb{R})$. (כי ל$f\in L_{p}(\mathbb{R})$ מתקיים כי $f^{A}\in L_{p}^{K}$ לכל $A>0$ ו$f^{A}\underset{A\to\infty}{\overset{(L_p)}{\longrightarrow}}f$) ■

מסקנה 2.35 $S=\left\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R})\mid\forall n,m,x^{m}f^{(n)}(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0\right\}$ צפוף בL_{p} ל$1\leq p<\infty$.

הערה 2.36 ההגדרה הזאת שקולה להגדרה הקודמת של S.

משפט 2.37 תהי $H\in L_{1}(\mathbb{R})$ ו

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty}H(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

אז לכל $f\in L_{1}(\mathbb{R})$ מתקיים

$$(f*h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}H(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}(f*h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\left(\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi)e^{iy\xi}d\xi\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)H(\xi)e^{iy\xi}d\xi\right)dy\end{aligned}$$

נשים לב כי הפונקציה $f(x-y)H(\xi)e^{iy\xi}$ אינטגרבילית לפי ξ וy:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x-y)|\cdot|H(\xi)|)\,d\xi dy = \|H\|_{1}\cdot\|f\|_{1}<\infty$$

לכן ממשפט Fubini-Tonelli ניתן להחליף סדר אינטגרציה:

$$
\begin{aligned}
(f*h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,H(\xi)\,e^{iy\xi}d\xi\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,H(\xi)\,e^{iy\xi}dy\right)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,e^{iy\xi}dy\right)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\,e^{ix\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,e^{-i(x-y)\xi}dy\right)d\xi \\
\underbrace{}_{x-y=z} &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\,\hat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi
\end{aligned}
$$

■

2.4 סכימה של טרנספורם פוריה

משפט 2.38 נניח כי $H\in L_1(\mathbb{R})$ וכי

$$
\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi
$$

מקיימת $\varphi\in L_1(\mathbb{R})$ ו $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=1$. אז לכל $f\in L_1(\mathbb{R})$ מתקיים כי

$$
f = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\hat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi
$$

כאשר השוויון הוא שוויון בL_1, כלומר כמעט בכל מקום.

הוכחה: נגדיר

$$
\begin{aligned}
\varphi_\lambda(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\cdot e^{ix\xi}d\xi \\
\underbrace{}_{\eta=\frac{\xi}{\lambda}} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda H(\eta)\cdot e^{ix\lambda\eta} \\
&= \lambda\cdot\varphi(\lambda x)
\end{aligned}
$$

מתקיים מטענה קודמת כי $\varphi_\lambda(x)$ היא יחידה אפרוקסימטיבית ולכן

$$
f*\varphi_\lambda \quad \xrightarrow[\lambda\to\infty]{(L_1)} \quad f
$$

אבל ראינו בטענה הקודמת כי

$$
f*\varphi_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\hat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi
$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\hat{f}\left(\xi\right)e^{ix\xi}d\xi\quad\underset{\lambda\to\infty}{\overset{(L_1)}{\longrightarrow}}\quad f$$

■

2.4.1 דוגמאות

1. גרעין של Fejer:

$$H\left(\xi\right)=\left(1-\left|\xi\right|\right)_{+}=\begin{cases}0 & \left|\xi\right|\geq1\\1-\left|\xi\right| & \left|\xi\right|\leq1\end{cases}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\varphi\left(x\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\left|\xi\right|\right)e^{i\xi x}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot2\cdot\int_{0}^{1}\left(1-\xi\right)\cos\left(\xi x\right)d\xi\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\left(1-\xi\right)\left(\frac{\sin\left(\xi x\right)}{x}\right)'d\xi\\ &= \frac{1}{\pi}\left(1-\xi\right)\left(\frac{\sin\left(\xi x\right)}{x}\right)|_{\xi=0}^{\xi=1}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{\sin\left(\xi x\right)}{x}d\xi\\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos\left(\xi x\right)}{x^{2}}\right)|_{\xi=0}^{\xi=1}\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos\left(x\right)}{x^{2}}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^{2}\geq0\end{aligned}$$

מתקיים כי $\varphi\in L_{1}\left(\mathbb{R}\right)$ וגזירה ולכן מקיימת את תנאי דיני ולכן

$$\hat{\varphi}=\left(1-\left|\xi\right|\right)_{+}$$

ומתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x\right)dx=\hat{\varphi}\left(0\right)=1$$

מסקנה 2.39 מהמשפט האחרון, לכל $f\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים כמעט לכל x

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\left|\xi\right|}{\lambda}\right)_{+}\hat{f}\left(\xi\right)e^{i\xi x}d\xi$$

2. גרעין פואסון: $H\left(\xi\right)=e^{-\left|\xi\right|}$. במקרה זה ראינו כי

$$\begin{aligned}\varphi\left(x\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left|\xi\right|}e^{i\xi x}d\xi\\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^{2}+1}\geq0\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}\varphi_{\lambda}\left(x\right) &= \lambda\cdot\varphi\left(\lambda x\right)\\ &= \frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{\lambda^{2}x^{2}+1}\end{aligned}$$

מהמשפט האחרון מתקיים כמעט לכל x

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\left|\xi\right|}{\lambda}}\hat{f}\left(\xi\right)e^{i\xi x}d\xi$$

3. סכימה של גאוס:

$$H\left(\xi\right) = e^{-\frac{\xi^{2}}{2}}$$

ראינו כי

$$H\left(\xi\right) = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^{2}}{2}}}$$

מאחר ופונקציות אלה מקיימות את תנאי דיני נקבל כי

$$\begin{aligned}\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^{2}}{2}} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^{2}}{2}}e^{ix\xi}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H\left(\xi\right)e^{ix\xi}d\xi\end{aligned}$$

שוב מתקיים תנאי דיני ולכן

$$\hat{\varphi}\left(0\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x\right)dx=H\left(0\right)=1$$

ולכן לכל $f\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים לכמעט לכל x

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^{2}}\hat{f}\left(\xi\right)e^{ix\xi}d\xi$$

2.5 טרנספורם פוריה בL_2

תהי $f \in S$ אז ממשפט דיני ניתן לכתוב

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

ראינו כי במקרה זה $\hat{f} \in S$ ובפרט $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. נשתמש במשפט על קונבולוציה עם $H = \frac{1}{2\pi}\hat{f}$, ו-$(h = f)$. אז לכל $g \in L_1(\mathbb{R})$

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

אם $f, g \in S$ אז מתקיים בנקודה 0:

$$\begin{aligned}(f * g)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(0-y)g(y)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(-x)dx\end{aligned}$$

נסמן $h(y) = \overline{g(-y)}$ אז

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(-x)}e^{-ix\xi}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(x)}e^{ix\xi}dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-ix\xi}dx} \\ &= \overline{\hat{h}(\xi)}\end{aligned}$$

קיבלנו כי לכל $f, h \in S$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{h}}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{h(x)}dx$$

נסתכל על פונקציות מS, נגדיר לכל $f \in S \subseteq L_2$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$$

אז לכל $f, g \in S$ מתקיים

$$\langle f, g\rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle$$

בפרט

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$$

(ע"י בחירת $f=g$).
זהו אופרטור איזומטרי חסום. ראינו קודם כי S צפוף בL_2 ולכן יש הרחבה יחידה של $\mathcal{F}$ על כל $L_2(\mathbb{R})$, לאופרטור המורחב קוראים אופרטור פוריה.

טענה 2.40 תהי $f\in L_2^K(\mathbb{R})$, אז מתקיים

$$\mathcal{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ix\xi}dx$$

הערה 2.41 נשים לב כי $L_2^K\subseteq L_1^K$ ולכן האינטגרל הנ"ל מוגדר.

הוכחה: תהי K_n יחידה אפרוקסימטיבית כך שלכל n מתקיים $K_n\in C_K^\infty\subseteq S$. נגדיר $f_n=K_n*f$. מטענה שהוכחנו מתקיים כי $f_n\in C_K^\infty(\mathbb{R})$ (לf_n תומך קומפקטי כקונבולוציה של שתי פונקציות עם תומך קומפקטי: באופן כללי אם $\mathrm{supp}f\subseteq[-A,A]$ ו$\mathrm{supp}K_n\subseteq[-L,L]$ אז מתקיים $\mathrm{supp}(f*K_n)\subseteq[-(A+L),A+L]$). נסמן

$$g_n(\xi) = (\mathcal{F}f_n)(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,e^{-ix\xi}dx$$

כעת $f\in L_2(\mathbb{R})$ וK_n יחידה אפרוקסימטיבית ולכן

$$f_n = K_n*f\xrightarrow{(L_2)}f$$

מצד שני $f\in L_1(\mathbb{R})$ ולכן

$$f_n \xrightarrow{(L_1)} f$$

לפי ההגדרה של ההרחבה של $\mathcal{F}$ מתקיים

$$\mathcal{F}f = L_2-\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}f_n=L_2-\lim_{n\to\infty}g_n$$

נסמן

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ix\xi}dx$$

מאחר ו $f_n\xrightarrow{(L_1)}f$ מתקיים כי הסדרה $\{g_n\}$ מתכנסת במידה שווה ולכן $g_n\rightrightarrows g$. הסבר:

$$(g_n-g)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f_n(x)-f(x))\,e^{-ix\xi}dx$$

ולכן לכל ξ

$$|(g_n-g)(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|\,dx$$

כאשר צד ימין שואף ל0 כאשר $n \to \infty$ ללא תלות בξ.
לכל $A > 0$ מתקיים כי $\chi_{[-A,A]} \cdot g_n \rightrightarrows \chi_{[-A,A]} \cdot g$ ואז בפרט

$$\chi_{[-A,A]} \cdot g_n \quad \overset{(L_2)}{\longrightarrow} \quad \chi_{[-A,A]} \cdot g$$

מצד שני

$$\chi_{[-A,A]} \cdot g_n \quad \overset{(L_2)}{\longrightarrow} \quad \chi_{[-A,A]} \cdot \mathcal{F}f$$

ולכן

$$\chi_{[-A,A]} \cdot \mathcal{F}f \quad \overset{(L_2)}{=} \quad \chi_{[-A,A]} \cdot g$$

לכל $A > 0$ ולכן $g \overset{(L_2)}{=} \mathcal{F}f$. ■

משפט 2.42 (Plancherel):

1. לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\mathcal{F}f \quad = \quad L_2 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-ix\xi} dx$$

2. לכל $g \in L_2(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\mathcal{F}^* g = \mathcal{F}^{-1} g \quad = \quad L_2 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} g(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi$$

הוכחה:

1. תהי $f \in L_2(\mathbb{R})$. נגדיר $f_N = \chi_{[-N,N]} \cdot f$, מתקיים $f_N \in L_2^K$. בנוסף

$$f_N \quad \overset{(L_2)}{\longrightarrow} \quad f$$

ואז

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f &= \lim_{N\to\infty} \mathcal{F}f_N \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-ix\xi} dx\end{aligned}$$

2. תהי $g \in L_2(\mathbb{R})$. אנו יודעים כי לכל $f \in S$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}f &= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi\end{aligned}$$

לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\langle f, \mathcal{F}^* g\rangle = \langle \mathcal{F}f, g\rangle$$

כעת

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}f, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi)\cdot\overline{g(\xi)}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(x)\,e^{-ix\xi}dx\cdot\overline{g(\xi)}d\xi \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(x)\,e^{-ix\xi}dx\cdot\overline{g(\xi)}d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,\overline{g(\xi)}e^{-ix\xi}dxd\xi\end{aligned}$$

נשים לב כי מאי־שוויון קושי־שוורץ האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\,\overline{g(\xi)}e^{-ix\xi}\right|dxd\xi \le \|f\|_{L_2}\cdot\|g\|_{L_2} < \infty$$

ולכן נוכל לכתוב

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}f, g\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M}^{M}\int_{-N}^{N} f(x)\,\overline{g(\xi)}e^{-ix\xi}dxd\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-N}^{N} f(x)\int_{-M}^{M}\overline{g(\xi)}e^{-ix\xi}d\xi dx \\ &= \lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-N}^{N} f(x)\,\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M}^{M} g(x)\,e^{ix\xi}d\xi}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} g(x)\,e^{ix\xi}d\xi}dx\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathcal{F}^* g = L_2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} g(x)\,e^{ix\xi}d\xi$$

■

משפט 2.43 (Plancherel): תהי $f \in L_2(\mathbb{R})$. אז

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \overset{\text{a.e.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-i\xi x} - 1}{-ix} \right) f(x)\, dx$$

הוכחה: נסמן $g(\xi) = \chi_{[0,t]}(\xi)$ ל-$t > 0$.

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{F}^* g \rangle$$

מהנוסחה הקודמת

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^* g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{ixt} - 1}{ix} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}f, g \rangle &= \langle f, \mathcal{F}^* g \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{e^{-ixt} - 1}{-ix} dx \end{aligned}$$

מצד שני

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \int_0^t (\mathcal{F}f)(\xi)\, d\xi$$

ממשפט לבג מתקיים כמעט בכל מקום

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t (\mathcal{F}f)(\xi)\, d\xi \right) = (\mathcal{F}f)(t)$$

ולכן

$$(\mathcal{F}f)(t) \overset{\text{a.e.}}{=} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{e^{-ixt} - 1}{-ix} dx \right)$$

■

2.6 ספקטרום של אופרטור פוריה

נצטמצם לרגע למחלקה S. נגדיר אופרטורים

$$\begin{aligned} Df &= \frac{d}{dx}f \\ (Mf)(x) &= x \cdot f(x) \end{aligned}$$

אז מתקיים

$$\begin{aligned} \mathcal{F}D &= iM\mathcal{F} \\ D\mathcal{F} &= \mathcal{F}(-iM) = -i\mathcal{F}M \\ \mathcal{F}M &= iD\mathcal{F} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathcal{F}D^2 &= \mathcal{F}DD \\ &= iM\mathcal{F}D \\ &= iM(iM\mathcal{F}) \\ &= -M^2\mathcal{F} \end{aligned}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned} \mathcal{F}M^2 &= \mathcal{F}MM \\ &= iD\mathcal{F}M \\ &= iD(iD)\mathcal{F} \\ &= -D^2\mathcal{F} \end{aligned}$$

נגדיר

$$L = D^2 - M^2$$

אז

$$\begin{aligned} \mathcal{F}L &= \mathcal{F}\left(D^2 - M^2\right) \\ &= -M^2\mathcal{F} + D^2\mathcal{F} \\ &= L\mathcal{F} \end{aligned}$$

נחפש ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של L, במקום של $\mathcal{F}$. נניח כי f פונקציה עצמית

של L. נכתוב

$$\begin{aligned}
f(x) &= w(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\
f''(x) &= w''(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 2w'(x)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' + w(x)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'' \\
&= w''(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 2w'(x)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot x\right) + w(x)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot x^2 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(w''(x) - 2w'(x)x + w(x)\left(x^2-1\right)\right) \\
(Lf)(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(w''(x) - 2w'(x)x + w(x)\left(x^2-1\right)\right) - x^2\left(e^{-\frac{x^2}{2}}w(x)\right) \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(w''(x) - 2w'(x)x - w(x)\right)
\end{aligned}$$

נחפש פונקציות עצמיות: נכתוב

$$\begin{aligned}
(Lf)(x) &= \lambda\cdot f(x) \\
e^{-\frac{x^2}{2}}\left(w''(x) - 2w'(x)x - w(x) - \lambda\cdot w(x)\right) &= 0
\end{aligned}$$

ומאחר ו$e^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0$ לכל x נקבל

$$w''(x) - 2w'(x)x - w(x)(\lambda+1) = 0$$

נחפש פתרון מהצורה $w(x)$ = פולינום:

$$\begin{aligned}
w(x) &= \sum_{k=0}^{N} c_k x^k \\
w'(x) &= \sum_{k=1}^{N} k c_k x^{k-1} \\
w''(x) &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1) c_k x^{k-2}
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{N} k c_k x^{k-1} - (\lambda+1)\sum_{k=0}^{N} c_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{N-2}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{N} 2k c_k x^k - (\lambda+1)\sum_{k=0}^{N} c_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{N-2}\left((k+2)(k+1)c_{k+2} - (2k+(\lambda+1))c_k\right)x^k \\
&\quad - (2(N-1)+(\lambda+1))c_{N-1}x^{N-1} - (2N+(\lambda+1))c_N x^N
\end{aligned}$$

נניח כי הפולינום אכן ממעלה N (כלומר $c_N \neq 0$) ונקבל:

$$\begin{aligned}(2N+(\lambda+1))\,c_N &= 0\\ 2N+(\lambda+1) &= 0\\ \lambda &= -(2N+1)\end{aligned}$$

מכאן גם

$$\begin{aligned}(2(N-1)+(\lambda+1))\,c_{N-1} &= 0\\ (2N-2-2N)\,c_{N-1} &= 0\\ c_{N-1} &= 0\end{aligned}$$

נוכל לקבל נוסחה רקורסיבית ליתר המקדמים:

$$\begin{aligned}(k+2)(k+1)\,c_{k+2}-(2k+(\lambda+1))\,c_k &= 0\\ (k+2)(k+1)\,c_{k+2} &= (2k+(\lambda+1))\,c_k\\ (k+2)(k+1)\,c_{k+2} &= 2(k-N)\,c_k\\ c_k &= -\frac{(k+2)(k+1)}{2(N-k)}c_{k+2}\end{aligned}$$

לסיכום: לכל $N \geq 0$ שלם קיים פולינום $p_N(x)$ מתוקן ממעלה N כך שהפונקציה $f_N(x)=p_N(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ היא פונקציה עצמית של L עם ערך עצמי $\lambda_N=-(2N+1)$. לf_n קוראים פונקציות הרמיט (Hermite functions) ולp_n קוראים פולינומי הרמיט (Hermite polynomials).

