

# חבורות Chevalley

אלעד זלינגר

## תקציר

רשימות אלו מבוססות על ההרצאות בקורס "חבורות Chevalley" (סימול 0366-5066) שהועבר על ידי פרופסור דוד סודרי בסמסטר ב' שנת הלימודים תשע"ז באוניברסיטת תל אביב. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה ברשימות אלה. לתגובות, תיקונים ועוד, אנא פנו ל-elad88@gmail.com.

## תוכן עניינים

2	החבורות הקלאסיות	1
2	1.1 החבורות הלינאריות	
3	1.2 החבורה הסימפלקטית	
4	1.3 החבורות האורתוגונליות	
4	2 חבורות Weyl	
4	2.1 מערכות שורשים (Root Systems)	
20	2.2 פונקציית האורך	
25	2.3 יוצרים ויחסים בחבורת Weyl	
31	2.4 פירוש גיאומטרי	
37	2.5 תת-חבורות פרבוליות של $W$	
42	3 אלגבראות לי פשוטות - סקירה	
42	3.1 אלגבראות לי פשוטות	
44	3.2 פתירות ונילפוטנטיות	
48	3.3 תת-אלגבראות Cartan, פירוק Cartan ומערכות שורשים	
57	4 חבורות Chevalley	
57	4.1 קבועי המבנה	
62	4.2 בסיס Chevalley	
64	4.3 ההעתקה האכספוננציאלית	
67	4.4 אלגבראות לי וחבורות Chevalley מעל שדה כלשהו $K$	
69	4.5 החבורה $A_1(K)$	
73	5 תת-החבורות היוניפוטנטיות	
73	5.1 החבורות $U, V$	
77	5.2 נוסחת הקומוטטור של Chevalley	
81	5.3 המבנה של החבורות $U, V$	
84	6 תת-החבורות $\langle X_r, X_{-r} \rangle$	
84	6.1 הצגות של $SL_2(\mathbb{C})$	
85	6.2 ההומומורפיזם מ- $SL_2(\mathbb{C})$ ל- $\langle X_r, X_{-r} \rangle$	
93	6.3 ההומומורפיזם מ- $SL_2(K)$ ל- $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ (מעל שדה כלשהו)	

96	האיברים $n_r, h_r(\lambda)$	6.4
100	תת־חבורות $H$ ו־ $N$	7
100	תת־חבורה $H$	7.1
103	תת־חבורה $N$	7.2
105	פירוק Bruhat	8
105	הלמה של Bruhat	8.1
108	זוגות $(B, N)$ Pairs $(B, N)$	8.2
111	תת־חבורות פרבוליות	8.3
113	פירוק לוי של חבורה פרבולית	8.4

## 1 החבורות הקלאסיות

### 1.1 החבורות הלינאריות

יהי  $k$  שדה.  $GL_n(k)$  חבורת המטריצות ההפיכות  $n \times n$  מעל  $k$ . המרכז של חבורה זו

$$Z = Z(GL_n(k)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in k^*\}$$

מסמנים

$$PGL_n(k) = GL_n(k) / Z(GL_n(k))$$

הגרעין של ההומומורפיזם  $\det : GL_n(k) \rightarrow k^*$  מסומן  $\ker(\det) = SL_n(k) \triangleleft GL_n(k)$  מתקיים

$$GL_n(k) / SL_n(k) \cong k^*$$

$$Z(SL_n(k)) = \{\lambda I_n \mid \lambda^n = 1\}$$

מסמנים

$$\begin{aligned} PSL_n(k) &= SL_n(k) / Z(SL_n(k)) \\ &= SL_n(k) / Z \cap SL_n(k) \end{aligned}$$

נניח כי  $k = \mathbb{F}_q$  שדה סופי בעל  $q$  איברים. אז

$$\begin{aligned} |GL_n(\mathbb{F}_q)| &= (q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot (q^n - q^2) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{n-1}) \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1) (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1) \end{aligned}$$

$$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = |PGL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1) (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^2 - 1)$$

$$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1) (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^2 - 1)}{\gcd(n, q - 1)}$$

(כִּי  $\gcd(n, q - 1)$  מספר שורשי היחידה מסדר  $n$  ב־ $\mathbb{F}_q$ )

**משפט 1.1** 1. אם  $k$  שדה אינסופי, אז  $PSL_n(k)$  היא חבורה פשוטה. ( $n \geq 2$ )

2.  $PSL_n(\mathbb{F}_q)$  היא חבורה פשוטה פרט למקרים  $PSL_3(\mathbb{F}_3), PSL_2(\mathbb{F}_2)$ .

## 1.2 החבורה הסימפלקטית

תהי  $S \in M_m(k)$  הפיכה ואנטי-סימטרית ( $S^t = -S$ ). נניח כי  $\text{char } k \neq 2$ ,  $m = 2n$ . נגדיר פעולה של  $GL_{2n}(k) : S \mapsto {}^t g S g$  ולכן, נוכל להשתמש בנציג  $J_{2n} = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{SP}_{2n}(k) &= \{g \in GL_{2n}(k) \mid {}^t g J_{2n} g = J_{2n}\} \\ Z(\text{SP}_{2n}(k)) &= \{\pm I_{2n}\} \end{aligned}$$

נשים לב כי  $\text{SP}_2(k) = \text{SL}_2(k)$ . נגדיר

$$\text{PSP}_{2n}(k) = \text{SP}_{2n}(k) / Z(\text{SP}_{2n}(k))$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned} \text{SP}_{2n}(k) &\supseteq \left\{ \begin{pmatrix} g & \\ & -{}^t g^{-1} \end{pmatrix} \mid g \in GL_n(k) \right\} \\ \text{SP}_{2n}(k) &\supseteq \left\{ \begin{pmatrix} I_n & X \\ & I_n \end{pmatrix} \mid {}^t X = X \right\} \end{aligned}$$

בלשון מרחבים וקטוריים:  $V$  מרחב וקטורי מעל  $k$ .  $b : V \times V \rightarrow k$  תבנית לינארית אנטי סימטרית לא מנונת ( $\forall v, b(v_0, v) = 0$ )  $\iff v_0 = 0$   $\iff$  נובע כי  $\dim V$  זוגי.  $\iff$  קיים בסיס ל- $V$ :  $B = \{v_1, \dots, v_n, v_{-1}, \dots, v_{-n}\}$  כך ש

$$1 \leq i, j \leq n, b(v_i, v_j) = 0 \bullet$$

$$1 \leq i, j \leq n, b(v_{-i}, v_{-j}) = 0 \bullet$$

$$1 \leq i, j \leq n, b(v_i, v_{-j}) = \delta_{ij} \bullet$$

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v_i, v_j) & b(v_i, v_{-j}) \\ b(v_{-i}, v_j) & b(v_{-i}, v_{-j}) \end{pmatrix}$$

ומסמנים

$$\text{Sp}(V, b) = \{T \in \text{Aut}_k(V) \mid b(T(u), T(v)) = b(u, v) \forall u, v \in V\}$$

באופן כללי:  $[v]_B$ :  $[u]_B (B(w_i, w_j))_{ij} {}^t [u]_B$  כאשר  $B = (w_i)$  ולכן החבורה לעיל יוצאת כמו קודם.

**משפט 1.2**  $\text{PSP}_{2n}(k)$  פשוטה לכל  $n \geq 2$ , פרט ל- $\text{PSP}_4(\mathbb{F}_2)$ .

**הערה 1.3** כאשר  $\text{char } k = 2$  אפשר להגדיר  $\text{SP}_{2n}(k)$  (ביחס ל- $J_{2n}$ ). כאן לא ניתן לעשות אנלוגיה למרחבים וקטוריים.

**משפט 1.4**  $\text{SP}_{2n}(k) \subseteq \text{SL}_{2n}(k)$

### 1.3 החבורות האורתוגונליות

$S \in M_n(k)$  הפיכה וסימטרית.  $\text{char}(k) \neq 2$ . גם כאן ניתן להגדיר את פעולת החפיפה של  $\text{GL}_n(k)$ :

$$S \mapsto {}^t g S g$$

מיון מחלקות החפיפה תלוי בשדה.  $S$  חופפת למטריצה אלכסונית. אם  $k$  סגור אלגברית,  $S$  חופפת ל- $I_n$ . אם  $k = \mathbb{R}$ ,  $S$  חופפת ל- $\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_s \end{pmatrix}$  ו- $r, s$  נקבעים באופן יחיד (משפט סילבסטר).  
נקח את המטריצות הבאות:

$$S = \begin{cases} \begin{pmatrix} & I_l \\ I_l & \end{pmatrix} & n = 2l \\ \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & I_l \end{pmatrix} & n = 2l + 1 \end{cases}$$

**הגדרה 1.5** חבורת המטריצות האורתוגונליות:

$$O_n(k) = O_n(k, S) = \{g \in \text{GL}_n(k) \mid {}^t g S g = S\}$$

מתקיים

$$Z(O_n(k)) = \{\pm I_n\}$$

ומסמנים

$$SO_n(k) = O_n(k) \cap \text{SL}_n(k)$$

$$\Omega_n(k) = \langle [O_n(k), O_n(k)] \rangle$$

המרכז של  $\Omega_n(k)$ :  $Z(\Omega_n(k)) = \Omega_n(k) \cap \{\pm I_n\}$

**משפט 1.6** החבורה  $\Omega_n(k)/Z(\Omega_n(k))$  פשוטה לכל  $n \geq 5$ .

## 2 חבורות Weyl

### 2.1 מערכות שורשים (Root Systems)

יהי  $(V, (\cdot, \cdot))$  מרחב מכפלה פנימית מממד  $l$  מעל  $\mathbb{R}$ . לוקטור  $u \neq 0$  נסמן ב- $w_u$  את העתקת שיקוף (reflection) על  $V$  ביחס לעל-מישור הניצב ל- $u$ . זאת העתקה לינארית המקיימת

$$w_u(v) = v \bullet \text{ לכל } v \perp u$$

$$w_u(u) = -u \bullet$$

ולכן ל  $v \in V$

$$\begin{aligned} w_u(v) &= w_u \left( \underbrace{v - \frac{(u,v)}{(u,u)}u}_{\perp u} + \frac{(u,v)}{(u,u)}u \right) \\ &= v - \frac{2(u,v)}{(u,u)}u \end{aligned}$$

בפרט  $w_u$  היא איזומטריה.

**הגדרה 2.1** תהי  $\phi$  תת-קבוצה סופית של וקטורים שונים מאפס. נאמר כי  $\phi$  מערכת שורשים ב  $V$  אם:

1. פורשת את  $V$ .
2. לכל  $u \in \phi$   $w_u(\phi) = \phi$  (מספיק לדרוש הכלה מאיזשהו כיוון כי  $w_v^2 = \text{id}_V$  ואז אפשר להפעיל את  $w_v$  על שני האגפים ולקבל את ההכלה ההפוכה).
3. לכל  $u, v \in \phi$   $\frac{2(u,v)}{(u,u)}u \in \mathbb{Z}$ .
4. אם  $u, \lambda v \in \phi$   $\lambda = \pm 1$ .