הערה 2.44 (דוגמה): נכתוב את המקדמים הראשונים של $p_n(x)$:

$$p_n(x) = x^n-\frac{n(n-1)}{2\cdot 2}x^{n-2}+\frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 4}x^{n-4}+\dots$$

יהיו $f,g\in S$ אז מתקיים

$$\begin{aligned}\langle Lf,g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\,\overline{g(x)}dx-\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\overline{g(x)}dx\\ \int_{-\infty}^{\infty}(f'(x))'\,\overline{g(x)}dx &= f'(x)\,\overline{g(x)}\mid_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\overline{g'(x)}dx\\ &= 0-\int_{-\infty}^{\infty}(f(x))'\,\overline{g'(x)}dx\\ &= -f(x)\,\overline{g''(x)}\mid_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g''(x)}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g''(x)}dx\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\langle Lf,g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\overline{g(x)}dx - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\overline{g(x)}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g''(x)}dx - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\overline{g(x)}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g''(x)}dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{x^2 g(x)}dx\\ &= \langle f,Lg\rangle\end{aligned}$$

מסקנה 2.45 f_n אורתוגונליות: ל-$n \neq m$:

$$\begin{aligned}\lambda_n\langle f_n,f_m\rangle &= \langle Lf_n,f_m\rangle\\ &= \langle f_n,Lf_m\rangle\\ &= \lambda_m\langle f_n,f_m\rangle\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}(\lambda_n-\lambda_m)\langle f_n,f_m\rangle &= 0\\ \langle f_n,f_m\rangle &= 0\end{aligned}$$

טענה 2.46 $\{f_n\}$ הן פונקציות עצמיות של $\mathcal{F}$:

הוכחה: נסמן $E_n = \operatorname{span}\{f_0,\ldots,f_n\}$ כלומר $f \in E_n \iff e^{\frac{x^2}{2}}\cdot f(x)$ פולינום ממעלה $\leq n$. נשים לב כי $\mathcal{F}E_n \subseteq E_n$: מספיק להראות כי $x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \in E_n$ (באינדוקציה נקבל כי $x^k e^{-\frac{x^2}{2}} \in E_k \subseteq E_n$ לכל $k<n$)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\right) &= \mathcal{F}M^n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\\ &= (iD)^n\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\\ &= i^n D^n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\in E_n\end{aligned}$$

נסתכל על הצמצום של $\mathcal{F},L$ על המרחב E_n:

$$\begin{aligned}L_n &= L\restriction_{E_n}\\ \mathcal{F}_n &= \mathcal{F}\restriction_{E_n}\end{aligned}$$

נבדוק כי f_n וקטור עצמי של $\mathcal{F}_n$ (ושוב באינדוקציה, f_k וקטור עצמי של $\mathcal{F}_k$ ולכן של $\mathcal{F}_n$):
נסמן

$$\begin{aligned}g_n &= \mathcal{F}_n f_n\\ &= \mathcal{F}f_n\end{aligned}$$

כעת

$$\begin{aligned}L_n g_n &= L_n \mathcal{F}_n f_n\\ &= \mathcal{F}_n L_n f_n\\ &= \mathcal{F}_n \lambda_n f_n\\ &= \lambda_n \cdot g_n\end{aligned}$$

קיבלנו כי g_n פונקציה עצמית של L עם ערך עצמי λ_n, אבל ראינו קודם כי כזה יש רק אחד בE_n (עד כדי קבוע) ולכן

$$g_n = c_n \cdot f_n$$

ומכאן $\mathcal{F}_n f_n = c_n \cdot f_n$. נחשב את c_n:

$$e^{\frac{x^2}{2}} f_n(x) = x^n + q(x)$$

כאשר $q(x)$ ממעלה $\leq n-1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} f_n &= \mathcal{F}\left(x^n \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \underbrace{\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} q(x)\right)}_{\in E_{n-1}}\\ &= (iD)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \underbrace{h(x)}_{\in E_{n-1}}\\ &= (-i)^n x^n e^{-\frac{x^2}{2}} + \underbrace{h_1(x)}_{\in E_{n-1}}\end{aligned}$$

מכאן

$$\begin{aligned}\mathcal{F} f_n &= (-i)^n x^n e^{-\frac{x^2}{2}} + \ldots\\ &= c_n x^n e^{-\frac{x^2}{2}} + \ldots\end{aligned}$$

ומכאן $c_n = (-i)^n$, כלומר f_n פונקציה עצמית של $\mathcal{F}$ עם ערך עצמי $(-i)^n$. ■

מסקנה 2.47 הערכים העצמיים של $\mathcal{F}$ במרחב E_n הם $\left\{(-i)^k \mid 0 \leq k \leq n\right\}$.

האם אלו כל הערכים עצמיים? האם f_n הן כל הפונקציות העצמיות? הצטמצמנו למרחב $\mathrm{span}\left\{x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}_{k=0}^{\infty}$. ייתכן ויש עוד פונקציות עצמיות. נראה שלא וכי הרשימה שלמה.

משפט 2.48 יהי $\delta > 0$ ונניח כי $f(x) e^{\delta|x|} \in L_1(\mathbb{R})$ אז מתקיים כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixz} dx \in A(\{z \mid |\mathrm{Im} z| < \delta\})$$

כלומר פונקציה אנליטית בתחום הנ"ל.

הוכחה: יהי z מהתחום הנ"ל. נסמן $\delta > |\mathrm{Imz}| = b$. נבחר $\varepsilon > 0$ כך ש$\delta > b + 2\varepsilon$. נסמן

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixz} dx$$

אז

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}(z+w) - \hat{f}(z)}{w} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(z+w)} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(z)} dx}{w} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixz} \left(\frac{e^{-ixw} - 1}{w} \right) dx \end{aligned}$$

לפונקציה תחת האינטגרל יש גבול נקודתי: לכל x מתקיים

$$f(x) e^{-ixz} \left(\frac{e^{-ixw} - 1}{w} \right) \underset{w \to 0}{\longrightarrow} -ixf(x) e^{-ixz}$$

נסמן

$$F(x) = f(x) e^{-ixz} \left(\frac{e^{-ixw} - 1}{w} \right)$$

אז מתקיים

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |f(x)| \cdot \left| e^{-ixz} \right| \cdot \left| \frac{e^{-ixw} - 1}{wx} \right| \cdot |x| \\ &= |f(x)| \cdot e^{x \mathrm{Im} z} \cdot \left| \frac{e^{-ixw} - 1}{wx} \right| \cdot |x| \\ &\leq |f(x)| \cdot e^{|x| \cdot b} \cdot \left| \frac{e^{-ixw} - 1}{wx} \right| \cdot |x| \end{aligned}$$

נסמן $v = -iwx$ אז

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{v} - 1}{v} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{n-1}}{n!} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|v|^{n-1}}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|v|^{n}}{(n+1)!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|v|^{n}}{n!} \\ &= e^{|v|} \\ &= e^{|wx|} \end{aligned}$$

נבחר $\varepsilon > |w|$ ואז מתקיים

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{v}-1}{v}\right| &\leq e^{\varepsilon|x|} \\
|F(x)| &\leq |f(x)|\cdot e^{b\cdot|x|}\cdot\left|\frac{e^{-ixw}-1}{wx}\right|\cdot|x| \\
&\leq |f(x)|\cdot e^{b\cdot|x|}\cdot e^{\varepsilon\cdot|x|}\cdot|x| \\
&= |f(x)|\cdot e^{(b+\varepsilon)|x|}\,|x| \\
&\leq |f(x)|\cdot e^{(\delta-\varepsilon)|x|}\,|x| \\
&= |f(x)|\cdot e^{\delta|x|}e^{-\varepsilon|x|}\,|x|
\end{aligned}$$

מתקיים כי

$$C=\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-\varepsilon|x|}\,|x| \quad < \quad \infty$$

ולכן

$$\begin{aligned}
|F(x)| &\leq |f(x)|\cdot e^{\delta|x|}e^{-\varepsilon|x|}\,|x| \\
&\leq C\cdot|f(x)|\cdot e^{\delta|x|}
\end{aligned}$$

מהנחתנו $|f(x)|\cdot e^{\delta|x|}\in L_1(\mathbb{R})$ ואז ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to0}\frac{\hat{f}(z+w)-\hat{f}(z)}{w} &= \lim_{w\to0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ixz}\left(\frac{e^{-ixw}-1}{w}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(-ix)\,f(x)\,e^{-ixz}dx
\end{aligned}$$

■

משפט 2.49 המערכת של הרמיט $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ שלמה ב$L_2(\mathbb{R})$.

הוכחה: נניח כי $h\in L_2(\mathbb{R})$ ומקיימת $h\perp x^{n}e^{-\frac{x^{2}}{2}}$ לכל $n\geq0$ ונוכיח כי $h\overset{\text{a.e.}}{\equiv}0$. נגדיר פונקציית עזר φ

$$\varphi(z) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^{2}}{2}}\cdot h(x)\cdot e^{-ixz}dx$$

נבדוק כי זו פונקציה שלמה. נסמן

$$\psi(x) \quad = \quad e^{-\frac{x^{2}}{2}}\cdot h(x)$$

ונראה כי ψ מקיימת את התנאי מהמשפט הקודם לכל $\delta>0$:

$$\psi(x)\cdot e^{\delta\cdot|x|} \quad = \quad h(x)\cdot e^{-\frac{x^{2}}{2}+\delta\cdot|x|}$$

מתקיים

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}+\delta\cdot|x|}\right)^2\cdot x^2 \quad = \quad e^{-x^2+2\delta|x|}\cdot x^2 \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן $e^{-\frac{x^2}{2}+\delta\cdot|x|}\in L_2(\mathbb{R})$. אנו בתנאי המשפט הקודם כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x)\cdot e^{\delta\cdot|x|}\right|dx \quad \le \quad \|h\|_2\cdot\left\|e^{-\frac{x^2}{2}+\delta|x|}\right\|_2<\infty$$

ולכן מהמשפט הקודם

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n}\varphi(z)\mid_{z=0} &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot h(x)\cdot e^{-ixz}\cdot(-ix)^n\,dx\mid_{z=0}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot h(x)\cdot(-ix)^n\,dx\\ &= (-i)^n\left\langle h(x),e^{-\frac{x^2}{2}}x^n\right\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

ממשפט היחידות בפונקציות מרוכבות נקבל כי $\varphi(z)=0$. מיחידות טרנספורם פוריה מתקיים כי $e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot h(x)\overset{\text{a.e.}}{\equiv}0$ ולכן $h(x)\overset{\text{a.e.}}{\equiv}0$. ■

2.7 שימושים

2.7.1 פונקציות הרמוניות בחצי המישור

מחפשים פונקציה $U(x,y)$ ל$x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ ו$y\ge 0$, כך ש

$$\Delta U \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}U+\frac{\partial^2}{\partial y^2}U=0$$

וגם $U(x,0)=f(x)$. נניח כי לכל y הפונקציה $U(\cdot,y)$ היא L_1 וכן $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ של $U(\cdot,y)$ הן L_1. (ייתכן ונרצה אפילו יותר, נרצה שנוכל לגזור כמה פעמים שנצטרך)
נסמן ל$U(x,y)$ כזאת את טרנספורם הפוריה לפי המשתנה x ב$\mathcal{F}_xU$. אז

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{F}_x(\Delta U)\\ &= \mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U+\frac{\partial^2}{\partial y^2}U\right)\\ &= (-i\xi)^2\,\mathcal{F}_xU+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{F}_xU\end{aligned}$$

נסמן

$$V(\xi,y) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty}U(x,y)\,e^{-i\xi x}dx$$

במקום לחקור ולחפש פונקציה U, נחפש פונקציה V עם התנאים

$$-\xi^2 V(\xi,y)+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}V\right)(\xi,y) = 0$$

נפתור לפי y: נסמן $\xi=a$ ו$\varphi(y)=V(\xi,y)$ אז נקבל

$$\frac{d^2}{dy^2}\varphi(y) = a^2\varphi(y)$$

למשוואה זו יש שני פתרונות יסודיים והפתרון הכללי הוא מהצורה

$$\varphi(y) = c_1\cdot e^{ay}+c_2\cdot e^{-ay}$$

נניח $\varphi\in L_1$ ולכן נקבל כי הפתרון הכללי הוא מהצורה

$$V(\xi,y) = c(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}$$

כאשר $y\to 0$ אנו רוצים $f(x)\longrightarrow U(x,y)$ ולכן

$$V(\xi,0) = c(\xi)=\hat{f}(\xi)$$

כלומר

$$V(\xi,y) = \hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}$$

מנוסחת היפוך פוריה

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}e^{i\xi x}d\xi$$

נחשב

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\xi|y}e^{i\xi x}d\xi &= \int_{-\infty}^{0}e^{-|\xi|y}e^{i\xi x}d\xi+\int_{0}^{\infty}e^{-|\xi|y}e^{i\xi x}d\xi\\ &= \int_{-\infty}^{0}e^{\xi y}e^{i\xi x}d\xi+\int_{0}^{\infty}e^{-\xi y}e^{i\xi x}d\xi\\ &= \frac{e^{\xi y}e^{i\xi x}}{y+ix}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=0}+\frac{e^{-\xi y}e^{i\xi x}}{-y+ix}\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty}\\ &= \frac{1}{y+ix}+\frac{1}{y-ix}\\ &= \frac{2y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

ומכאן

$$e^{-|\xi|y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2y}{x^2+y^2}e^{i\xi x}dx$$

נסמן

$$P_y(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

מהמשפט שהיה לנו על $H \in L_1(\mathbb{R})$ ו-$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ מתקיים (אם נבחר $H(\xi) = e^{-|\xi| y}$)

$$\begin{aligned}(h*f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot H(\xi)\cdot e^{i\xi x}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi| y}\cdot e^{i\xi x}d\xi\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}U(x,y) &= (h*f)(x) \\ &= (P_y*f)(x)\end{aligned}$$

ננסח ונוכיח כעת בצורה פורמלית:

משפט 2.50 נניח כי $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. נסמן $U(x,y) = (f*P_y)(x)$ אז מתקיים כי $U \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, בנוסף $\Delta U = 0$ ב-$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, y>0\}$ ומתקיים

$$U(\cdot,y) \underset{y\to 0}{\rightrightarrows} f(\cdot)$$

(כאשר $C_0 = \left\{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\right\}$)

הוכחה: יהי $\delta > 0$. מהמשפט על H ו-h ($H(\xi) = e^{-|\xi| y}$, $h(x) = P_y(x)$) מתקיים כי

$$\begin{aligned}U(x,y) &= (f*P_y)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi| y}e^{ix\xi}d\xi\end{aligned}$$

אז ל-$y > \delta$ מתקיים

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi| y}e^{ix\xi} \\ \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial^m}{\partial y^m}\phi\right)(x,y) &= \hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi| y}e^{ix\xi}\left(-|\xi|\right)^m (i\xi)^n \\ &= \phi(x,y)\cdot\left(-|\xi|\right)^m (i\xi)^n\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial^m}{\partial y^m}\phi\right)(x,y)\right| &= |\xi|^{m+n}|\phi(x,y)| \\ &\le C\cdot|\xi|^{m+n}\cdot e^{-\delta\cdot|\xi|} \in L_1(\mathbb{R}, d\xi)\end{aligned}$$

זוהי מז'ורנטה אינטגרבילית שאינה תלויה ב-x, y. לפי משפט לייבניץ ניתן לגזור תחת האינטגרל ולכן נקבל כי $U(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

בפרט

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}\cdot e^{i\xi x}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}\cdot e^{i\xi x}\right)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}\cdot e^{i\xi x}(i\xi)^2\,d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}\cdot e^{i\xi x}\xi^2 d\xi\end{aligned}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}\cdot e^{i\xi x}|\xi|^2\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}\cdot e^{i\xi x}\xi^2 d\xi\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x,y) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}\cdot e^{i\xi x}\xi^2 d\xi \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}\cdot e^{i\xi x}\xi^2 d\xi \\ &= 0\end{aligned}$$

ולכן $U(x,y)$ היא פונקציה הרמונית כנדרש.
לבסוף נשים לב כי $P_y(x)$ יחידה אפרוקסימטיבית (כאשר $y\to 0$):

$$\begin{aligned}P_y(x) &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\ &= \frac{1}{y}P_1\left(\frac{x}{y}\right)=\lambda\cdot P_1(\lambda\cdot x)\end{aligned}$$

כאשר $\lambda=\frac{1}{y}$ וראינו משפט שמשפחת פונקציות מהצורה הנ"ל היא יחידה אפרוקסימטיבית, ולכן מהמשפט על יחידות אפרוקסימטיביות:

$$U(x,y) = (f*P_y)(x)\underset{y\to 0}{\rightrightarrows}f(x)$$

■

2.8 מרחבים אינווריאנטיים תחת הזזה

$E\subseteq L_2(\mathbb{R})$ תת מרחב סגור נקרא אינווריאנטי ביחס לכל ההזזות אם לכל $t\in\mathbb{R}$ ולכל $f\in E$ מתקיים כי $f_t(x)=f(x-t)$ מקיים $f_t\in E$.