### דוגמאות

1. ב  $\mathbb{R}^{l+1}$  הבסיס הסטנדרטי  $\{e_1, \dots, e_{l+1}\}$  ניקח  $V = \{\sum x_i e_i \mid \sum x_i = 0\}$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נסמן

$$\phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$$

זאת מערכת שורשים (בעלת  $l(l+1)$  שורשים) המסומנת  $A_l$ . נראה זאת:

1: ברור.

3: ל  $i \neq s$  ו  $r \neq j$ :

$$\frac{2(e_i - e_j, e_r - e_s)}{(e_i - e_j, e_i - e_j)} = (e_i - e_j, e_r - e_s) = \delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js} \in \mathbb{Z}$$

2:

$$w_{e_i - e_j}(e_r - e_s) = e_r - e_s - (\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js})(e_i - e_j)$$

$$= \begin{cases} e_r - e_s & i, j \neq r, s \\ e_r - e_s - 2(e_r - e_s) = e_s - e_r & i = r (\implies j \neq r, i \neq s), j = s \\ e_r - e_s - (e_r - e_j) = e_j - e_s & i = r, j \neq s \\ e_r - e_s - (e_i - e_s) = e_r - e_i & j = s (\implies j \neq r, i \neq s), i \neq r \end{cases}$$

$\in \phi$

4: ברור.

**הערה 2.2** נראה בהמשך שדוגמה זו מתאימה ל- $SL_{l+1}(F)$ .

2.  $V = \mathbb{R}^l$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$\phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

(בעלת  $2l^2$  שורשים)

זאת מערכת שורשים המסומנת  $B_l$ . באופן שקול

$$\phi = \left\{ v = \sum x_i e_i \mid \|v\|^2 = 1, 2 \right\}$$

נבדוק שזו אכן מערכת שורשים:

1: ברור.

3: ברור:  $\frac{2(u,v)}{(u,u)} \in \{2(u,v), (u,v)\} \subseteq \mathbb{Z} \iff u, v \in \phi$

2:  $\|w_u(v)\|^2 = \|v\|^2 \in \{1, 2\}$  ומתקיים  $w_u(v) = v - \frac{2(u,v)}{(u,u)}u \in \sum \mathbb{Z}e_i \iff u, v \in \phi$   
 $w_u(v) \in \phi \iff \{1, 2\}$

4: ברור.

3.  $V = \mathbb{R}^l$ ,  $\phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ , זאת מערכת שורשים המסומנת  $C_l$  (תרגיל).

4.  $V = \mathbb{R}^l$ .  $\phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\}$ . זאת מערכת שורשים המסומנת  $D_l$  (תרגיל).

5.  $V = \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i = 0 \right\}$

$$\phi = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 3\} \cup \{\pm(2e_{i_1} - e_{i_2} - e_{i_3}) \mid i_1 \neq i_2 \neq i_3\}$$

זאת מערכת שורשים המסומנת  $G_2$  בעלת 12 איברים. נראה זאת: באופן שקול

$$\phi = \left\{ v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}, x_1 + x_2 + x_3 = 0, \|v\|^2 = 2, 6 \right\}$$

1: ברור כי פורשת את  $V$ .

3:  $u, v \in \phi$

$$\frac{2(u,v)}{\|u\|^2} = \begin{cases} (u,v) & u = e_i - e_j \\ \frac{(2e_{i_1} - e_{i_2} - e_{i_3}, v)}{3} & u = 2e_{i_1} - e_{i_2} - e_{i_3} \end{cases} \in \mathbb{Z}$$

כאשר במקרה השני זה נכון כי סכום הקואורדינטות של  $v$  הוא 0, והמקדמים של  $u$  שווים (ל2) מודולו 3, ולכן המונה הוא מספר שלם המתחלק ב3.

:2

$$w_u(v) = v - \frac{2(u,v)}{\|u\|^2}u \in \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3$$

$$\|w_u(v)\|^2 = \|v\|^2 = 2, 6$$

$$.w_u(v) \in \phi \iff$$

4: ברור.

**משפט 2.3** תהי  $\phi$  מערכת שורשים במרחב  $V$ . אז קיימת תת־קבוצה בת"ל  $\Pi \subseteq \phi$  כך שכל איבר ב  $\phi$  הוא צירוף לינארי של איברי  $\Pi$  במקדמים שהם כולם  $\geq 0$  או כולם  $\leq 0$ .

**הגדרה 2.4** תת־קבוצה כזאת נקראת מערכת יסודית (איברי  $\Pi$  נקראים שורשים יסודיים ולפעמים גם שורשים פשוטים).

**הוכחה:** נגדיר תת־קבוצה  $V^+ \subseteq V$  באופן הבא: נבחר בסיס  $\{v_1, \dots, v_l\}$  ל  $V$ .

$$V^+ = \left\{ 0 \neq v = \sum_{i=1}^l x_i v_i \mid \text{the first } i \text{ with } x_i \neq 0 \text{ satisfies } x_i > 0 \right\}$$

### תכונות

1.  $V^+$  סגור ביחס לחיבור.

2.  $V^+$  סגור ביחס לכפל בסקלר חיובי.

3.  $V = V^+ \cup (-V^+) \cup \{0\}$ .

נגדיר ל  $u, v \in V$ ,  $u \geq v$  אם  $u - v = 0$  או  $u - v \in V^+$  ובמקרה השני נכתוב  $u > v$ . זהו יחס סדר מלא על  $V$ . כמו כן, אם  $u > v$ ,  $u' > v'$  אז  $u + u' > v + v'$  ואם  $u > v$  ו  $\lambda > 0$  אז  $\lambda u > \lambda v$ .