מסתבר שיותר קל לאפיין תת־מרחבים כאלה בעזרת התמרות פוריה

טענה 2.51 לכל t מתקיים $(\mathcal{F}f_t)(\xi)=e^{-it\xi}\cdot(\mathcal{F}f)(\xi)$

הוכחה: נגדיר

$$(M_tf)(\xi)=f_{(t)}(\xi) \quad = \quad e^{-it\xi}\cdot f(\xi)$$

ונגדיר

$$S_tf \quad = \quad f_t$$

הטענה טוענת ש

$$\mathcal{F}S_t \quad = \quad M_t\mathcal{F}$$

אנו יודעים להוכיח זאת ל$f\in L_2(\mathbb{R})\cap L_1(\mathbb{R})$: ל$f$ כנ"ל מתקיים

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\xi x}dx\\
(\mathcal{F}f_t)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\,e^{-i\xi x}dx\\
\underbrace{}_{y=x-t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,e^{-i\xi(y+t)}dy\\
&= e^{-i\xi t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,e^{-i\xi y}dy\\
&= e^{-i\xi t}\cdot(\mathcal{F}f)(\xi)\\
&= (M_t\mathcal{F}f)(\xi)
\end{aligned}$$

מתקיים לכל $f\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$ כי

$$(M_t\mathcal{F}-\mathcal{F}S_t)f \quad = \quad 0$$

מאחר האופרטורים $\mathcal{F},M_t,S_t$ הם אופרטורים חסומים בL_2, גם ההרכבות $M_t\mathcal{F}$ ו$\mathcal{F}S$ הן חסומות ולכן גם האופרטור

$$M_t\mathcal{F}-\mathcal{F}S_t \quad \in \quad \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$$

הוא אופרטור חסום. מאחר ו$L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$ צפופה ב$L_2(\mathbb{R})$, מתקיים כי $M_t\mathcal{F}-\mathcal{F}S_t=0$
■

מסקנה 2.52 תהי $V\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה מדידה. נגדיר

$$E_V \quad = \quad \left\{f\in L_2(\mathbb{R}) \mid (\mathcal{F}f)\restriction_V \overset{\text{a.e.}}{\equiv} 0\right\}$$

אז E_V תת מרחב האינווריאנטי להזזות.

הוכחה: תהי $f \in E_V$ אז $0 \overset{\text{a.e.}}{\equiv} (\mathcal{F}f) \restriction_V$. כעת $\mathcal{F}f_t = e^{-it}\mathcal{F}f$ ואז

$$(\mathcal{F}f_t) \restriction_V = \left(e^{-it}\mathcal{F}f\right) \restriction_V \overset{\text{a.e.}}{\equiv} 0$$

■

משפט 2.53 (Wiener) נניח כי $E \subseteq L_2(\mathbb{R})$ תת־מרחב סגור האינווריאנטי להזזות. אז קיימת $V \subseteq \mathbb{R}$ מדידה כך ש־$E = E_V$.

הוכחה: נגדיר

$$F = \mathcal{F}E$$

ויהי $P = P_F$ היטל אורתוגונלי על F. לכל t מתקיים

$$M_t F \subseteq F$$

כי

$$\begin{aligned} M_t f &= M_t \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} f \\ &= \mathcal{F}\underbrace{S_t \underbrace{\left(\mathcal{F}^{-1}f\right)}_{\in E}}_{\in E} \in F \end{aligned}$$

תהי $f \in L_2(\mathbb{R})$. אם $g \in F$ אז מתקיים $f - Pf \perp g$

$$\langle f - Pf, g\rangle = 0$$

וגם לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $M_t g \in F$ ואז

$$\begin{aligned} \langle f - Pf, M_t g\rangle &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} (f - Pf)(\xi)\, \overline{g(\xi)\, e^{-it\xi}} d\xi &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} (f - Pf)(\xi)\, \overline{g(\xi)} e^{it\xi} d\xi &= 0 \end{aligned}$$

מתקיים כי $f - Pf \in L_2(\mathbb{R})$ ומתקיים כי $g \in L_2(\mathbb{R})$ ולכן $(f - Pf)(\xi)\,\overline{g(\xi)} \in L_1(\mathbb{R})$ (מאי־שוויון קושי־שוורץ). מכאן קיבלנו כי טרנספורם פוריה של $(f - Pf)(\xi)\,\overline{g(\xi)}$ שווה זהותית ל־0. ממשפט היחידות של טרנספורם פוריה זה מראה כי

$$(f - Pf)(\xi)\,\overline{g(\xi)} \overset{\text{a.e.}}{\equiv} 0$$

ונוכל לרשום

$$(f - Pf)(\xi) \cdot g(\xi) \overset{\text{a.e.}}{\equiv} 0$$

כלומר קיבלנו כי לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ ו־$g \in F$ מתקיים

$$(f - Pf)(\xi) \cdot g(\xi) \overset{\text{a.e.}}{\equiv} 0$$

ל$h \in L_2(\mathbb{R})$ מתקיים $Ph \in L_2(\mathbb{R})$ ולכן לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ ו$h \in L_2(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\begin{aligned}(f - Pf)(\xi) \cdot (Ph)(\xi) &\overset{\text{a.e.}}{\equiv} 0 \\ f(\xi) \cdot (Ph)(\xi) &\overset{\text{a.e.}}{\equiv} (Pf)(\xi) \cdot (Ph)(\xi)\end{aligned}$$

ע"י החלפת f בh נקבל

$$h(\xi) \cdot (Pf)(\xi) \overset{\text{a.e.}}{\equiv} (Ph)(\xi) \cdot (Pf)(\xi)$$

ולכן לכל $f, h \in L_2(\mathbb{R})$ מתקיים

$$f(\xi) \cdot (Ph)(\xi) \overset{\text{a.e.}}{\equiv} h(\xi) \cdot (Pf)(\xi)$$

נבחר $h \in L_2(\mathbb{R})$ שלא מתאפסת באף נקודה, למשל $h = \frac{1}{1+|x|}$. אז נוכל לחלק בh ולקבל לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$(Pf)(\xi) \overset{\text{a.e.}}{\equiv} \frac{(Ph)(\xi)}{h(\xi)} \cdot f(\xi)$$

נסמן $\varphi(\xi) = \frac{(Ph)(\xi)}{h(\xi)}$ - זוהי פונקציה קונקרטית שלא תלויה בf (תלויה בh שבחרנו). לכן

$$(Pf)(\xi) \overset{\text{a.e.}}{\equiv} \varphi(\xi) \cdot f(\xi)$$

מאחר וP היטל אורתוגונלי מתקיים

$$P^2 = P$$

ולכן לכל f

$$\begin{aligned}(Pf)(\xi) &= \varphi(\xi) \cdot f(\xi) \\ \left(P^2 f\right)(\xi) &= (P(Pf))(\xi) = \varphi(\xi)^2 \cdot f(\xi)\end{aligned}$$

ומכאן

$$\varphi(\xi) \cdot f(\xi) = \varphi(\xi)^2 \cdot f(\xi)$$

נבחר f שאינה מתאפסת ונקבל כי לכמעט כל ξ מתקיים $\varphi(\xi) = \varphi(\xi)^2$ ולכן $\varphi(\xi)$ פונקציית אינדיקטור. מאחר ו$Ph, h \in L_2(\mathbb{R})$ ו$h \neq 0$ מתקיים כי φ מדידה ולכן $V = \varphi^{-1}(0)$ היא קבוצה מדידה. מאחר ו $g \in F \iff$ מתקיים $g = Pg$ ולכן $g(\xi) = \varphi(\xi) \cdot g(\xi)$ נקבל כי $g \in F \iff g|_V \overset{\text{a.e.}}{\equiv} 0$. ■

הערה 2.54 (תרגיל):

1. לתאר את כל המרחבים הסגורים האינווריאנטיים להזזות ב$L_2(\mathbb{T})$ (לחזור על ההוכחה, להסתכל על מקדמי פוריה במקום על הטרנספורם פוריה).
2. לתאר את כל המרחבים הסגורים האינווריאנטיים להזזות ב$l_2(\mathbb{Z})$ (הזזה של $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ בk היא הסדרה $(a_{n+k})_{n=-\infty}^{\infty}$).

2.9 נוסחת פואסון (Poisson summation formula)

תהי $f\in L_1(\mathbb{R})$. נגדיר

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2n\pi)$$

טענה 2.55 טור זה מתכנס (בהחלט) כמעט בכל מקום

הוכחה: נגדיר $u_n(x)=|f(x+2\pi n)|$ (ל־$\pi\le x\le\pi$) אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x)\,dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)\,dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+2\pi n)|\,dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} |f(x)|\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx \underbrace{<}_{f\in L_1(\mathbb{R})} \infty
\end{aligned}$$

ולכן מאחר והאינטגרל סופי, ממשפט ההתכנסות המונוטונית $\varphi\in L_1[-\pi,\pi]$, אך φ היא 2π מחזורית מהגדרתה ולכן מתקיים כי $\varphi\in L_1(\mathbb{T})$. בפרט הטור מתכנס בהחלט כמעט בכל מקום. ■

מאחר ו־$\varphi\in L_1(\mathbb{T})$ נוכל לנסות לפתח אותה לטור פוריה. נחשב

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi k)e^{-inx}dx
\end{aligned}$$

ממשפט ההתכנסות הנשלטת, ע"י בחירת המז'ורנטה $|f(x+2\pi k)|$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ שראינו קודם שהיא אינטגרבילית נקבל כי ניתן להחליף את הסכום והאינטגרל ולקבל

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(n) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi k)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו

$$\varphi \quad \sim \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{inx}$$

אם φ מקיימת את אחת התכונות של התכנסות של טור פוריה, אז אפשר לרשום שוויון וקוראים לנוסחה נוסחת הסכימה של פואסון.

הערה 2.56 (דוגמה): נניח כי $f\in S$ אז טור הנגזרות $\sum_{n=-\infty}^{\infty}f'\left(x+2\pi n\right)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה ולכן ניתן לגזור איבר־איבר ולכן φ מקיימת את תנאי דיני. ואז

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(x+2\pi n\right) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{inx}$$

דוגמה חשובה (לפעמים לנוסחה זו קוראים נוסחת הסכימה של פואסון): ע"י הצבת $x=0$ נקבל

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(2\pi n\right) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)$$

הערה 2.57 ניתן להחליף את התנאי בתנאי חלש יותר, למשל $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}\right)$ ו$x^{2}\cdot f\left(x\right),x^{2}\cdot f'\left(x\right)$ פונקציות חסומות ב$\mathbb{R}$. זה מבטיח ש$f\left(x\right),f'\left(x\right)\in L_{2}\left(\mathbb{R}\right)$ וכי טור הנגזרות מתכנס במידה שווה:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|f'\left(x+2\pi n\right)\right| \quad \leq \quad \left|f'\left(0\right)\right|+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{C}{n^{2}}<\infty$$

ולכן מבוחן M של ויירשטראס מתקיים כי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}f'\left(x+2\pi n\right)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה.

2.9.1 דוגמאות

1. נסתכל על

$$f\left(x\right) \quad = \quad \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^{2}+x^{2}}$$

אז ראינו

$$\hat{f}\left(\xi\right) \quad = \quad e^{-a\left|\xi\right|}$$

אמנם $f\notin S$ אבל f מקיימת את התנאי החלש היותר ולכן

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^{2}+\left(x+2\pi n\right)^{2}} \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-a\left|n\right|}e^{inx}$$

אז ע"י הצבת $x=0$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^{2}+\left(2\pi n\right)^{2}} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-a|n|}+\sum_{n=-\infty}^{0}e^{-a|n|}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-an}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{1-e^{-a}}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}}\right)\end{aligned}$$

כלומר ל$a\neq0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^{2}+\left(2\pi n\right)^{2}} = \frac{1}{2a\tanh\left(\frac{a}{2}\right)}$$

2. נבחר

$$\begin{aligned}g\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{x^{2}}{2a}}\\ \hat{g}\left(\xi\right) &= e^{-\frac{a}{2}\xi^{2}}\end{aligned}$$

(הסבר לאיך לזכור את זה: לאחר הנירמול ב$\sqrt{2\pi a}$ מתקיים כי האינטגרל יוצא 1 ולכן $\hat{g}\left(0\right)=1$ ולכן המקדם של $\hat{g}$ הוא 1, ובאשר לa, צריך לזכור ש$a=1$ נותן פונקציה עצמית)

נקבל מנוסחת פואסון

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\exp\left(\frac{-\left(x+2\pi n\right)^{2}}{2a}\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-a\frac{n^{2}}{2}}e^{inx}$$

ראינו בעבר כי אם $U\left(t,x\right)$ מקיימת את משוואת החום במעגל

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}U = \frac{\partial U}{\partial t}$$

עם תנאי השפה

$$U\left(0,x\right) = f\left(x\right)$$

כאשר $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ אז

$$\begin{aligned}U\left(t,x\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)\cdot e^{-n^{2}t}e^{inx}\\ &= \left(f*P_{t}\right)\left(x\right)\end{aligned}$$

כאשר

$$P_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{inx}$$

נציב בנוסחת הסכום שקיבלנו $a = 2t$ ונקבל ביטוי נוסף ל־$P_t(x)$:

$$\begin{aligned} P_t(x) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-(x+2\pi n)^2}{4t}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x+2\pi n)^2}{4t}\right) \end{aligned}$$

כזכור, עבדנו יחסית קשה כדי להראות ש־$P_t(x) \geq 0$, מכאן רואים זאת בבירור, שהרי מדובר בסכום של איברים אי־שליליים.

$$\begin{aligned} U(t,x) &= (f * P_t)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x-y+2\pi n)^2}{4t}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x-(y-2\pi n))^2}{4t}\right) dy \end{aligned}$$

ניתן שוב ע"י מציאת מז'ורנטה מתאימה (למשל החלפת f ב־$|f|$ ושימוש ההתכנסות המונוטונית יתן מז'ורנטה כזאת) להחליף סכום ואינטגרל ולקבל

$$\begin{aligned} U(t,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \exp\left(\frac{-(x-(y-2\pi n))^2}{4t}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi-2\pi n}^{\pi-2\pi n} f(y+2\pi n) \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) dy \\ \underbrace{}_{f\in L_1(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\pi(-1-2n)}^{\pi(1-2n)} f(y) \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) dy \end{aligned}$$

הגדרה 2.58 פונקציית יעקובי היא הפונקציה

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

נציב בנוסחה $x=0$ ו $a=\frac{2\pi}{t}$ ונקבל

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{t}}{2\pi}\exp\left(\frac{-t\left(2\pi n\right)^{2}}{4\pi}\right) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{t}n^{2}}\\ \sqrt{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-t\cdot\pi\cdot n^{2}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{t}n^{2}}\end{aligned}$$

ולכן

$$\sqrt{t}\cdot\theta\left(t\right) = \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

מכאן

מסקנה 2.59 נוסחת ההצמדה של יעקובי:

$$\theta\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

$\theta\left(z\right)$ מוגדרת לכל $z\in\mathbb{C}$ עם $\mathrm{Re}z>0$ והיא אנליטית בתחום זה (מבוחן M של ויירשטראס), כלומר

$$\theta\left(z\right) \in A\left(\left\{z\mid\mathrm{Re}z>0\right\}\right)$$

מאחר ובשוויון $\theta\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\theta\left(\frac{1}{t}\right)$ שני הביטויים ניתנים להרחבה ל$t\in\mathbb{C}$ עם $\mathrm{Re}t>0$, באופן אנליטי, נובע שהשוויון ממשפט היחידות ממשיך ל$z\in\mathbb{C}$ עם $\mathrm{Re}z>0$

$$\theta\left(z\right) = \frac{1}{\sqrt{z}}\cdot\theta\left(\frac{1}{z}\right)$$

הגדרה 2.60 יהיו $p,l\in\mathbb{Z}$ ו$p\neq0$, נסמן

$$G\left(p,l\right) = G_{p}\left(-l\right)=\sum_{r=0}^{p-1}e^{-\frac{i\cdot2\pi\cdot r^{2}\cdot l}{p}}$$

סכום זה נקרא סכום גאוס.

טענה 2.61 תהי $u_{n}=\alpha_{n}+i\beta_{n}$ סדרה עם $u_{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, וכך ש $\alpha_{n}>0$ וכך שקיים $C>0$ כך ש $\left|\frac{\beta_{n}}{\alpha_{n}}\right|<C<\infty$ לכל n . אז

$$\sqrt{u_{n}}\cdot\theta\left(u_{n}+i\frac{2l}{p}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}G\left(p,l\right)$$

הוכחה: נסמן $b=\frac{2l}{p}$ ונסמן $z_m=u_m+ib$ כאשר $u_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$

$$\begin{aligned}
\theta\left(z_m\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi k^2\left(u_m+i\cdot\frac{2l}{p}\right)\right)\\
\underbrace{=}_{k=pn+r} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{p-1}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2\left(u_m+i\cdot\frac{2l}{p}\right)\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{p-1}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2u_m\right)\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2i\cdot\frac{2l}{p}\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{p-1}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2u_m\right)\exp\left(-\pi\cdot r^2\cdot i\cdot\frac{2l}{p}\right)
\end{aligned}$$

הסכומים מתכנסים בהחלט ולכן ניתן להחליף סדר סכימה

$$\begin{aligned}
\theta\left(z_m\right) &= \sum_{r=0}^{p-1}\exp\left(-r^2\cdot\frac{2\pi l}{p}\cdot i\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2u_m\right)\\
&= \sum_{r=0}^{p-1}\exp\left(-r^2\cdot\pi\cdot b\cdot i\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2u_m\right)
\end{aligned}$$

נזכר בנוסחה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\exp\left(\frac{-\left(x+2\pi n\right)^2}{2a}\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-a\frac{n^2}{2}}e^{inx}$$

נחשוב על x כקבוע ממשי. אז נוסחה זו נכונה לכל $a>0$ ומאחר ושני הצדדים מגדירים פונקציות אנליטיות, השוויון ממשיך למספרים מרוכבים. לכן בפרט נקבל כי אם נבחר

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2a}\left(x+2\pi n\right)^2 &= -\pi\left(pn+r\right)^2u_m\\
-\frac{1}{2a}\left(2\pi\right)^2 &= -\pi\frac{p^2}{u_m}\\
a &= \frac{2\pi}{p^2u_m}
\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}
\frac{-\left(x+2\pi n\right)^2}{2a} &= -\pi\left(pn+r\right)^2u_n\\
\frac{-\left(p\left(x+2\pi n\right)\right)^2}{4\pi}u_n &= -\pi\left(pn+r\right)^2u_n\\
\left(p\left(x+2\pi n\right)\right)^2 &= \left(2\pi\left(pn+r\right)\right)^2\\
px &= 2\pi r\\
x &= \frac{2\pi r}{p}
\end{aligned}$$

אז נקבל

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{2\pi}{p^2u_m}}}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2u_m\right) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{p^2u_m}n^2}e^{in\frac{2\pi r}{p}}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}p\sqrt{u_m}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2u_m\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{p^2u_m}n^2}e^{in\frac{2\pi r}{p}}\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2u_m\right) &= \frac{1}{p\sqrt{u_m}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{p^2u_m}n^2}e^{in\frac{2\pi r}{p}}\\ \underbrace{\qquad}_{\left|\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right|<C<\infty} &= \frac{1}{p\sqrt{u_m}}\left(1+o\left(1\right)\right)\end{aligned}$$

מכאן

$$\begin{aligned}\theta\left(z_m\right) &= \sum_{r=0}^{p-1}\exp\left(-r^2\cdot\pi\cdot b\cdot i\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi\left(pn+r\right)^2u_m\right)\\ &= \sum_{r=0}^{p-1}\exp\left(-r^2\cdot\pi\cdot b\cdot i\right)\left(\frac{1}{p\sqrt{u_m}}\left(1+o\left(1\right)\right)\right)\end{aligned}$$

לכן

$$\theta\left(z_m\right) = G\left(p,l\right)\cdot\left(\frac{1}{p\sqrt{u_m}}\left(1+o\left(1\right)\right)\right)$$

מכאן נקבל כי

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}G\left(p,l\right) &= \lim_{m\to\infty}\sqrt{u_m}\theta\left(z_m\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\sqrt{u_m}\cdot\theta\left(u_m+bi\right)\end{aligned}$$

זה מוכיח את המשפט. ■

נמשיך: נסמן

$$w_m = \frac{1}{u_m+ib}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{ib}=-\frac{i}{b}=-i\cdot\frac{p}{2l}=i\cdot 2\left(\frac{-p}{4l}\right)$$

נבחר $u_m=\frac{1}{m}$. ההעתקה $z\to\frac{1}{z}$ היא העתקת מוביוס. כזאת, היא מעבירה ישרים לישרים או מעגלים. מאחר והישר $b+it$ אינו עובר דרך הראשית, תמונתו תחת העתקה זו היא מעגל, ולכן w_m נמצא על מעגל. בנוסף, העתקות מוביוס הן קונפורמיות ולכן שומרות על זוויות, ולכן הזווית בין המעגל ל$\frac{1}{ib}$ על ציר הy זהה לזווית בין הישר $t+ib$ לציר הy. לכן

כאשר w_m קרוב מספיק ל $-\frac{i}{b}$ מתקיים כי הזווית ביניהן היא לכל היותר הזווית בין הישר $t+ib$ לציר הy, ואז אנחנו עומדים בתנאי הטענה. מכאן

$$\begin{aligned}\theta\left(w_m\right) &= \theta\left(\frac{1}{u_m+ib}\right)\\ &= G\left(4l,-p\right)\cdot\left(\frac{1}{4l\sqrt{w_m+\frac{i}{b}}}\left(1+o\left(1\right)\right)\right)\end{aligned}$$

מצד שני נזכר בנוסחה

$$\theta\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{z}\cdot\theta\left(z\right)$$

ואז

$$\theta\left(u_m+ib\right) = \frac{1}{\sqrt{u_m+ib}}\theta\left(\frac{1}{u_m+ib}\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\theta\left(w_m\right)\sqrt{w_m} &= \theta\left(u_m+ib\right)\\ &= \frac{1}{p\sqrt{u_m}}G\left(p,l\right)\cdot\left(1+o\left(1\right)\right)\end{aligned}$$

בסה"כ

$$\begin{aligned}\theta\left(w_m\right) &= \frac{1}{p\sqrt{w_m}\sqrt{u_m}}G\left(p,l\right)\cdot\left(1+o\left(1\right)\right)\\ \frac{1}{4l}\cdot G\left(4l,-p\right) &= \frac{\theta\left(w_m\right)}{\frac{1}{\sqrt{w_m+\frac{i}{b}}}\left(1+o\left(1\right)\right)}\\ &= \frac{\sqrt{w_m+\frac{i}{b}}}{p\sqrt{w_m}\sqrt{u_m}}G\left(p,l\right)\cdot\frac{\left(1+o\left(1\right)\right)}{\left(1+o\left(1\right)\right)}\\ &= \frac{\sqrt{w_m+\frac{i}{b}}}{p\sqrt{w_m}\sqrt{u_m}}G\left(p,l\right)\cdot\frac{\left(1+o\left(1\right)\right)}{\left(1+o\left(1\right)\right)}\end{aligned}$$

ולכן ע"י מעבר לגבול

$$\frac{1}{4l}\cdot G\left(4l,-p\right) = \lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{w_m+\frac{i}{b}}}{p\sqrt{w_m}\sqrt{u_m}}G\left(p,l\right)$$

נחשב את הגבול. מרציפות פונקציית השורש מספיק לחשב את הגבול

$$\begin{aligned}
\frac{w_m + \frac{i}{b}}{w_m \cdot u_m} &= \frac{\frac{1}{u_m+ib} + \frac{i}{b}}{\frac{u_m}{u_m+ib}} \\
&= \frac{\frac{b+i(u_m+ib)}{(u_m+ib)b}}{\frac{u_m}{u_m+ib}} \\
&= \frac{b + i\left(u_m + ib\right)}{bu_m} \\
&= \frac{i}{b}
\end{aligned}$$

ומכאן

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4l} \cdot G\left(4l, -p\right) &= \frac{1}{p}\sqrt{\frac{i}{b}} \cdot G\left(p, l\right) \\
&= \frac{1}{p}\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{b}} \cdot G\left(p, l\right) \\
&= \frac{1}{p}\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\frac{2l}{p}}} \cdot G\left(p, l\right) \\
&= \frac{1}{p}\sqrt{p} \cdot \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2l}} \cdot G\left(p, l\right)
\end{aligned}$$

קיבלנו את הזהות

$$\frac{1}{2\sqrt{2l}}G\left(4l, -p\right) = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot G\left(p, l\right)$$

נציב $l = 1$ ונקבל

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot G\left(4, -p\right) e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot G\left(p, 1\right)$$

מתקיים

$$\begin{aligned}
G\left(4, -p\right) &= \sum_{k=0}^{3} \exp\left(\frac{-\left(k^2 \cdot (-p) \cdot 2\pi i\right)}{4}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \left(i\right)^{p \cdot k^2}
\end{aligned}$$

נניח כי p אי־זוגי ונקבל

$$\begin{aligned}G(4,-p) &= 1+(i)^p+1^p+(i)^p\\ &= 2(1+(i)^p)\\ &= \begin{cases}2(1+i) & (p\equiv 1 \pmod 4)\\ 2(1-i) & (p\equiv -1 \pmod 4)\end{cases}\\ &= \begin{cases}2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} & (p\equiv 1 \pmod 4)\\ 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} & (p\equiv -1 \pmod 4)\end{cases}\end{aligned}$$

מכאן

$$\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}G(4,-p) = \begin{cases}1 & (p\equiv 1 \pmod 4)\\ -i & (p\equiv -1 \pmod 4)\end{cases}$$

ולכן

$$G(p,1) = \sqrt{p}\cdot e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

כלומר

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{-2\pi i\cdot pk^2} = \sqrt{p}\cdot e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

על ידי לקיחת צמוד

$$G(p,-1)=\sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i\cdot pk^2} = \sqrt{p}\cdot (i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

2.10 הסתברות ומשפט הגבול המרכזי

2.10.1 מבוא להסתברות

הגדרה 2.62 מרחב הסתברות הוא מרחב מידה $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ עם $\mu(\Omega)=1$.

הגדרה 2.63 משתנה מקרי הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$ המדידה מבחינת בורל, כלומר אם V פתוחה אז

$$X^{-1}(V) = \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in V\}\in\mathcal{A}$$

(ומכאן לכל $V\in\mathbb{B}$ מתקיים $X^{-1}(V)\in\mathcal{A}$, כאשר $\mathbb{B}$ קבוצות בורל של $\mathbb{R}$ - כלומר הסיגמא־אלגברה הנוצרת ע"י הקבוצות הפתוחות)

הגדרה 2.64 למשתנה מקרי X מגדירים את ההתפלגות של X להיות הפונקציה המוגדרת ל$V\in\mathbb{B}$ באופן הבא:

$$\nu(V) = \mu\left(X^{-1}(V)\right)=\mu(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in V\})$$

אם $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנים מקריים אז מתקיים כי הפונקציה $\binom{X}{Y}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ היא פונקציה למישור. נניח כי לX מתאימה ההתפלגות ν_1 וכי לY מתאימה ההתפלגות ν_2. לכל $W\in\mathbb{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ נגדיר

$$\kappa\left(W\right) = \mu\left(\left\{w\in\Omega\mid\begin{pmatrix}X\left(w\right)\\Y\left(w\right)\end{pmatrix}\in W\right\}\right)$$

נאמר כי X וY בלתי תלויים אם לכל $A,B\in\mathbb{B}\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים

$$\kappa\left(A\times B\right) = \nu_1\left(A\right)\cdot\nu_2\left(B\right)$$

במקרה כזה גם מסמנים

$$\kappa = \nu_1\times\nu_2$$

הגדרה 2.65 ν נקרא התפלגות רציפה אם ν התפלגות מהצורה $d\nu\left(x\right)=f\left(x\right)d\mu\left(x\right)$ כאשר $f\geq0$ ו$\int_\Omega fd\mu=1$.

במידה וX וY משתנים המקריים בעלי התפלגויות רציפות ו$\nu_1\left(x\right)=f_1d\mu\left(x\right)$ ו$\nu_2\left(y\right)=f_2d\mu\left(y\right)$ ההתפלגויות ההמתאימות , וX וY בלתי תלויים, מתקיים כי

$$\left(\nu_1\times\nu_2\right)\left(x,y\right) = f_1\left(x\right)f_2\left(y\right)d\mu\left(x,y\right)$$

.

נניח כי X וY משתנים מקריים בעלי התפלגויות רציפות $f_1d\nu\left(y\right)$ ו$f_2d\nu\left(y\right)$ בהתאמה. מה נוכל לומר על המשתנה $X+Y$? נסתכל על האינטגרל של $X+Y$ (במונחים של הסתברות, על התוחלת של $X+Y$):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi\left(X+Y\right)\right] &= \int_\Omega\varphi\left(X\left(\omega\right)+Y\left(\omega\right)\right)\mu\left(\omega\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\varphi\left(x+y\right)d\nu_1\left(x\right)d\nu_2\left(y\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\varphi\left(x+y\right)f_1\left(x\right)f_2\left(y\right)dxdy\end{aligned}$$

נבחר $\varphi=\chi_A$, אז נקבל

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\omega\mid X\left(\omega\right)+Y\left(\omega\right)\in A\right\}\right) &= \mu\left(\left\{\omega\mid X\left(\omega\right)+Y\left(\omega\right)\in A\right\}\right)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_A\left(x+y\right)f_1\left(x\right)f_2\left(y\right)dxdy\\ \underbrace{}_{x+y=z} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_A\left(z\right)f_1\left(x\right)f_2\left(z-x\right)dxdz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\chi_A\left(z\right)\int_{-\infty}^{\infty}f_1\left(x\right)f_2\left(z-x\right)dxdz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\chi_A\left(z\right)\left(f_1*f_2\right)\left(z\right)dz\end{aligned}$$

ולכן ההתפלגות של X_1+X_2 נוצרת על ידי הקונבולוציה $f_1 * f_2$.
במקרה הכללי מגדירים קונבולוציה של שתי מידות סופיות μ ו-ν על $\mathbb{R}$ באופן הבא

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

נשים לב כי $\chi_A(x+y) = \chi_{A-x}(y)$ ולכן

$$\begin{aligned}
(\mu * \nu)(A) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{A-x}(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{A-x}(y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \nu(A-x)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

2.10.2 פונקציות אופייניות

הגדרה 2.66 פונקציה אופיינית של משתנה מקרי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ היא הפונקציה

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_\Omega e^{itX(\omega)} d\mu(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itX} d\nu(X)
\end{aligned}$$

כאשר ν ההתפלגות של המשתנה המקרי X

אם X,Y משתנים מקריים $X:(\Omega_1,\mu_1)\to\mathbb{R}$, $Y:(\Omega_2,\mu_2)\to\mathbb{R}$
אז $X+Y:(\Omega_1\times\Omega_2,\mu_1\times\mu_2)\to\mathbb{R}$.
אם X,Y משתנים בלתי תלויים (אנו חושבים על $X,Y:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(t) &= \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} e^{it(X(\omega_1)+Y(\omega_2))}\,(d\mu_1\times d\mu_2)(\omega_1,\omega_2) \\
&= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} e^{itX(\omega_1)} e^{itY(\omega_2)} d\mu_1(\omega_1)\, d\mu_2(\omega_2) \\
&= \int_{\Omega_1} e^{itX(\omega_1)} d\mu_1(\omega_1) \int_{\Omega_2} e^{itY(\omega_2)} d\mu_2(\omega_2) \\
&= \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)
\end{aligned}$$

הערה 2.67 הרבה תכונות של טרנספורם פוריה מתקיימות עבור פונקציות אופייניות, אבל הלמה של רימן־לבג למשל אינה נשמרת (לבדוק: להסתכל על המשתנה מקרי δ_{ω_0}).