נגדיר  $\phi^+ = \phi \cap V^+$  ונשים לב כי  $\phi = \phi^+ \cup (-\phi^+)$  וכי  $-\phi^+ = \phi \cap (-V^+)$ . קבוצה מהצורה  $\phi^+ = \phi \cap V^+$  כאשר  $V^+$  מקיימת את התכונות 1, 2, 3 תקרא מערכת שורשים חיובית.

נוכיח כי  $\phi^+$  מכילה  $\Pi$  כמו במשפט. תהי  $\Pi \subseteq \phi^+$  המקיימת את הדרישות הבאות:

1. כל איבר של  $\phi^+$  הוא צירוף לינארי של איברי  $\Pi$  במקדמים  $\geq 0$ .

2. אין תת־קבוצה ממש של  $\Pi$  המקיימת את 1.

נשים לב כי קבוצה כזאת קיימת תמיד:  $\phi^+$  מקיימת את 1 באופן טריוואלי, ולכן נוכל לקחת תת־קבוצה מגודל מינימלי המקיימת את 1. נראה כי  $\Pi$  היא כמבוקש.

יהי  $\xi \in \phi^+$ . אם  $\xi \in \phi^+$  אז מ1 נקבל כי  $\xi$  צירוף לינארי של איברי  $\Pi$  במקדמים  $\geq 0$ . אם  $-\xi \in \phi^+$  אז נקבל מ1 כי  $\xi$  צירוף לינארי של איברי  $\Pi$  במקדמים  $\geq 0$ . נותר להראות כי  $\Pi$  בת"ל. זה ינבע מהתכונה הבאה שנוכיח מיד:

$$(r, s) \leq 0 \forall r, s \in \Pi, r \neq s \quad (1)$$

נראה כי מ(1) נובעת אי-תלות  $\Pi$ . נקח צירוף לינארי של איברי  $\Pi$  אשר שווה לאפס. אפשר לכתוב צירוף זה בצורה הבאה:  $\sum_{i=1}^k x_i v_i = \sum_{j=1}^{k'} y_j u_j$  כאשר  $x_i, y_j \geq 0$  ואיברי  $\Pi$  הם  $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{k'}\}$ . שני אגפי השוויון מגדירים וקטור  $v$  במרחב  $V$ .

$$0 \leq \|v\|^2 = \left( \sum_{i=1}^k x_i v_i, \sum_{j=1}^{k'} y_j u_j \right) = \sum_{i,j} \underbrace{x_i y_j}_{\geq 0} \underbrace{(v_i, u_j)}_{\leq 0} \leq 0$$

לכן  $v = 0$ . לפי הבנייה  $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{k'} \in V^+$ . אם יש  $i_0 \leq k$  כך ש  $0 < x_{i_0}$  אז  $x_{i_0} v_{i_0} \in V^+$  ולכן  $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i \in V^+$  (כי  $0 \notin V^+$ ). לכן  $x_i = 0$  לכל  $i$  ובאותו אופן  $y_j = 0$  לכל  $j$ .

נוכיח את (1): יהיו  $u, v \in \Pi$  עם  $u \neq v$ . נניח בשלילה כי  $(u, v) > 0$ . נתבונן ב  $w_u(v) \in \phi^+$  ולכן  $w_u(v) \in \phi^+$  או  $-w_u(v) \in \phi^+$ . נניח כי  $w_u(v) \in \phi^+$ .

$$w_u(v) = v - \underbrace{\frac{2(u, v)}{(u, u)}}_{=\lambda > 0} u$$

מצד שני  $w_u(v) = \sum_{r \in \Pi} x_r \cdot r$  כאשר  $x_r \geq 0$  לכל  $r \in \Pi$ . לכן

$$\sum_{r \in \Pi} x_r r + \lambda u - v = 0$$

המקדם של  $u$  בצירוף לינארי זה הוא  $x_u + \lambda > 0$ . המקדם של  $v$  הוא  $x_v - 1$ . אם  $x_v - 1 \geq 0$  אז אגף שמאל ב  $V^+$  ואז נקבל כי  $0 \in V^+$ . סתירה. לכן  $x_v - 1 < 0$  ואז נקבל

$$(1 - x_v)v = \sum_{u, v \neq r \in \Pi} x_r r + (x_u + \lambda)u$$

מכאן  $v$  הוא צירוף לינארי במקדמים  $0 \leq$  של יתר איברי  $\Pi$ . סתירה למינימליות  $\Pi$ .  
 נניח כי  $-w_u(v) \in \phi^+$  ונקבל סתירה באופן דומה. ■

**משפט 2.5** 1. תהי  $\Pi \subseteq \phi$  מערכת יסודית. אז יש מערכת חיובית יחידה המכילה את  $\Pi$ .

2. תהי  $\phi^+$  מערכת חיובית. אז  $\phi^+$  מכילה מערכת יסודית יחידה.

**הוכחה:**

1. תהי  $\Pi \subseteq \phi$  מערכת יסודית. כיוון ש  $\Pi = \{v_1, \dots, v_l\}$  בסיס של  $V$ , אפשר להגדיר  $V^+$  באמצעות  $\Pi$ , ואז  $\Pi \subseteq V^+ \cap \phi = \phi^+$  היא מערכת חיובית המכילה את  $\Pi$ . נניח כי  $V^{\text{pos}}$  היא תת-קבוצה המקיימת את התכונות 1, 2, 3 מההוכחה של משפט 2.3 המקיימת  $\Pi \subseteq V^{\text{pos}} \cap \phi$ . נראה כי

$$V^{\text{pos}} \cap \phi = V^+ \cap \phi$$



יהי  $\xi \in \phi$  אז  $\xi = \sum_{i=1}^l x_i v_i$  כאשר  $x_i \geq 0$  לכל  $i$  או  $x_i \leq 0$  לכל  $i$ . ברור כי במקרה הראשון  $\xi \in \phi^+$  ובמקרה השני  $-\xi \in \phi^+$ . לכן

$$\phi^+ = V^+ \cap \phi = \left\{ \phi \ni \sum_{i=1}^l x_i v_i \mid x_i \geq 0 \forall i \right\}$$

כיוון ש  $\Pi \subseteq V^{\text{pos}}$ , אם  $x_i > 0$  אז  $x_i v_i \in V^{\text{pos}}$ , ואילו אם  $x_i < 0$  אז מתקיים  $-x_i v_i \in V^{\text{pos}}$ . יהי  $\xi \in V^{\text{pos}} \cap \phi$ . נכתוב  $\xi = \sum_{i=1}^n x_i v_i$  כאשר  $x_i$  כולם מקיימים  $x_i \geq 0$  או כולם מקיימים  $x_i \leq 0$ . במקרה השני נקבל  $-\xi \in V^{\text{pos}}$  ולכן  $0 \in V^{\text{pos}}$ . סתירה. עכשיו ברור  $V^{\text{pos}} \cap \phi = \left\{ \phi \ni \sum_{i=1}^l x_i v_i \mid x_i \geq 0 \forall i \right\}$  ולכן  $V^{\text{pos}} \cap \phi = V^+ \cap \phi$ . כנדרש.

2. תהי מערכת חיובית. נניח כי

$$\Sigma = \{u_1, \dots, u_l\} \subseteq \phi^+$$

$$\Pi = \{v_1, \dots, v_l\} \subseteq \phi^+$$

שתי מערכות יסודיות. צריך להוכיח  $\Pi = \Sigma$ . נכתוב  $u_j = \sum_{i=1}^l x_{ij} v_i$  עם  $x_{ij} \geq 0$  לכן  $v_j = \sum_{i=1}^l y_{ij} u_i$  עם  $y_{ij} \geq 0$  אז נקבל  $I_l = \underbrace{(x_{ij}) \cdot (y_{ij})}_{\text{Transformation matrices}}$ .

Transformation matrices

$$\sum_{j=1}^l \underbrace{x_{ij} y_{jk}}_{\geq 0} = \delta_{ik}$$

נניח כי  $i \neq k$ , ולכן  $x_{ij} y_{jk} = 0$  לכל  $1 \leq j \leq l$  ולכל  $i \neq k$ . נקבע  $i$ . יש  $1 \leq j \leq l$  כך ש  $x_{ij} > 0$  (כי המטריצה  $(x_{ij})$  הפיכה) ואז  $y_{jk} = 0$  לכל  $k \neq i$  (ובהכרח  $y_{ji} > 0$ ). אחרת המטריצה  $(y_{ij})$  אינה הפיכה. אם יש  $j_1 \neq j_2$  כך ש  $0 < x_{ij_1}, x_{ij_2} \neq 0$  אז נקבל כי  $y_{j_1 k} = y_{j_2 k} = 0$  לכל  $k \neq i$  ולכן השורות ה- $j_1$  וה- $j_2$  של  $(y_{ij})$  פרופורציוניות וזאת סתירה. לכן המטריצה  $(x_{ij})$  היא מטריצת תמורה, במובן שבכל שורה שלה יש רק איבר אחד השונה מאפס. ע"י סידור מחדש של  $\Pi$ , אפשר להניח שמהמטריצה  $(x_{ij})$  אלכסונית ואז גם  $(y_{ij})$  כזאת. לכן  $u_i = x_i v_i$  ל  $i = 1, \dots, l$ . כיוון ש  $u_i, v_i \in \phi$  נקבל כי  $x_i = \pm 1$  וכיוון ש  $x_i > 0$  נקבל  $x_i = 1$  ולכן  $u_i = v_i$  לכל  $1 \leq i \leq l$ .

■

**מסקנה 2.6** (מהוכחת משפט 2.3): תהי  $\Pi \subseteq \phi$  מערכת יסודית, אז לכל  $u, v \in \Pi$  עם  $u \neq v$  מתקיים  $(u, v) \leq 0$ .

**טענה 2.7** לכל  $u \in \Pi \subseteq \phi^+$  מתקיים

$$w_u(\phi^+ \setminus \{u\}) = \phi^+ \setminus \{u\}$$

$$w_u(u) = -u$$

**הוכחה:** נניח כי  $\xi \in \phi^+$  ו- $u \neq \xi$ . נכתוב

$$\xi = \sum_{v \in \Pi} x_v v \quad x_v \geq 0$$

(מאחר ו- $\xi \neq u$ , יש  $v \neq u$  עם  $x_v > 0$ )

$$\phi \ni w_u(\xi) = \xi - \frac{2(u, \xi)}{(u, u)} u = \sum_{u \neq v \in \Pi} x_v v + \left( x_u - \frac{2(u, \xi)}{(u, u)} \right) u$$