טענה 2.68 יהי X משתנה מקרי. אז φ_X הפונקציה אופיינית של X היא חסומה.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \int_\Omega e^{itX(\omega)}d\mu(\omega)\\ |\varphi_X(t)| &\leq \int_\Omega \left|e^{itX(\omega)}\right| d\mu(\omega)=1\end{aligned}$$

■

טענה 2.69 נניח כי ν מידה סופית ו $\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,d\nu(x)<\infty$, אז

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\nu(x)$$

מקיימת $\varphi\in C^k(\mathbb{R})$ ו

$$\varphi^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)^j\,d\nu(x)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(t+\Delta)-\varphi(t)}{\Delta} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(t+\Delta)x}-e^{itx}}{\Delta}d\nu(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left(\frac{e^{i\cdot\Delta\cdot x}-1}{\Delta\cdot xi}\right)(ix)\,d\nu(x)\end{aligned}$$

מתקיים

$$\frac{e^{i\cdot\Delta\cdot x}-1}{\Delta\cdot xi} \underset{\Delta\to 0}{\longrightarrow} 1$$

והפונקציה $\frac{e^{it}-1}{t}$ חסומה בכל הישר הממשי (כרגיל: רציפה בסביבה של הראשית ולכן חסומה, ובשאר המישור ברור שחסומה), ולכן קיים $M>0$ כך ש

$$\left|\frac{e^{i\cdot\Delta\cdot x}-1}{\Delta\cdot xi}\right| \leq M$$

לכן

$$\left|e^{itx}\left(\frac{e^{i\cdot\Delta\cdot x}-1}{\Delta\cdot xi}\right)(ix)\right| \leq M|x|$$

מהנחתנו מתקיים כי $\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,d\nu(x)<\infty$ ולכן $M|x|$ מז'ורנטה מתאימה וניתן להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת ולקבל

$$\varphi'(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta)-\varphi(t)}{\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)\,d\nu(x)$$

באותו אופן בדיוק מקבלים באינדוקציה

$$\varphi^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)^j \, d\nu(x)$$

■

מסקנה 2.70 יהי X משתנה מקרי עם $\mathbb{E}[X]=0$ ו־$\mathbb{E}\left[X^2\right]=1$ (כלומר $\int_\Omega X(\omega)\,d\mu(\omega)=0$ ו־$\int_\Omega X(\omega)^2\,d\mu(\omega)=1$) אז מתקיים

$$\varphi_X(t) = 1-\frac{1}{2}t^2+o\left(t^2\right)$$

הוכחה: כפי שראינו, במקרה זה מתקיים כי φ_X גזירה פעמיים ואז מפיתוח טיילור סביב 0

$$\varphi_X(t) = \frac{\varphi_X(0)}{0!}+\frac{\varphi_X'(0)}{1!}t+\frac{\varphi_X''(0)}{2!}t^2+o\left(t^2\right)$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\varphi_X(0) &= 1\\ \varphi_X'(0) &= \mathbb{E}[iX]=i\mathbb{E}[x]=0\\ \varphi_X''(0) &= \mathbb{E}\left[(i)^2X^2\right]=-\mathbb{E}\left[X^2\right]=-1\end{aligned}$$

ואז

$$\varphi_X(t) = 1-\frac{1}{2!}t^2+o\left(t^2\right)$$

■

טענה 2.71 נניח כי X משתנה מקרי ו־$\varphi_X(t)$ פונקציה אופינית שלה. נניח כי $f\in S$, אז מתקיים

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\cdot\varphi_X(t)\,dt$$

הוכחה: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{ix\xi}d\xi$$

מכאן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X)] &= \int_\Omega f(X(\omega))\,d\mu(\omega)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\Omega\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cdot e^{iX(\omega)\cdot\xi}d\xi\right)d\mu(\omega)\end{aligned}$$

נשים לב כי אנו עומדים בתנאים של Fubini-Tonelli: מאחר ו$f \in S$ מתקיים כי $\hat{f}(\xi) \in L_1(\mathbb{R}, d\xi)$ ומאחר ו$\mu(\Omega) = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\xi) \cdot e^{iX(\omega)\cdot\xi} \right| d\xi \right) d\mu(\omega) &= \int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\xi) \right| d\xi \right) d\mu(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\xi) \right| d\xi < \infty
\end{aligned}$$

לכן נוכל להחליף את סדר האינטגרציה:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)] &= \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cdot e^{iX(\omega)\cdot\xi} d\xi \right) d\mu(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cdot \left(\int_\Omega e^{iX(\omega)\cdot\xi} d\mu(\omega) \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cdot \varphi_X(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

■

משפט 2.72 (הגבול המרכזי): תהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרה אינסופית של משתנים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות: $X_n \sim X$. (כלומר המידה $\nu_X = \nu_{X_n}$ זהה לכל $n \in \mathbb{N}$, כאשר $\nu_{X_n}(W) = \mu\left(X_n^{-1}(W)\right)$)
נניח כי $\mathbb{E}[X] = 0$ ו$\mathbb{E}\left[X^2\right] = 1$. אז לכל $-\infty < a, b < \infty$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left\{ a \le \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}} \le b \right\} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

כאשר

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{ a \le \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}} \le b \right\} &= \mu\left(\left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid a \le \left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k(\omega_k)}{\sqrt{n}} \right) \le b \right\} \right) \\
&= \mathbb{E}\left[\chi_{[a,b]}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}} \right) \right]
\end{aligned}$$

הוכחה: נסמן

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k$$

טענה 2.73 אם $f \in S$ אז

$$\mathbb{E}[f(Y_n)] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

הוכחה: מטענה קודמת מתקיים

$$\mathbb{E}\left[f\left(Y_n\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(t\right)\cdot\varphi_{Y_n}\left(t\right)dt$$

נחשב את $\varphi_{Y_n}\left(t\right)$: לפי ההגדרה

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_n}\left(t\right) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(itY_n\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(it\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n}\exp\left(it\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)\right]\\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left(it\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)\right]\\ &= \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n}\end{aligned}$$

ראינו קודם כי ל-t קרוב ל-0 מתקיים

$$\varphi_X\left(t\right) = 1-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)$$

ולכן

$$\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ולכן

$$\varphi_{Y_n}\left(t\right) = \left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n}$$

באופן נקודתי מתקיים שכשנקח גבול נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Y_n}\left(t\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f\left(Y_n\right)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(t\right)\cdot\varphi_{Y_n}\left(t\right)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(t\right)\cdot\left(e^{-\frac{t^2}{2}}+o\left(1\right)\right)dt\end{aligned}$$

נמצא מז'ורנטה מתאימה: נשים לב כי מאחר ו$f \in S$ אז $\hat{f} \in S$ ולכן $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. בנוסף ראינו כי מתקיים כי $|\varphi_{Y_n}(t)| \leq 1$ לכל t ולכן

$$\left|\hat{f}(t) \cdot \varphi_{Y_n}(t)\right| \quad \leq \quad \left|\hat{f}(t)\right|$$

היא מז'ורנטה מתאימה ולכן ניתן להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f(Y_n)\right] \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

נזכר כי אם $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ אז $\hat{g}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ ולכן

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \cdot \hat{g}(t)\, dt \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

כלומר קיבלנו לכל $f \in S$ כי

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f(Y_n)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

■

נשים לב כי לצורך הוכחת המשפט מספיק שנוכל להציב $f = \chi_{[a,b]}$ בטענת עזר. כדי לעשות זאת נקרב את $\chi_{[a,b]}$ ע"י פונקציות מS:

טענה 2.74 לכל $\varepsilon > 0$ קיימות פונקציות f_ε וf^ε כך ש

$$0 \leq f_\varepsilon \quad \leq \quad \chi_{[a,b]} \leq f^\varepsilon \leq 1$$

כך ש$f_\varepsilon, f^\varepsilon \in S$ ו

$$\text{supp}\left(f^\varepsilon - f_\varepsilon\right) \quad \subseteq \quad [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$$

הוכחה: תהי $\varphi \in C_K^\infty$ עם $\text{supp}\varphi \subseteq \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ ו$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1$. נסמן

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t)\, \chi_{[c,d]}(t)\, dt \\ &= \int_c^d \varphi(x-t)\, dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t)\, dt = 1 \end{aligned}$$

נשים לב כי

1. $\operatorname{supp}h \subseteq \left[c-\frac{\varepsilon}{2}, d+\frac{\varepsilon}{2}\right]$: אם $x < c-\frac{\varepsilon}{2}$ אז $h(x)=0$ כי $x-t \leq x-c < \frac{\varepsilon}{2}$. באופן דומה אם $x > d+\frac{\varepsilon}{2}$ אז $x-t \geq x-d > \frac{\varepsilon}{2}$ ואז $\varphi(x-t)=0$ ולכן $h(x)=0$.

2. אם $\left[x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq [c,d]$ אז $\int_c^d \varphi(x-t)\,dt = \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} \varphi(x-t)\,dt = 1$ ולכן $h(x)=1$.

3. $0 \leq h(x) \leq 1$

4. $h \in C^\infty$ (ראינו כי קונבולוציה עם $\varphi \in C^\infty$ נותן פונקציה C^∞)

מכאן ניתן לבחור f_ε ו־f^ε ע"י

$$
\begin{aligned}
f_\varepsilon &= \chi_{\left[a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right]} * \varphi \\
f^\varepsilon &= \chi_{\left[a-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2}\right]} * \varphi
\end{aligned}
$$

אכן $f_\varepsilon \leq \chi_{[a,b]}$, כי $\operatorname{supp}f_\varepsilon \subseteq [a,b]$ מהתכונה הראשונה שרשמנו, ולכן לכל $x \in \operatorname{supp}f_\varepsilon$ מתקיים $f_\varepsilon(x) \leq 1 = \chi_{[a,b]}(x)$ וליתר האיברים שתי הפונקציות שוות ל־0.
מהתכונה השנייה שרשמנו מתקיים כי $\chi_{[a,b]} \leq f^\varepsilon$ כי אם $x \in [a,b]$ אז $\left[x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq \left[a-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2}\right]$ ולכן $f^\varepsilon(x)=1$ ולכן לכל $x \in \operatorname{supp}\chi_{[a,b]}$ מתקיים $\chi_{[a,b]}(x) = 1 \leq f^\varepsilon(x)$ וליתר האיברים אי־השוויון טריוואלי שהרי $\chi_{[a,b]}(x) = 0 \leq f^\varepsilon(x)$.
לבסוף נשים לב כי אם $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ אז $f_\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x) = 1$ ולכן

$$
\operatorname{supp}\left(f^\varepsilon - f_\varepsilon\right) \subseteq [a-\varepsilon, b+\varepsilon] / [a+\varepsilon, b-\varepsilon]
$$

■

יהי $\varepsilon > 0$ יהיו $f_\varepsilon, f^\varepsilon$ כבטענה. נסמן

$$
I_n = \mathbb{E}\left[\chi_{[a,b]}(Y_n)\right]
$$

אז

$$
\mathbb{E}\left[f_\varepsilon(Y_n)\right] \leq \mathbb{E}\left[\chi_{[a,b]}(Y_n)\right] \leq \mathbb{E}\left[f^\varepsilon(Y_n)\right]
$$

נעבור לגבול ונקבל

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f_\varepsilon(Y_n)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&\leq \underline{\lim}_{n\to\infty} I_n \\
&\leq \overline{\lim}_{n\to\infty} I_n \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f^\varepsilon(Y_n)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^\varepsilon(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx
\end{aligned}
$$

בנוסף

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_{\varepsilon}(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f^{\varepsilon}(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\underline{\lim}_{n\to\infty}I_n\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\underbrace{f^{\varepsilon}(x)-f_{\varepsilon}(x)}_{\leq 1}\right]\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\leq 1}dx\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\operatorname{supp}\left(f^{\varepsilon}-f_{\varepsilon}\right)\right|\leq\frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

באופן דומה בדיוק מקבלים

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\overline{\lim}_{n\to\infty}I_n\right| \leq \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

ומאחר וזה נכון לכל $\varepsilon>0$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n\to\infty}I_n=\underline{\lim}_{n\to\infty}I_n &= \lim_{n\to\infty}I_n\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\end{aligned}$$

■

2.11 משפטים של Paley–Wiener

תהי $f\in L_2(\mathbb{R}_+)$. נסמן

$$F(z) = \int_{0}^{\infty}f(t)\,e^{itz}dt$$

נשים לב כי אם $z=x+yi$ ו$\mathrm{Im}z>0$ ($y>0$) אז

$$e^{itz} = e^{itx}e^{-yt}$$

ולכן

$$\left|e^{itz}\right| = e^{-yt}\in L_2(\mathbb{R}_+)$$

ולכן

$$\left|f(t)\,e^{itz}\right| = |f(t)|\,e^{-ty}\in L_1(\mathbb{R}_+)$$

ומכאן $F(z)$ מוגדרת ב$\Pi_+=\{z\mid \mathrm{Im}z>0\}$

טענה 2.75 $F\in A\left(\Pi_{+}\right)$

הוכחה: נראה ראשית רציפות. יהי $0<\delta$ ונניח $\mathrm{Im}z>\delta$. תהי $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ ונראה $F\left(z_n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}F\left(z\right)$. מאחר ו-$\mathrm{Im}z>\delta$ אז $\mathrm{Im}z_n>\delta$ החל מאיזשהו מקום, נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות כי $\mathrm{Im}z_n>\delta$ לכל n.

$$f\left(t\right)e^{itz_n}\quad\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\quad f\left(t\right)e^{itz}$$

ומתקיים

$$\left|f\left(t\right)e^{itz_n}\right| \;=\; \left|f\left(t\right)\right|e^{-ty_n}\le\left|f\left(t\right)\right|e^{-t\delta}\in L_1\left(\mathbb{R}_{+}\right)$$

ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת מתקיים

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}f\left(t\right)e^{itz_n}dt &= \int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(f\left(t\right)e^{itz_n}\right)dt\\ &= \int_0^{\infty}f\left(t\right)e^{itz}dt\end{aligned}$$

ומכאן

$$\lim_{n\to\infty}F\left(z_n\right) \;=\; F\left(z\right)$$

נראה כעת כי $F\in A\left(\Pi_{+}\right)$: ממשפט מוררה מספיק לבדוק כי $\int_{\gamma}F\left(z\right)dz=0$ לכל מסילה סגורה גזירה למקוטעין $\gamma:\left[a,b\right]\to\Pi_{+}$. תהי γ מסילה כנ"ל. נסמן

$$0<\delta \;=\; \min_{a\le t\le b}\mathrm{Im}\gamma\left(t\right)$$

והמינימום הנ"ל קיים כי γ פונקציה רציפה על קטע סגור.

$$\int_{\gamma}F\left(z\right)dz \;=\; \int_a^b\left(\int_0^{\infty}f\left(t\right)e^{i\gamma\left(s\right)t}dt\right)\gamma'\left(s\right)ds$$

נשים לב כי

$$\left|f\left(t\right)e^{i\gamma\left(s\right)t}\gamma'\left(s\right)\right| \;\le\; \sup_{a\le s\le b}\left|\gamma'\left(s\right)\right|\cdot e^{-\delta t}\cdot\left|f\left(t\right)\right|\in L_1\left(\left[a,b\right]\times\left[0,\infty\right)\right)$$

ולכן ממשפט Fubini-Tonelli ניתן להחליף את סדר האינטגרציה

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}F\left(z\right)dz &= \int_a^b\left(\int_0^{\infty}f\left(t\right)e^{i\gamma\left(s\right)t}dt\right)\gamma'\left(s\right)ds\\ &= \int_0^{\infty}f\left(t\right)\int_a^b\left(e^{i\gamma\left(s\right)t}\right)\gamma'\left(s\right)dsdt\\ &= \int_0^{\infty}0dt\\ &= 0\end{aligned}$$

כי הפונקציה $z \mapsto e^{itz}$ היא אנליטית ולכן $\int_{\gamma} e^{itz}dz = 0$. ■

יהי $z = x + yi$. נסמן לפונקציה F כלשהי

$$F_y(x) = F(x+yi)$$

אם F היא כמו קודם מתקיים

$$F_y(x) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-ty} e^{ixt} dt$$

במקום להתעסק בפונקציות המוגדרות על חצי המישור, נחשוב במקום על $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ כ$f \in L_2(\mathbb{R})$ עם $f(x) = 0$ לכל $x < 0$.

$$\begin{aligned} F_y(x) &= \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-ty} e^{ixt} dt \\ &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left(f(t)\, e^{-ty}\right) \end{aligned}$$

לכל $y > 0$ מתקיים $|f(t)\, e^{-ty}| \le |f(t)|$ ולכן

$$\left\|f(t) \cdot e^{-ty}\right\|_{L_2} \le \|f\|_{L_2}$$

מאחר ו$\mathcal{F}$ איזומטריה נקבל כי

$$\|F_y\|_{L_2} \le \sqrt{2\pi}\, \|f\|_{L_2}$$

משפט 2.76 (Paley–Wiener): נניח כי $F \in A(\Pi_+)$ ולכל y מתקיים

$$\|F_y\|_{L_2} \le \sqrt{2\pi} \cdot C < \infty$$

כאשר $C > 0$. אז קיימת $f \in L_2(\mathbb{R})$ כך ש

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{itz} dt$$

ו$\|f\|_{L_2} \le C$

הערה 2.77 אם המשפט הנ"ל נכון אז ממה שראינו קודם

$$f(t)\, e^{-yt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}F_y)(t)$$

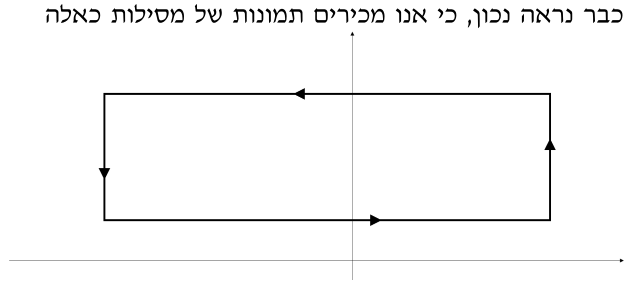
ולכן

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}F_y)(t) \cdot e^{yt}$$

והביטוי בצד ימין לא תלוי כלל ב-y! אנו לא יודעים כי $F_y(x) \in L_1(\mathbb{R})$ אבל נכתוב בכל זאת

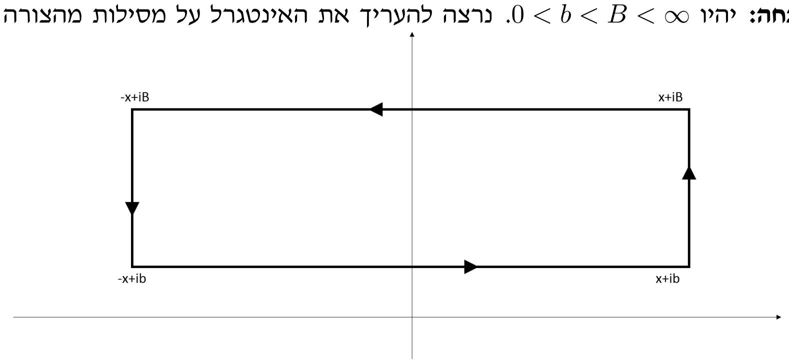
$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}F_y)(t) \cdot e^{yt} &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_y(x) e^{-ixt} e^{yt} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy) e^{-it(x+iy)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}+iy} F(z) e^{-itz} dx
\end{aligned}$$

וזה כבר נראה נכון, כי אנו מכירים תמונות של מסילות כאלה



כאשר על הקווים האנכיים האינטגרל שואף ל-0.