כיוון שיש מקדם של איזשהו  $v \neq u$ ,  $\Pi \ni v \neq u$ ,  $x_v > 0$  וכיוון ש- $w_u(\xi)$  איבר ב- $\phi$ , נקבל כי כל שאר המקדמים  $0 \leq$ . ולכן  $w_u(\xi) \in \phi^+ \setminus \{u\}$  (למשל בגלל ש- $x_v > 0$  או לחלופין בגלל ש- $\xi = -u \in -\phi^+ \iff w_u(\xi) = u$ ).  
הראנו  $w_u(\phi^+ \setminus \{u\}) \subseteq \phi^+ \setminus \{u\}$ . כיוון ש- $\phi^+ \setminus \{u\}$  סופית ו- $w_u$  פונקציה חד-חד-ערכית, נקבל שוויון (אפשר גם להפעיל את  $w_u$  על ההכלה ולהשתמש בעובדה ש- $w_u^2 = \text{id}_V$ ). ■

**משפט 2.8** נקבע  $\Pi \subseteq \phi^+ \subseteq \phi$  מערכת שורשים יסודית. אז כל איבר ב- $\phi$  הוא צירוף לינארי של איברי  $\Pi$  במקדמים שלמים.

**הוכחה:** די להוכיח את המשפט ל- $\xi \in \Pi$ . אם  $\xi \in \Pi$ , אז אין מה להוכיח. נניח כי  $\xi \in \phi^+ \setminus \Pi$

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{v \in \Pi} x_v v & x_v &\geq 0 \\ 0 < \|\xi\|^2 &= \sum_{v \in \Pi} \underbrace{x_v}_{\geq 0} (\xi, v) \end{aligned}$$

לכן יש  $u \in \Pi$  כך ש- $(\xi, u) > 0$ . מאחר ו- $\xi \notin \Pi$ ,  $\xi \neq u$  ולכן  $w_u(\xi) \in \phi^+$  נתבונן ב-

$$\begin{aligned} \phi^+ \ni w_u(\xi) &= \xi - \frac{2(\xi, u)}{(u, u)} u \\ &= \sum_{u \neq v \in \Pi} x_v v + \left( x_u - \frac{2(\xi, u)}{(u, u)} \right) u \end{aligned}$$

**הגדרה 2.9** הגובה של  $\xi \in \phi^+$  הוא  $h(\xi) = \sum_{v \in \Pi} x_v$ .

מתקיים

$$\begin{aligned} h(w_u(\xi)) &= \sum_{u \neq v \in \Pi} x_v + \left( x_u - \frac{2(\xi, u)}{(u, u)} \right) \\ &= h(\xi) - \underbrace{\frac{2(\xi, u)}{(u, u)}}_{\geq 0} < h(\xi) \end{aligned}$$

הראנו כי לכל  $\xi \in \phi^+$  יש  $\xi' \in \phi^+$  כך ש  $h(\xi') < h(\xi)$  אם  $\xi' \in \Pi$  או  $h(\xi') = 1$  ונעצור. אם  $\xi' \in \phi^+ \setminus \Pi$ , נחזור על התהליך ונמצא  $\xi'' \in \phi^+$  כך ש  $h(\xi'') < h(\xi')$ . התהליך יסתיים כיוון ש  $\phi^+$  סופית. ברור עכשיו כי לכל  $r \in \phi^+$   $h(r) \geq 1$  ו  $h(r) = 1$  אם  $r \in \Pi$ .

כיוון ש  $\phi^+$  סופית, קבוצת הגבהים סופית. נפעיל אינדוקציה על  $h(\xi)$ . כיוון ש  $h(w_u(\xi)) < h(\xi)$  באינדוקציה

$$w_u(\xi) = \sum_{v \in \Pi} y_v v \quad y_v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$w_u(\xi) = \xi - \frac{2(u, \xi)}{(u, u)} u$$

$$\xi = \sum_{v \in \Pi} y_v v + \underbrace{\frac{2(u, \xi)}{(u, u)} u}_{\in \mathbb{Z}}$$

■

כנדרש.

**הגדרה 2.10** החבורה הנוצרת ע"י  $\{w_r \mid r \in \phi\}$  נקראת חבורת Weyl של  $\phi$  ומסומנת  $W(\phi)$ .

$W$  פועלת על  $\phi$ . הפעולה נאמנה, כלומר אם  $w(\xi) = \xi$  לכל  $\xi \in \phi$  אז  $w = \text{id}_V$  (כיוון ש  $V$  פורשת את  $\phi$ ).

**משפט 2.11** נקבע  $\phi^+ \subseteq \phi \subseteq \Pi$  מערכת יסודית. אז

$$1. W \cdot \Pi = \phi$$

$$2. W = W_0 = \langle w_u \mid u \in \Pi \rangle$$

**הוכחה:** נראה כי  $W_0 \cdot \Pi = \phi$ . נניח כי  $\xi \in \phi^+$ . אם  $\xi \in \Pi$  אז  $\xi \in W_0 \cdot \Pi$ . אם  $\xi \in \phi^+ \setminus \Pi$  אז  $\xi = \text{id}_V \cdot \xi \in W_0 \cdot \Pi$ . בהוכחה של משפט 2.8 מצאנו שורש פשוט  $u \in \Pi$  כך ש  $h(w_u(\xi)) < h(\xi)$ .

באינדוקציה על הגובה,  $w_u(\xi) \in W_0 \cdot \Pi$ . נפעיל עוד פעם:

$$\xi = w_u(w_u(\xi)) \in \underbrace{w_u \cdot W_0}_{=W_0, (u \in \Pi)} \cdot \Pi$$

נניח כי  $-\xi \in \phi^+$ . מהחלק הקודם יש  $w \in W_0$ ,  $w \in \Pi$  כך ש  $-\xi = w(r)$ . מכאן

$$\xi = w(-r) = w(w_r(r)) = \left( \underbrace{w w_r}_{\substack{\in W_0 \\ (r \in \Pi)}} \right) (r) \in W_0 \cdot \Pi$$

הראנו כי  $\phi \subseteq W_0 \cdot \Pi \subseteq \phi$  ולכן  $W_0 \cdot \Pi = \phi$ .

נראה כי  $W_0 = W$ . די להראות כי לכל  $\xi \in \phi$  מתקיים  $w_\xi \in W_0$ . נכתוב  $\xi = w(s)$  כאשר  $w \in W_0$  ו  $s \in \Pi$ . נראה  $w_\xi = w \cdot w_s \cdot w^{-1}$ :

$$\begin{aligned} (v \in V) \quad w \cdot w_s \cdot w^{-1}(v) &= w[w_s(w^{-1}(v))] \\ &= w \left[ w^{-1}(v) - \frac{(s, w^{-1}(v))}{(s, s)} s \right] \\ &= w \left[ w^{-1}(v) - \frac{(w(s), v)}{(w(s), w(s))} s \right] \\ &\quad \underbrace{w \text{ is an isometry}} \\ &= v - \frac{(w(s), v)}{(w(s), w(s))} w(s) \\ &= w_{w(s)}(v) = w_\xi(v) \end{aligned}$$

כיון ש  $w, w_s, w^{-1} \in W_0$  גם  $w_\xi \in W_0$ . ■

**הערה 2.12** המטריצות המייצגות של איברי  $W$  ביחס ל  $\Pi$  הן ב

$$GL_l(\mathbb{Z}) = \{X \in M_l(\mathbb{Z}) \mid \det X = \pm 1\}$$

$$(l = \dim V = |\Pi|)$$

**דוגמאות**

1. במערכת  $A_l$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{l+1} \supseteq V &= \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} x_i e_i \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \sum_{i=1}^{l+1} x_i = 0 \right\} \\ \phi &= \{v_{ij} = e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq l+1\} \\ \Pi &= \{v_{12}, v_{23}, \dots, v_{l, l+1}\} \end{aligned}$$

נראה ש  $\Pi$  מערכת יסודית. (ברור ש  $\Pi$  בלתי תלויה לינארית ואפילו בסיס של  $V$ ). נניח  $i < j$

$$\begin{aligned} v_{ij} = e_i - e_j &= (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j) \\ &= v_{i, i+1} + v_{i+1, i+2} + \dots + v_{j-1, j} \end{aligned}$$

נניח כי  $i > j$  אז

$$v_{ij} = -v_{ji} = -v_{j, j+1} - v_{j+1, j+2} - \dots - v_{i-1, i}$$

כאן

$$\begin{aligned} \phi^+ &= \{v_{ij} \mid i < j\} \\ -\phi^+ = \phi^- &= \{v_{ij} \mid i > j\} \end{aligned}$$

חבורת Weyl נוצרת ע"י

$$\{w_{v_{i,i+1}} \mid 1 \leq i \leq l\}$$

נתאר את פעולת  $w_{v_{i,i+1}}$  על הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^{l+1}$ :

$$\begin{aligned} w_{v_{i,i+1}}(e_j) &= e_j - \frac{2(e_j, v_{i,i+1})}{(v_{i,i+1}, v_{i,i+1})} v_{i,i+1} \\ &= e_j - (e_j, e_i - e_{i+1})(e_i - e_{i+1}) \\ &= e_j - (\delta_{ij} - \delta_{i+1,j})(e_i - e_{i+1}) \\ &= \begin{cases} e_j & j \neq i, i+1 \\ e_{i+1} & i = j \\ e_i & i+1 = j \end{cases} \end{aligned}$$

לכן  $w_{v_{i,i+1}}$  פועל כמו תמורת החילוף  $(i, i+1)$  בחבורת התמורות  $S_{l+1}$ . המטריצה

$$\cdot \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I_{l-i} \end{pmatrix} : w_{v_{i,i+1}}$$

ברור כי החבורה הנוצרת ע"י  $w_{v_{i,i+1}} \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{l+1})$  איזומורפית ל  $S_{l+1}$ . נשים לב כי  $V = (e_1 + e_2 + \dots + e_{l+1})^\perp$  וכן כי איברי  $S_{l+1}$  קובעים את  $e_1 + \dots + e_{l+1}$  ולכן  $S_{l+1}$  פועלת ב  $V$  בצורה נאמנה. זה מראה שהעתקת הצמצום  $\begin{matrix} S_{l+1} \rightarrow W \\ w \mapsto w|_V \end{matrix}$  היא איזומורפיזם ולכן  $S_{l+1} \cong W$ .

לבסוף נכתוב את האיזומורפיזם מפורשות:

$$\begin{aligned} S_{l+1} \ni \sigma &\mapsto w(\sigma) = (e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(l+1)}) \\ w(\sigma) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{l+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(l+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. המערכת  $B_l$ .

$$V = \mathbb{R}^l$$

$$\phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

$$u_{ij} = e_i + e_j, (i \neq j) \quad v_{ij} = e_i - e_j$$

$$\Pi = \{v_{12}, v_{23}, \dots, v_{l-1,l}, e_l\}$$

זהו בסיס ל  $V$ . נראה כי  $\Pi$  מערכת שורשים פשוטה.

$$v_{ij} = v_{i,i+1} + v_{i+1,i+2} + \dots + v_{j-1,j} \quad (i < j)$$

$$v_{ij} = -v_{ji} = -v_{j,j+1} - v_{j+1,j+2} - \dots - v_{i-1,i} \quad (i > j)$$