הוכחה: יהיו $0 < b < B < \infty$. נרצה להעריך את האינטגרל על מסילות מהצורה



נסמן

$$\psi(x) = \int_b^B \left(|F(x+iy)| e^{ty} + |F(-x+iy)| e^{ty}\right) dy$$

אז

$$\begin{aligned}
\psi(x)^2 &= \left(\int_b^B \left(|F(x+iy)| e^{ty} + |F(-x+iy)| e^{ty}\right) dy\right)^2 \\
&\leq 2\left(\int_b^B \left(|F(x+iy)| e^{ty}\right) dy\right)^2 + 2\left(\int_b^B \left(|F(-x+iy)| e^{ty}\right) dy\right)^2
\end{aligned}$$

ומאי־שוויון קושי שוורץ

$$\begin{aligned}
2\left(\int_b^B \left(|F(x+iy)|\, e^{ty}\right) dy\right)^2 + 2\left(\int_b^B \left(|F(-x+iy)|\, e^{ty}\right) dy\right)^2 &\leq \\
2\left(\int_b^B |F(x+iy)|^2\, dy \int_b^B \left(e^{ty}\right)^2 dy + \int_b^B |F(-x+iy)|^2\, dy \int_b^B \left(e^{ty}\right)^2 dy\right) &\leq \\
2\int_b^B \left(|F(x+iy)|^2 + |F(-x+iy)|^2\right) dy \cdot \frac{e^{2tB}-e^{2tb}}{2t} &\leq \\
\left(\int_b^B \left(|F(x+iy)|^2 + |F(-x+iy)|^2\right) dy\right) \cdot \frac{e^{2tB}-e^{2tb}}{t}
\end{aligned}$$

נשים לב כי מאחר ו

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_b^B \left(|F(x+iy)|^2 + |F(-x+iy)|^2\right) dydx &\leq \\
\int_b^B \left(2\cdot C^2 2\pi\right) dy &= 4\pi C^2\, |B-b| < \infty
\end{aligned}$$

קיימת $\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ A_n כך ש

$$\begin{aligned}
\int_b^B |F(-A_n+iy)|^2\, dy &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
\int_b^B |F(A_n+iy)|^2\, dy &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

ואז מתקיים כי עבור תת סדרה זו

$$\psi(A_n)^2 \leq \left(\int_b^B \left(|F(A_n+iy)|^2 + |F(-A_n+iy)|^2\right) dy\right) \cdot \frac{e^{2tB}-e^{2tb}}{t}$$

ולכן עבור כל t מתקיים

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_{n\to\infty}\psi(A_n)^2 &\leq \left(\lim_{n\to\infty}\int_b^B \left(|F(A_n+iy)|^2 + |F(-A_n+iy)|^2\right) dy\right) \cdot \frac{e^{2tB}-e^{2tb}}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ולכן עבור כל t מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\psi(A_n) = 0$$

כעת ממשפט קושי מתקיים כי לכל $A>0$

$$\begin{aligned}\int_{[-A+bi,A+bi]} F(z)e^{-itz}dz+\int_{[A+bi,A+Bi]} F(z)e^{-itz}dz&\\ -\int_{[-A+Bi,A+Bi]} F(z)e^{-itz}dz-\int_{[-A+Bi,-A-bi]} F(z)e^{-itz}dz&=0\\ \int_{-A}^{A} F(x+ib)e^{-it(x+ib)}dx+i\int_b^B F(A+iy)e^{-it(A+iy)}dy&\\ -\int_{-A}^{A} F(x+iB)e^{-it(x+iB)}dx-i\int_b^B F(-A+iy)e^{-it(-A+iy)}dy&=0\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left|\int_{-A}^{A} F(x+ib)e^{-it(x+ib)}dx-\int_{-A}^{A} F(x+iB)e^{-it(x+iB)}dx\right|&=\\ \left|\int_b^B F(A+iy)e^{-it(A+iy)}dy-\int_b^B F(-A+iy)e^{-it(-A+iy)}dy\right|&=\\ \left|\int_b^B F(A+iy)e^{ty}dy-\int_b^B F(-A+iy)e^{ty}dy\right|&\le\psi(A)\end{aligned}$$

ואז

$$\left|\int_{-A_n}^{A_n} F(x+ib)e^{-it(x+ib)}dx-\int_{-A_n}^{A_n} F(x+iB)e^{-it(x+iB)}dx\right|\le|\psi(A_n)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

נגדיר ל$c>0$

$$g_n^c(t)=\int_{-A_n}^{A_n} F_c(x)e^{-itx}dx$$

אז

$$\left|e^{tb}g_n^b(t)-e^{tB}g_n^B(t)\right|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

מתקיים

$$\begin{aligned}g_n^c(t)&=\int_{-A_n}^{A_n} F_c(x)e^{-itx}dx\\ &=\widehat{\chi_{[-A_n,A_n]}\cdot F_c}(t)\end{aligned}$$

ממשפט Plancherel מתקיים כי

$$\begin{aligned}\mathcal{F}F_c&=L_2-\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}\left(\chi_{[-A_n,A_n]}\cdot F_c\right)\\ &=L_2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_n^c\end{aligned}$$

ממשפט בפונקציות ממשיות, מאחר ויש התכנסות בL_2, קיימת תת־סדרה המתכנסת כמעט בכל מקום. לכן קיימת n_k כך ש

$$\left(\mathcal{F}F_b\right)(t) \overset{\text{a.e.}}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_{n_k}^{b}(t)$$

ונוכל להניח (ע"י לקיחת תת סדרה נוספת) כי

$$\left(\mathcal{F}F_B\right)(t) \overset{\text{a.e.}}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_{n_k}^{B}(t)$$

לכן מתקיים כי

$$\left|e^{tb}g_{n_k}^{b}(t)-e^{tB}g_{n_k}^{B}(t)\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

מצד שני לכמעט כל t

$$\left|e^{tb}g_{n_k}^{b}(t)-e^{tB}g_{n_k}^{B}(t)\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}\left|e^{tb}\left(\mathcal{F}F_b\right)(t)-e^{tB}\left(\mathcal{F}F_B\right)(t)\right|$$

ולכן קיבלנו כי לכל $b,B>0$ מתקיים לכמעט כל t

$$e^{tb}\cdot\left(\mathcal{F}F_b\right)(t) = e^{tB}\cdot\left(\mathcal{F}F_B\right)(t)$$

נגדיר

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{t}\cdot\left(\mathcal{F}F_1\right)(t)\right)$$

לכל $y>0$ נגדיר

$$g_y(t) = \left(\mathcal{F}F_y\right)(t)$$

מאחר ו$\mathcal{F}$ איזומטריה מתקיים לכל $y>0$

$$\left\|g_y\right\|_{L_2} = \left\|F_y\right\|_{L_2}$$

ממה שראינו קודם מתקיים כי

$$\begin{aligned} e^{ty}\cdot g_y(t) &= e^{ty}\cdot\left(\mathcal{F}F_y\right)(t)\\ &= e^{t}\cdot\left(\mathcal{F}F_1\right)(t)\\ &= \sqrt{2\pi}\cdot f(t)\end{aligned}$$

מכאן

$$g_y(t) = \sqrt{2\pi}\cdot e^{-ty}\cdot f(t)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left\|g_y\right\|_{L_2}^2 &= \left\|F_y\right\|_{L_2}^2\\ 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2ty}\cdot\left|f(t)\right|^2dt &= \left\|F_y\right\|_{L_2}^2 \le 2\pi C^2\end{aligned}$$

ולכן קיבלנו כי לכל $y>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ty}\cdot\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt \quad \leq \quad C^{2}$$

יהי $\delta>0$. לכל $y>0$ מתקיים

$$\int_{-\infty}^{-\delta} e^{-2ty}\cdot\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt \quad \leq \quad C^{2}<\infty$$

אבל

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-2ty}\cdot\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt &\geq e^{2\delta y}\cdot\int_{-\infty}^{-\delta}\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt \\ e^{-2\delta y}\cdot\int_{-\infty}^{-\delta} e^{-2ty}\cdot\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt &\geq \int_{-\infty}^{-\delta}\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt \end{aligned}$$

מכאן קיבלנו כי

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\delta}\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt &\leq e^{-2\delta y}\cdot\int_{-\infty}^{-\delta} e^{-2ty}\cdot\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt \\ &\leq e^{-2\delta y}\cdot C^{2} \end{aligned}$$

ניקח גבול ונקבל

$$\int_{-\infty}^{-\delta}\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt \quad \leq \lim_{y\to\infty} \quad \left(e^{-2\delta y}\cdot C^{2}\right)=0$$

ומכאן $f\left(t\right)=0$ כמעט לכל $t\leq-\delta$. מאחר ו-$\delta>0$ שרירותי, נקבל כי לכמעט כל $t<0$ מתקיים כי $f\left(t\right)=0$. לכן

$$\begin{aligned} e^{ty}\cdot\left(\mathcal{F}F_{y}\right)\left(t\right) &= \sqrt{2\pi}\cdot f\left(t\right) \\ \left(\mathcal{F}F_{y}\right)\left(t\right) &= e^{-ty}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot f\left(t\right) \\ F\left(x+yi\right)=F_{y}\left(x\right) &= \sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-ty}\cdot f\left(t\right)\right)\left(x\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{-ty}f\left(t\right)e^{itx}dt \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} f\left(t\right)e^{itx-ty}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} f\left(t\right)e^{it\left(x+yi\right)}dt \end{aligned}$$

לבסוף נשים לב כי מאחר ולכל $y>0$ מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ty}\cdot\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt \quad \leq \quad C^{2}$$

אז מהלמה של פטו:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\liminf_{y\to0}e^{-2ty}\cdot\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt & \leq \liminf_{y\to0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2ty}\cdot\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt\leq C^{2}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt & \leq C^{2}\end{aligned}$$

■

נסתכל כעת על $f\in L_{2}\left[-A,A\right]$ ל־$0<A<\infty$ כלשהו. נוכל להגדיר שוב באופן דומה

$$F\left(z\right) = \int_{-A}^{A}f\left(t\right)e^{itz}dt$$

הפעם מתקיים כי $F\in A\left(\mathbb{C}\right)$ פונקציה רציפה ושלמה (אנליטית בכל המישור). (אפשר להוכיח באופן דומה להוכחה במקרה של פונקציה ב־$L_{2}\left(\mathbb{R}_{+}\right)$, אפשר גם להוכיח ישירות) נשים לב כי

$$\begin{aligned}\left|F\left(z\right)\right| & \leq \int_{-A}^{A}\left|f\left(t\right)e^{itz}\right|dt\\ & = \int_{-A}^{A}f\left(t\right)\exp\left(-t\mathrm{Im}z\right)\\ & \leq \int_{-A}^{A}\left|f\left(t\right)\right|\exp\left(A\left|z\right|\right)dt\\ & = C\cdot\exp\left(A\left|z\right|\right)\end{aligned}$$

הגדרה 2.78 יהי $A>0$ ותהי $F\in A\left(\mathbb{C}\right)$. נאמר כי F היא בעלת A exponentional type אם לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $\left|F\left(z\right)\right|\leq C_{0}\cdot e^{A\left|z\right|}$ (כאשר $C_{0}>0$ קבוע כלשהו).

משפט 2.79 (Paley–Wiener): תהי $F\left(z\right)\in A\left(\mathbb{C}\right)$ כך שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $\left|F\left(z\right)\right|\leq C_{0}\cdot e^{A\left|z\right|}$ (כאשר $A,C_{0}>0$ קבועים כלשהם). אז קיימת $f\in L_{2}\left[-A,A\right]$ כך ש

$$F\left(z\right) = \int_{-A}^{A}f\left(t\right)e^{itz}dt$$

הוכחה: נגדיר $\varphi\left(x\right)=F\left(x\right)$ (פונקציה של משתנה ממשי). ונגדיר $f=\sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{F}\varphi$. נכתוב

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f\left(t\right) \sim \int_{-\infty}^{\infty}F\left(x\right)e^{-ixt}dx$$

(אין פה באמת שוויון כי אנו לא יודעים כי $F\in L_{1}\left(\mathbb{R}\right)$)
מכאן נראה שצריך להראות שהאינטגרל מתאפס אם $\left|t\right|>A$, או במילים אחרות ש־$\mathrm{supp}\mathcal{F}\varphi\subseteq\left[-A,A\right]$.

נגדיר

$$H_+(z) = \int_0^\infty F(x)\, e^{-ixz} dx$$

לו $\mathrm{Im} z < 0$ מתקיים כי $\mathrm{Re}(-ixz) > 0$ ואז ראינו כי במקרה זה מתקיים כי H_+ אנליטית בתחום זה, כלומר $H_+ \in A(\Pi_-)$. נגדיר באופן דומה

$$H_-(z) = -\int_{-\infty}^0 F(x)\, e^{-ixz} dx$$

ואז ראינו כי מתקיים כי $H_- \in A(\Pi_+)$.

נגדיר $H(z) = i\int_0^\infty F(ix)\, e^{xz} dx$. מתקיים כי

$$|F(ix)| \leq C_0 \cdot e^{xA}$$

ואז אם $\mathrm{Re} z < -A$ אז יש $\varepsilon > 0$ כך ש־$\mathrm{Re} z < -A - \varepsilon$ ומתקיים

$$\begin{aligned} |F(ix)\, e^{xz}| &\leq C_0 \cdot e^{xA} \cdot e^{\mathrm{Re}(xz)} \\ &\leq C_0 \cdot e^{xA} \cdot e^{-(A+\varepsilon)x} \\ &= C_0 \cdot e^{-\varepsilon x} \end{aligned}$$

ולכן $F(ix)\, e^{xz} \in L_1(\mathbb{R}_+)$ ומכאן, כמו שראינו כבר כמה פעמים מתקיים כי $H \in A(\Pi)$ כאשר

$$\Pi = \{z \mid \mathrm{Re} z < -A\}$$

טענה 2.80 לכל $z \in \Pi \cap \Pi_-$ מתקיים $H_+(z) = H(z)$

הוכחה: נסביר את הרעיון שעומד מאחורי הגדרת H_+, H_- ו־H:

יהי $c \in \mathbb{C}$. נגדיר פונקציית עזר

$$G_c(w) = F(w) \cdot e^{-i \cdot c \cdot w}$$

זו פונקציה שלמה כמכפלת פונקציות שלמות. נסמן $\gamma_0(t) = t$ כאשר $0 \leq t < \infty$, אז

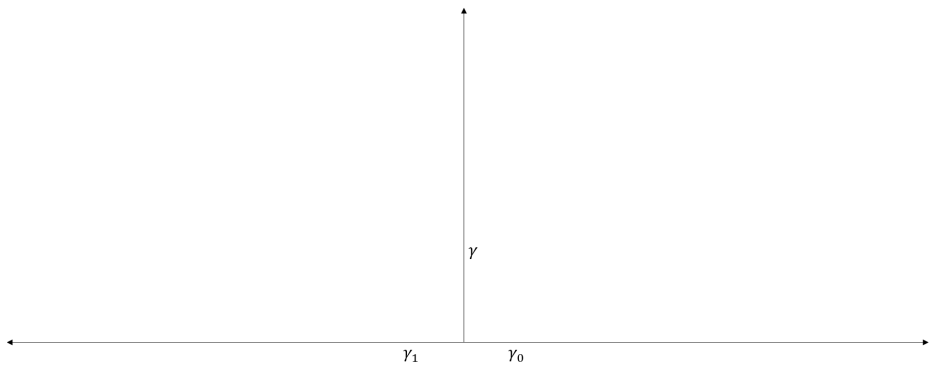
$$H_+(c) = \int_{\gamma_0} G_c(w)\, dw$$

באופן דומה נסמן $\gamma_1(t) = -t$ כאשר $0 \leq t < \infty$, אז

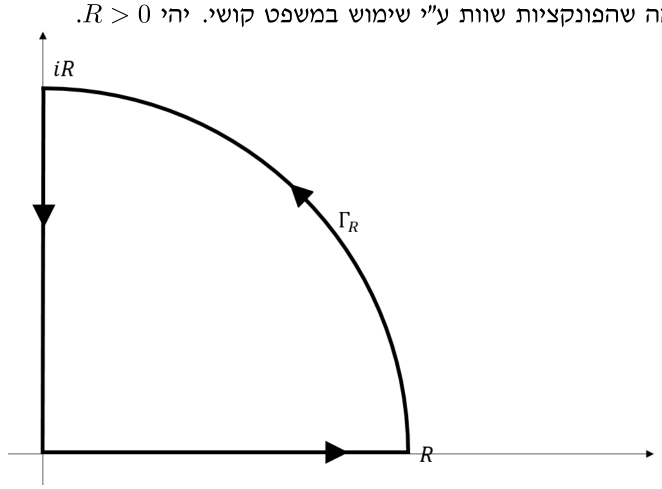
$$H_-(c) = \int_{\gamma_1} G_c(w)\, dw$$

באופן דומה אם נסמן $\gamma(t) = it$ כאשר $0 \leq t < \infty$ אז

$$H(c) = \int_{\gamma} G_c(w)\, dw$$



נראה שהפונקציות שוות ע"י שימוש במשפט קושי. יהי $R>0$.



מתקיים

$$\int_{[0,R]+\Gamma_R-[0,iR]} G_c(w)\,dw = 0$$

נבחר $c=\lambda\cdot e^{i\frac{5}{4}\pi}$. עבור c כזה מתקיים

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} G_c(w)\,dw &\leq \operatorname{length}(\Gamma_R)\cdot\max_{w\in\Gamma_R}|G_c(w)| \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot R\cdot\max_{w\in\Gamma_R}|G_c(w)|\end{aligned}$$

נעריך את $G_c(w)$:

$$\begin{aligned}\left|G_c(w)\right| &= \left|F(w)\right|\cdot\left|e^{-i\cdot c\cdot w}\right|\\ &\le C_0\cdot e^{AR}\cdot\exp\left(\mathrm{Im}\left(cw\right)\right)\end{aligned}$$

מתקיים $w=Re^{i\theta}$ כאשר $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ולכן

$$\begin{aligned}cw &= R\lambda\exp\left(i\left(\theta+\frac{5}{4}\pi\right)\right)\\ &= R\lambda\exp\left(i\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)\right)\end{aligned}$$

ואז

$$\mathrm{Im}\left(cw\right) = R\lambda\sin\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$$

מתקיים כי

$$-\frac{3}{4}\pi\le\theta-\frac{3}{4}\pi \le -\frac{1}{4}\pi$$

והמקסימום של $\sin$ בקטע זה הוא $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ולכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(cw\right) &\le -\frac{\sqrt{2}}{2}R\lambda\\ \left|G_c(w)\right| &\le C_0\cdot e^{AR}\cdot\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}R\lambda\right)\\ \int_{\Gamma_R}G_c(w)\,dw &\le \frac{\pi}{2}\cdot R\cdot C_0\cdot e^{AR}\cdot\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}R\lambda\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot C_0\cdot R\cdot\exp\left(\left(A-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)R\right)\end{aligned}$$

ל $\lambda>\sqrt{2}A$ מתקיים $A-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda<0$ ואז

$$\int_{\Gamma_R}G_c(w)\,dw = \frac{\pi}{2}\cdot C_0\cdot R\cdot\exp\left(\left(A-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)R\right)\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ואז

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{[0,R]-[0,iR]}G_c(w)\,dw &= 0\\ H_+(c)-H(c) &= 0\end{aligned}$$

ולכן לכל $\lambda>\sqrt{2}A$ מתקיים כי

$$H_+\left(\lambda e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) = H\left(\lambda e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$$

ממשפט היחידות (מאחר וקל למצוא קבוצה על הקרן $\lambda e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ($\lambda > \sqrt{2}A$) עם נקודת הצטברות), מתקיים כי $H_+(w) = H(w)$ לכל $w \in \Pi \cap \Pi_-$. ■

אותו הדבר ניתן לעשות עם H_- ו-H ולקבל כי לכל $w \in \Pi \cap \Pi_+$ מתקיים $H(w) = H_-(w)$.
כמו כן, ניתן לעשות אותו הדבר בחלק הימני של המישור: ניתן להגדיר אינטגרל של G_c על הציר המדומה התחתון, ולקבל פונקציה אנליטית ל-$\{\mathrm{Re} z > A\}$ ואז להראות שהוא מזדהה עם H_+ ו-H_- בתחום בו שתי פונקציות מוגדרות.
מכאן נקבל

מסקנה 2.81 לכל t עם $|t| > A$ מתקיים

$$\lim_{s\to 0^+} \left(H_+(t - is) - H_-(t + is)\right) = 0$$

(זאת מכיוון שהפונקציות מסכימות עם H בתחום זה, ולכן כל מחובר בגבול מתכנס ל-$H(t)$)

מכאן

$$\int_0^\infty F(x)\, e^{-i(t-is)x} dx + \int_0^\infty F(-x)\, e^{i(t+is)x} dx \underset{s\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

נכתוב

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty F(x)\, e^{-i(t-is)x} dx + \int_0^\infty F(-x)\, e^{i(t+is)x} dx &= \\
\int_0^\infty F(x)\, e^{-i(t-is)x} dx + \int_{-\infty}^0 F(x)\, e^{-i(t+is)x} dx &= \\
\int_0^\infty F(x)\, e^{-itx} e^{-sx} dx + \int_{-\infty}^0 F(x)\, e^{-itx+sx} dx &= \\
\int_{-\infty}^\infty F(x)\, e^{-itx} e^{-s|x|} dx &\underset{s\to 0^+}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

נסמן

$$\varphi_s(x) = F(x)\, e^{-s|x|}$$

אז $\varphi_s \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ (ב-L_1 כמכפלה של שתי פונקציות ב-L_2, ב-L_2 כי $F \in L_2$ ו-$|\varphi_s| \le |F|$).
קיבלנו כי לכל $|t| > A$

$$\widehat{\varphi_s}(t) \underset{s\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

מתקיים

$$\widehat{\varphi_s} = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}\varphi_s \xrightarrow[s\to 0^+]{L_2} \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}\varphi$$

(כזכור $\varphi(x) = F(x)$)
כי $\varphi_s \xrightarrow[s\to 0^+]{L_2} \varphi$ ו-$\mathcal{F}$ אופרטור חסום
(כי

$$\left|F(x)\, e^{-s|x|} - F(x)\right|^2 = |F(x)|^2 e^{-2s|x|} - |F(x)|^2 2e^{-s|x|} + |F(x)|^2$$

ואז

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)e^{-s|x|}-F(x)\right|^2dx &= \\ \int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2e^{-2s|x|}dx-2\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2e^{-s|x|}dx+\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2dx &\underset{s\to0^+}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

כי כל אינטגרל בנפרד שואף ל$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2dx$ (ממשפט ההתכנסות הנשלטת, ע"י בחירת המז'ורנטה $|F(x)|^2$))

כעת קיימת סדרה $s_n\longrightarrow 0$ כך ש

$$\mathcal{F}\varphi_{s_n} \xrightarrow{\text{a.e.}} \mathcal{F}\varphi$$

ואז כמעט לכל t עם $|t|>A$ מתקיים

$$(\mathcal{F}\varphi_{s_n})(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathcal{F}\varphi)(t)$$

מצד שני מתקיים לכל $t>|A|$

$$(\mathcal{F}\varphi_{s_n})(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

מכאן קיבלנו כי לכמעט כל $|t|>A$ מתקיים $(\mathcal{F}\varphi)(t)=0$. נגדיר $f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\varphi$. אז $f\in L_2[-A,A]\subseteq L_1(\mathbb{R})$ ומתקיים

$$F(x) = \int_{-A}^{A}f(t)e^{itx}dt$$

■

3 טרנספורם פוריה של חבורות אבליות

תהי $(G,+)$ חבורה אבלית.

הגדרה 3.1 G נקראת חבורה טופולוגית אם מוגדרת על G טופולוגיה כך שההעתקות

$$\begin{aligned}(g,h) &\mapsto gh\\ g &\mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

הן רציפות ביחס לטופולוגיה.

נאמר על G כי היא חבורה קומפקטית אם היא חבורה טופולוגית כך שG קומפקטית ביחס לטופולוגיה.

נאמר על G כי היא חבורה קומפקטית מקומית אם G חבורה טופולוגית כך שG קומפקטית מקומית ביחס לטופולוגיה (כלומר לכל נקודה, קיימת סביבה המכילה אותה המוכלת בקומפקט).

טענה 3.2 אם G חבורה קומפקטית מקומית, אז קיימת על G מידה μ_G כך שלכל $h \in G$ ולכל $f \in L_1(G, d\mu_G)$ מתקיים

$$\int_G f(g+h)\, d\mu_G(g) \quad = \quad \int_G f(g)\, d\mu_G(g)$$

מידה זו נקראת מידת האר ואומרים כי μ_G אינווריאנטית להזזות. קיימת מידה יחידה כזאת עד כדי כפל בסקלר.

הערה 3.3 יש לדייק מעט, אפשר להגדיר מידה הנותנת לכל קבוצה את מספר האיברים בה, ואז ברור שהיא אינווריאנטית להזזות, אבל מצד שני קבוצות אינסופיות יקבלו את הערך אינסוף, וזו לא המידה שאנחנו מעוניינים בה. לא נכנס לדקויות אלו.

הערה 3.4 כאשר עבדנו במעגל $\mathbb{T}$, בחרנו את מידת לבג, עד כדי קבוע. (הקבוע היה כדי לנרמל את המידה כדי שהיא תהיה בעצם הסתברות)

הערה 3.5 דוגמאות לחבורות:

1. $\mathbb{R}$ - חבורה קומפקטית מקומית
2. $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ - חבורה קומפטית
3. $\mathbb{R}^n$ - חבורה קומפקטית מקומית
4. $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ - חבורה קומפקטית
5. $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ - השאריות מודולו n - חבורה קומפקטית ביחס לטופולוגיה דיסקרטית ומידת האר היא מספר האיברים בקבוצה.
6. $\mathbb{Z}$ - חבורה קומפקטית מקומית ביחס לטופולוגיה הדיסקרטית. מידת האר - מספר הנקודות בקבוצה.

הגדרה 3.6 ל$f_1, f_2 \in L_1(G, d\mu_G)$ מוגדרת קונבולציה

$$(f_1 * f_2)(h) \quad = \quad \int_G f_1(h-g)\, f_2(g)\, d\mu_G(g)$$

מטרתנו היא להגדיר טרנספורם פוריה כך שפעולת הקונבולוציה הדי מסובכת תהפוך תחת טרנספורם פוריה למכפלה פשוטה.

הגדרה 3.7 $\chi : G \to C^*$ נקרא כרקטר של G אם χ הומומורפיזם (כלומר $\chi(g_1) \cdot \chi(g_2) = \chi(g_1 + g_2)$) רציף

$$\chi : G \quad \to \quad \mathbb{T}$$

נסמן ב$\widehat{G}$ את אוסף כל הכרקטרים של G.

טענה 3.8 $\widehat{G}$ היא חבורה אבלית

הוכחה: $\chi_1,\chi_2\in\widehat{G}$ אז ברור כי $\chi=\chi_1\cdot\chi_2\in\widehat{G}$ כי

$$\begin{aligned}\chi(g_1)\chi(g_2) &= \chi_1(g_1)\chi_2(g_1)\chi_1(g_2)\chi_2(g_2)\\ &= \chi_1(g_1)\chi_1(g_2)\chi_2(g_1)\chi_2(g_2)\\ &= \chi_1(g_1+g_2)\cdot\chi_2(g_1+g_2)\\ &= \chi(g_1+g_2)\end{aligned}$$

היחידה היא

$$\mathbb{1}(g) = 1$$

ולכל איבר $\chi\in\widehat{G}$ אם נגדיר

$$\lambda(g) = \frac{1}{\chi(g)}$$

אז

$$\begin{aligned}\lambda(g_1+g_2) &= \frac{1}{\chi(g_1+g_2)}\\ &= \frac{1}{\chi(g_1)}\cdot\frac{1}{\chi(g_2)}\\ &= \lambda(g_1)\cdot\lambda(g_2)\end{aligned}$$

ומתקיים

$$\lambda(g)\cdot\chi(g) = 1=\mathbb{1}(g)$$

אסוציאטיביות ואבליות עוברות בירושה מהכפל ב$\mathbb{C}$. ■

הגדרה 3.9 ל$f\in L_1(G,d\mu_G)$ נגדיר $\hat{f}:\hat{G}\to\mathbb{C}$

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(g)\overline{\chi(g)}d\mu_G(g)$$

טענה 3.10 נניח כי G קומפקטית ו$\chi\in\widehat{G}$ ו$\chi\neq\mathbb{1}$ אז מתקיים

$$\int_G \chi(g)\,d\mu_G(g) = 0$$

הוכחה: יהי $h\in G$. נסמן

$$I = \int_G \chi(g+h)\,d\mu_G(g)$$

מאחר ו-G קומפקטית מתקיים כי $|I| < \infty$. בנוסף מתקיים

$$\begin{aligned} I &= \int_G \chi(g+h)\, d\mu_G(g) \\ &= \int_G \chi(g)\, d\mu_G(g) \end{aligned}$$

ומצד שני

$$\begin{aligned} I &= \int_G \chi(g)\chi(h)\, d\mu_G(g) \\ &= \chi(h)\int_G \chi(g)\, d\mu_G(g) \\ &= \chi(h) I \end{aligned}$$

נבחר h עבורו מתקיים $\chi(h) \neq 1$ (קיים כזה כי $\chi \neq \mathbb{1}$) ואז נקבל כי $(1-\chi(h)) I = 0$ ולכן $I = 0$. ■

מסקנה 3.11 אם G קומפקטית ואם $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$ ו-$\chi_1 \neq \chi_2$ אז

$$\int_G \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} d\mu_G(g) = 0$$

הוכחה: לכל $g \in G$ מתקיים $\chi_2(g) \in \mathbb{T}$ ולכן $\overline{\chi_2(g)} = \chi_2(g)^{-1}$. מכיוון ש $\chi_1 \neq \chi_2$ מתקיים כי $\chi_1\chi_2^{-1} \neq \mathbb{1}$ ומהטענה הקודמת, האינטגרל הנ"ל מתאפס. ■

מסקנה 3.12 (דוגמה): $G = \mathbb{T}$. לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים כי $\chi_n(t) = e^{int}$ הוא כרקטר. נטען כי אלו הם כל הכרקטרים של $\mathbb{T}$.

הוכחה: יהי $\chi \in \widehat{\mathbb{T}}$. מתקיים כי $\chi \in L_1(\mathbb{T})$ וכי $\chi \not\equiv 0$. מהמסקנה הקודמת נובע כי לכל n טבעי מתקיים כי $\langle \chi, \chi_n \rangle \in \{0,1\}$. נפתח את χ לטור פוריה

$$\chi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\chi}(n) \cdot e^{int}$$

מאחר ו-$\chi \not\equiv 0$ מתקיים ממשפט היחידות כי קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו $\widehat{\chi}(n) \neq 0$. עבור n זה מתקיים $\widehat{\chi}(n) = 1$ כלומר

$$\widehat{\chi}(n) = \langle \chi, \chi_n \rangle = 1$$

ואז מהטענה הקודמת נובע כי $\chi = \chi_n$. ■

הערה 3.13 ניתן להכליל את הטענה ל-$\mathbb{T}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^n &= \{(z_1, \ldots, z_n) \mid |z_1| = \ldots = |z_n| = 1\} \\ &= \left\{\left(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\right) \mid \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{T}\right\} \\ &\cong \{(\theta_1, \ldots, \theta_n) \mid \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{T}\} \end{aligned}$$

במקרה זה כל הכרקטרים הם מהצורה הבאה: אם $\chi\in\widehat{\mathbb{T}^{n}}$ אז יש $(k_{1},\ldots,k_{n})$ כך ש

$$\chi = \chi_{(k_{1},\ldots,k_{n})}$$

כאשר

$$\begin{aligned}\chi_{(k_{1},\ldots,k_{n})}(z_{1},\ldots,z_{n}) &= z_{1}^{k_{1}}\cdots z_{n}^{k_{n}}\\ &= e^{ik_{1}\theta_{1}+\ldots+ik_{n}\theta_{n}}\end{aligned}$$

הערה 3.14 באופן כללי מתקיים

$$\widehat{G_{1}\times G_{2}} \cong \widehat{G_{1}}\times\widehat{G_{2}}$$

הערה 3.15 (דוגמה): $G=\mathbb{R}$. נשים לב כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי ההעתקה

$$\chi_{x}(t) = e^{itx}$$

מקיימת $\chi_{x}\in\widehat{\mathbb{R}}$. אכן

$$\begin{aligned}\chi_{x}(t_{1}+t_{2}) &= e^{i(t_{1}+t_{2})x}\\ &= e^{it_{1}x}\cdot e^{it_{2}x}\\ &= \chi_{x}(t_{1})\cdot\chi_{x}(t_{2})\end{aligned}$$

טענה 3.16 אם $\chi\in\widehat{\mathbb{R}}$ אז קיים $a\in\mathbb{R}$ כך ש$\chi(t)=e^{iat}$

הוכחה:

1. נניח ראשית כי $\chi\in C^{1}(\mathbb{R})$. במקרה זה מתקיים לכל $x,t\in\mathbb{R}$

$$\chi(x+t) = \chi(x)\cdot\chi(t)$$

נגזור לפי x:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\chi(x+t) &= \frac{d}{dx}(\chi(x)\cdot\chi(t))\\ \chi'(x+t) &= \chi'(x)\cdot\chi(t)\end{aligned}$$

השוויון הנ"ל נכון לכל x וt. נציב $x=0$ ונקבל כי לכל $t\in\mathbb{R}$

$$\chi'(t) = \chi'(0)\cdot\chi(t)$$

נסמן $\chi'(0)=C$ ונקבל כי

$$\chi(t) = M\cdot e^{C\cdot t}$$

מתקיים $\chi(0)=1$ ולכן $M=1$. בנוסף

$$\begin{aligned} |\chi(t)| &= 1 \\ \left|e^{C\cdot t}\right| &= 1 \end{aligned}$$

מכאן נובע כי $\mathrm{Re}C=0$ כלומר C מדומה טהור, כנדרש.

2. יהי $a\in\mathbb{R}$ נסתכל על האינטגרל

$$\begin{aligned} \int_0^a \chi(x+t)\,dt &= \int_x^{a+x}\chi(y)\,dy \\ \int_0^a \chi(x)\cdot\chi(t)\,dt &= \int_x^{a+x}\chi(y)\,dy \\ \chi(x)\cdot\int_0^a \chi(t)\,dt &= \int_x^{a+x}\chi(y)\,dy \end{aligned}$$

מאחר וχ רציפה ו$\chi\not\equiv 0$ מתקיים כי קיים a כך ש$\int_0^a \chi(t)\,dt\neq 0$ ואז

$$\chi(x) = \frac{\int_x^{a+x}\chi(y)\,dy}{\int_0^a \chi(t)\,dt}$$

ממשפט לבג אגף ימין גזיר ו$\chi\in C(\mathbb{R})$ ולכן $\chi\in C^1(\mathbb{R})$. זה המקרה הקודם ולכן סיימנו.

■

הערה 3.17 (דוגמה): $G=\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. כל הכרקטרים χ מאופיינים על ידי הערך $\chi(1)=\zeta$ ואז מתקיים

$$\chi(k) = \zeta^k$$

יש הגבלה על ζ כי

$$\begin{aligned} \chi(n) &= \chi(0) \\ \zeta^n &= 1 \end{aligned}$$

נשים לב כי אם $\zeta^n=1$ אז אכן $\chi_\zeta(k)=\zeta^k$ הוא הומומורפיזם. לכן כל הכרקטרים של $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הם מהצורה χ_ζ ל$\zeta^n=1$.

נסמן $\zeta_0=e^{i\frac{2\pi}{n}}$. נוכל לארגן את הכרקטרים במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \zeta_0 & \zeta_0^2 & \ldots & \zeta_0^{n-1} \\ 1 & \zeta_0^2 & \zeta_0^4 & \ldots & \zeta_0^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_0^{n-1} & \zeta_0^{2(n-1)} & \ldots & \zeta_0^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

כאשר כל שורה מייצגת ערכים של כרקטר בנקודות $0,1,\ldots,n-1$. מאחר וכרקטרים הם שונים הם אורתוגונלים זה לזה, מתקיים כי AA^* היא מטריצה סקלרית, למעשה מחישוב האיבר הראשון באלכסון מתקיים

$$AA^* = nI$$

ולכן המטריצה $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ היא מטריצה אוניטרית. (זו מטריצה חשובה כי בנוסף להיותה מטריצה אורתוגונלית, לכל רכיביה אותו ערך מוחלט)

נשים לב כי אם $f:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ פונקציה אז

$$\begin{aligned}\left(\hat{f}\right)\left(\chi_{\zeta_0^k}\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} f(j)\cdot\overline{\chi_{\zeta_0^k}(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f(j)\cdot\overline{\zeta_0^{kj}} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_0^{-kj}\cdot f(j)\end{aligned}$$

כלומר נוכל לחשוב על הטרנספורם פוריה כמכפלה של הוקטור f במטריצה $\overline{A}$.

3.1 חוק ההדדיות הריבועית של גאוס

אם $n=p$ ראשוני אז $\mathbb{Z}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ הוא שדה, $\mathbb{Z}_p^*=\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$ החבורה הכפלית של השדה.

הגדרה 3.18 (סימן Legendre): לp ראשוני ו$j\in\mathbb{Z}_p$ מגדירים

$$L_p(j) = \left(\frac{j}{p}\right) = \begin{cases}1 & \exists a\in\mathbb{Z}_p^*,\text{s.t. } a^2=j\,(\mod p)\\ 0 & a=0\,(\mod p)\\ -1 & \text{else}\end{cases}$$

טענה 3.19 $L_p\,|_{\mathbb{Z}_p}\in\widehat{\mathbb{Z}_p^*}$. (כלומר, L_p הומומורפיזם, כלומר $L_p(jk) = L_p(j)\cdot L_p(k)$ ל$(j,k\neq 0\,(\mod p)$)

הוכחה: נוכיח ל$p\neq 2$ (עבור $p=2$ מתקיים $L_2=\mathbb{1}\in\widehat{\mathbb{Z}_2^*}$)

נסמן

$$Q = \left\{j\in\mathbb{Z}_p^* \mid L_p(j)=1\right\}$$

טענה 3.20 $\#Q=\frac{p-1}{2}$

הוכחה: נרשום את השאריות מודולו p:

$$-\left(\frac{p-1}{2}\right),\ldots,-1 \quad , \quad 0,1,2,\ldots,\left(\frac{p-1}{2}\right)$$

ההעתקה $a\mapsto a^2$ מעבירה את כל המספרים מימין ל0 ואת כל המספרים משמאל האפס לאותה הקבוצה. נטען כי על הקבוצה מימין ל0, העתקה זו חח"ע:
יהיו $0<a<b\le\frac{p-1}{2}$. נראה כי $a^2\not\equiv b^2\pmod p$. נכתוב

$$a^2-b^2 \quad = \quad (a+b)(a-b)$$

אם $a^2\equiv b^2\pmod p$ אז $(a+b)(a-b)\equiv 0$. מאחר ו$\mathbb{Z}_p$ שדה, זה יכול לקרות רק אם $a+b\equiv 0\pmod p$ או $a-b\equiv 0\pmod p$. אבל שני המקרים הנ"ל לא קורים כי $0<a<b\le\frac{p-1}{2}$ ולכן

$$\begin{aligned}0 &< a+b\le p-1\\ 0 &< |a-b|\le p-1\end{aligned}$$

■

כעת אם $j,k\in Q$ אז מתקיים $jk\in Q$ כי $j\equiv a^2\pmod p$ו$k\equiv b^2\pmod p$ ולכן $jk\equiv(ab)^2\pmod p$.
אם $j\in Q$, נסתכל על ההעתקה

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p &\to \mathbb{Z}_p\\ x &\mapsto jx\end{aligned}$$

זו העתקה חח"ע ועל ומתקיים מהסעיף הקודם כי

$$jQ \quad \subseteq \quad Q$$

מאחר וההעתקה חח"ע מתקיים $jQ=Q$. מאחר ו$\mathbb{Z}_p^*=Q\cup Q^{\complement}$ אז מתקיים $jQ^{\complement}=Q^{\complement}$.
באופן דומה אם $k\in Q^{\complement}$ אז מתקיים מהסעיף הקודם כי $kQ\subseteq Q^{\complement}$ ומאחר וההעתקה

$$x \quad \mapsto \quad kx$$

חח"ח מתקיים כי $Q^{\complement}=kQ$ ולכן $kQ^{\complement}=Q$.
מכאן נובע כי אכן $L_p(jk)=L_p(j)\cdot L_p(k)$. ■

ממה שראינו קודם, אנו יודעים כי הכרקטרים של $\mathbb{Z}_p$ הם מהצורה

$$\chi_k(j) \quad = \quad \zeta^{kj}=\chi_1(kj)$$

כאשר $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. נחשבן את הטרנספורם פוריה של L_p (זו פונקציה $\mathbb{Z}_p$ ל$\mathbb{C}$) בנקודה χ_k ל$k \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\widehat{L_p}\left(\chi_k\right) &= \sum_{j=0}^{p-1} L_p\left(j\right)\overline{\chi_k\left(j\right)} \\
&= \sum_{j=1}^{p-1} L_p\left(j\right)\overline{\chi_1\left(kj\right)} \\
\underbrace{}_{a=kj} &= \sum_{a=1}^{p-1} L_p\left(k^{-1}a\right)\overline{\chi_1\left(a\right)} \\
&= L_p\left(k^{-1}\right)\sum_{a=1}^{p-1} L_p\left(a\right)\overline{\chi_1\left(a\right)} \\
&= L_p\left(k\right)\sum_{a=0}^{p-1} L_p\left(a\right)\overline{\chi_1\left(a\right)}
\end{aligned}$$

כאשר השלב האחרון נובע כי $L_p\left(k\right)L_p\left(k^{-1}\right) = L_p\left(1\right) = 1$ ומאחר ו$L_p\left(k\right), L_p\left(k^{-1}\right) \in \{\pm 1\}$ מתקיים כי הם שווים. לכן

$$\begin{aligned}
\widehat{L_p}\left(\chi_k\right) &= L_p\left(k\right)\sum_{a=0}^{p-1} L_p\left(a\right)\overline{\chi_1\left(a\right)} \\
&= L_p\left(k\right)\cdot\widehat{L_p}\left(\chi_1\right)
\end{aligned}$$

בנוסף עבור $k = 0$ נקבל

$$\widehat{L_p}\left(\chi_0\right) = \widehat{L_p}\left(\mathbb{1}\right) = 0$$

(כי למשל אנו יודעים שמספר האיברים בQ ומספר האיברים ב$Q^{\complement}$ הוא זהה ושווה ל$\frac{p-1}{2}$)

מכאן קיבלנו כי הטרנספורם פוריה של L_p הוא L_p עד כדי כפל בקבוע. (שערכו $\widehat{L_p}\left(\chi_1\right)$). נחשבן בדרך נוספת:

$$\begin{aligned}
\widehat{L_p}\left(\chi_k\right) &= \sum_{j=0}^{p-1} L_p\left(j\right)\overline{\chi_k\left(j\right)} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} L_p\left(j\right)e^{-\frac{2\pi i\cdot j}{k}} \\
&= \sum_{j\in Q} e^{-\frac{2\pi i\cdot j}{k}} + \sum_{j\in Q^C}\left(-1\right)e^{-\frac{2\pi i\cdot j}{k}} \\
&= \sum_{j\in Q} e^{-\frac{2\pi i\cdot j}{k}} - \sum_{j\in Q^C} e^{-\frac{2\pi i\cdot j}{k}} \\
&= \sum_{j\in Q}\overline{\chi_k\left(j\right)} - \sum_{j\in Q^C}\overline{\chi_k\left(j\right)}
\end{aligned}$$

אם $k\neq0$, נקבל

$$\sum_{j=0}^{p-1}\chi_k(j)\quad=\langle\chi_k,\mathbb{1}\rangle=\quad0$$

(כי מכפלה פנימית של כרקטרים שונים בחבורה קומפקטית היא 0) ולכן

$$1+\sum_{j\in Q}\chi_k(j)+\sum_{j\in Q^{\complement}}\chi_k(j)\quad=\quad\sum_{j=0}^{p-1}\chi_k(j)=0$$

כלומר

$$\sum_{j\in Q^{\complement}}\chi_k(j)\quad=\quad-1-\sum_{j\in Q}\chi_k(j)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\widehat{L_p}(\chi_k)\quad&=\quad\sum_{j\in Q}\overline{\chi_k(j)}-\left(\overline{-1-\sum_{j\in Q}\chi_k(j)}\right)\\&=\quad1+2\sum_{j\in Q}\overline{\chi_k(j)}\end{aligned}$$

מצד שני מתקיים כי

$$\sum_{j\in Q}\chi_k(j)\quad=\quad\sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}}\chi_k\left(a^2\right)$$

כי ראינו כי ההעתקה $a\mapsto a^2$ היא העתקה חח"ע ועל בין הקבוצות $Q\to\left\{1.2.\ldots.\frac{p-1}{2}\right\}$.
ולכן

$$\begin{aligned}\widehat{L_p}(\chi_k)=\quad&=\quad1+2\sum_{j\in Q}\overline{\chi_k(j)}\\&=\quad1+2\sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}}\overline{\chi_k(a^2)}=\\&=\quad\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}\overline{\chi_k(a^2)}\end{aligned}$$

נקבל מהשוויון

$$\widehat{L_p}(\chi_k)\quad=\quad L_p(k)\cdot\widehat{L_p}(\chi_1)$$

כי ל $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
L_p(k) &= \frac{\widehat{L_p}(\chi_k)}{\widehat{L_p}(\chi_1)} \\
&= \frac{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \overline{\chi_k(a^2)}}{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \overline{\chi_1(a^2)}} \\
&= \frac{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{p} \cdot k \cdot a^2\right)}{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{p} \cdot a^2\right)} \\
&= \frac{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{p} \cdot k \cdot a^2\right)}{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{p} \cdot a^2\right)}
\end{aligned}$$

נפעיל צמוד על שני האגפים ונקבל

$$\begin{aligned}
\overline{L_p(k)} &= L_p(k) \\
&= \frac{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \cdot k \cdot a^2\right)}{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \cdot a^2\right)} \\
&= \frac{G_p(k)}{G_p(1)}
\end{aligned}$$

כאשר $G_p(k) = \sum_{a=0}^{p-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \cdot k \cdot a^2\right)$ הוא סכום גאוס שהגדרנו בעבר.

מסקנה 3.21 אם p, q ראשוניים אי־זוגיים אז מתקיים

$$L_p(q) \cdot L_q(p) = \frac{G_p(q)}{G_p(1)} \cdot \frac{G_q(p)}{G_q(1)}$$

נחשבן את המכפלה

$$\begin{aligned}
G_p(q)\cdot G_q(p) &= \sum_{a=0}^{p-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{p}\cdot q\cdot a^2\right)\cdot\sum_{b=0}^{q-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{q}\cdot p\cdot b^2\right)\\
&= \sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=0}^{q-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{p}\cdot q\cdot a^2+\frac{2\pi i}{q}\cdot p\cdot b^2\right)\\
&= \sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=0}^{q-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{pq}\cdot\left(q^2a^2+p^2b^2\right)\right)\\
&= \sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=0}^{q-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{pq}\cdot\left(q^2a^2+2pqab+p^2b^2\right)\right)\\
&= \sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=0}^{q-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{pq}\cdot(qa+pb)^2\right)
\end{aligned}$$

ההעתקה $(a,b)\mapsto qa+pb$ היא איזומורפיזם $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\mapsto\mathbb{Z}_{pq}$ ולכן מתקיים כי

$$\begin{aligned}
\sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=1}^{q-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{pq}\cdot(qa+pb)^2\right) &= \sum_{j=0}^{pq-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{pq}\cdot j^2\right)\\
&= G_{pq}(1)
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו

$$L_p(q)\cdot L_q(p) = \frac{G_{pq}(1)}{G_p(1)\,G_q(1)}$$

נזכר כי ראינו כי ל-r אי־זוגי

$$G_r(1)=\sum_{k=0}^{r-1}e^{2\pi i\cdot rk^2} = \sqrt{r}\cdot(i)^{\left(\frac{r-1}{2}\right)^2}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
L_p(q)\cdot L_q(p) &= \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)\\
&= \frac{G_{pq}(1)}{G_p(1)\,G_q(1)}\\
&= \frac{\sqrt{pq}\cdot(i)^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{p}\cdot(i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{q}\cdot(i)^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}}\\
&= i^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

נשים לב כי מתקיים

$$\begin{aligned}
\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{q-1}{2}\right)^2-\frac{(p-1)(q-1)}{2} &= \\
\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2-\left(\frac{(p-1)+(q-1)}{2}\right)^2 &= \\
\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p+q}{2}-1\right)^2 &= \\
\left(\frac{pq-(p+q)+1}{2}\right)\left(\frac{pq+(p+q)-1}{2}-1\right) &= \\
\frac{(p-1)(q-1)}{2}\cdot\left(\frac{(p+1)(q+1)}{2}-2\right) &=
\end{aligned}$$

נשים לב כי זה ביטוי המתחלק ב4 כי $(p-1)(q-1)$ מתחלק ב4 (כי p וq ראשוניים אי־זוגיים, ולכן $p-1,q-1$ מספרים זוגיים) וכי $(p+1)(q+1)(p-1)(q-1)$ מתחלק ב16 ולכן $\frac{1}{4}(p+1)(q+1)(p-1)(q-1)$ מתחלק ב4.
מכאן

$$\begin{aligned}
i^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} &= i^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}} \\
&= i^{2\cdot\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \\
&= (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}
\end{aligned}$$

קיבלנו את חוק ההדדיות הריבועית: לp,q ראשוניים אי־זוגיים

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

3.2 משפטים כלליים

נחזור לדיון האבסטרקטי על טרנספורם פוריה. לא נוכיח את המשפטים הבאים, אבל נצטט אותם.
נגדיר על $\hat{G}$ טופולוגיה: נגדיר אותה על ידי בסיס סביבות: יהי $K\subseteq G$ קומפקט ויהי $\varepsilon>0$ נגדיר

$$V_{\varepsilon,K}(\chi) = \left\{\lambda\in\hat{G}\mid\sup_{g\in K}\left|\lambda(g)\cdot\chi^{-1}(g)-1\right|<\varepsilon\right\}$$

מתקיים

משפט 3.22 (Pontryagin): $\widehat{\widehat{G}}\cong G$

משפט 3.23 אם $f\in L_1(G)$ ו$\widehat{f}\in L_1\left(\widehat{G}\right)$ אז

$$f(g) = \int_{\widehat{G}}\hat{f}(h)\chi(h)\,d\mu_{\widehat{G}}(h)$$

(אולי עד כדי קבוע, מידת האר יחידה עד כדי קבוע)

אפשר שוב להמשיך לL_2 עם משפט Plancherel ע"י הרחבת הטרנספורם מ$L_1\left(G\right)\cap L_2\left(G\right)$ ע"י כך ששמים שהטרנספורם אוניטרי על קבוצה צפופה.

טענה 3.24 (תרגיל): אם G חבורה דיסקרטית, אז $\widehat{G}$ קומפקטית, ולהפך. (רמז: להשתמש במשפט טיכונוף על מכפלה של קבוצות קומפקטיות ולהסתכל על מכפלות מהצורה $\Pi_{g\in G}\mathbb{T}$)