בנוסף

$$\begin{aligned} e_i &= (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{l-1} - e_l) + e_l \\ &= v_{i,i+1} + v_{i+1,i+2} + \dots + v_{l-1,l} + e_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{ij} &= e_i + e_j = v_{i,i+1} + v_{i+1,i+2} + \dots + v_{l-1,l} + 2e_l + \quad (i \neq j) \\ &\quad + v_{j,j+1} + v_{j+1,j+2} + \dots + v_{l-1,l} \\ -u_{ij} &= -e_i - e_j = \dots \end{aligned}$$

רואים עכשיו כי

$$\phi^+ = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

**חבורת Weyl:** נוצרת ע"י

$$\{w_{v_{i,i+1}} \mid 1 \leq i \leq l-1\} \cup \{w_{e_l}\}$$

ראינו כי  $w_{v_{i,i+1}}$  פועל על הבסיס הסטנדרטי כמו החילוף  $(i, i+1)$  ואלה יוצרים את  $S_l$ . מההגדרה של השיקוף מתקיים

$$w_{e_l}(e_j) = \begin{cases} e_j & j \neq l \\ -e_l & j = l \end{cases}$$

ל  $w_{e_l}$  הייצוג המטריצינוני  $\begin{pmatrix} I_{l-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}$ . באותו אופן,

$$\rho_i = w_{e_i} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ -x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$$

$\rho_l = w_{e_l}$  ו  $S_l$  נוצרת ע"י  $\rho_l$ .

$\{\rho_1, \dots, \rho_l\}$  יוצרים חבורה האיזומורפית ל  $\mathbb{Z}_2^l$ . נראה כי בזיהויים הנ"ל,  $S_l$  מנרמלת את  $\mathbb{Z}_2^l$ .

ל  $\sigma \in S_l$  התאמנו

$$\sigma \mapsto w(\sigma) \in \langle w_{v_{i,i+1}} \rangle$$

**תרגיל**  $w(\sigma) \rho_i w(\sigma)^{-1} = \rho_{\sigma(i)}$  (דומה למה שעשינו בהוכחה של משפט 2.11).  
 לכן  $|W| = 2^l \cdot l!$  ו  $W \cong S_l \times \mathbb{Z}_2^l$

**תרגיל:**  $W(C_l) \cong S_l \times \mathbb{Z}_2^l$

**תרגיל:**  $W(D_l) \cong S_l \times \mathbb{Z}_2^{l-1}$

**טענה 2.13** יהיו  $r, s \in \phi$  בת"ל  $(r \neq \pm s)$

1. אם  $(r, s) > 0$  אז  $r - s \in \phi$

2. אם  $(r, s) < 0$  אז  $r + s \in \phi$

**הוכחה:**

$$(r, s) = \|r\| \cdot \|s\| \cdot \cos \theta_{r,s}$$

$$\text{נסמן } A_{s,r} = \frac{2(s,r)}{(s,s)} \in \mathbb{Z}, A_{r,s} = \frac{2(r,s)}{(r,r)} \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \ni A_{r,s} \cdot A_{s,r} = 4 \cos^2 \theta_{r,s} \in \{0, 1, 2, 3\}$$

נכתוב את טבלת האפשרויות לכך שמכפלה של שני מספרים שלמים היא בתחום  $\{0, 1, 2, 3\}$  (נכתוב את המקרים עד כדי סימטריה, כדי לקבל את היתר יש להחליף את התפקידים של  $A_{s,r}$  ו  $A_{r,s}$ ):

$A_{r,s}$	$A_{s,r}$	$\theta_{s,r}$
0	0	$\pi/2$
1	1	$\pi/3$
-1	-1	$2\pi/3$
1	2	$\pi/4$
-1	-2	$3\pi/4$
1	3	$\pi/6$
-1	-3	$5\pi/6$

טבלה 1: טבלת האפשרויות למכפלה

לפי הטבלה:

1. אם  $(r, s) > 0$  (אז גם  $A_{r,s} > 0$ ) אז  $A_{r,s} = 1$  (או  $A_{s,r} = 1$ ) ואז

$$\phi \ni w_r(s) = s - \frac{2(r,s)}{(r,r)}r = s - A_{r,s}r = s - r$$

(ואם  $A_{s,r} = 1$  אז נקבל  $r - s \in \phi$  ולכן  $r - s \in \phi$  ולכן גם  $s - r \in \phi$ )

2. אם  $(r, s) < 0$  אז  $(r, -s) > 0$  ולכן  $(r, -s) \in \phi$  ולכן  $r + s = r - (-s) \in \phi$ .

■

יהיו  $r, s \in \phi$  בת"ל ( $r \neq \pm s$ ). נסתכל על הוקטורים הבאים:

$$-pr + s, \dots, -2r + s, -r + s, s, r + s, 2r + s, \dots, qr + s$$

נניח כי  $p, q \geq 0$  מקסימליים כך ש  $pr + s, qr + s \in \phi$ .

**טענה 2.14** לכל  $-p \leq i \leq q$ ,  $ir + s \in \phi$ .

**הוכחה:** נניח בשלילה כי יש  $-p < i < q$  כך  $ir + s \notin \phi$ . כיוון ש  $-pr + s, qr + s \in \phi$  נמצא  $-p < j' \leq i < i' < q$  כך ש  $j'r + s \notin \phi$ , אבל  $(i' + 1)r + s \in \phi$ .  
 אבל  $(j' - 1)r + s \in \phi$ . מתקיים לכן  $(i' + 1)r + s - r \notin \phi$ . כלומר  $((i' + 1)r + s, r) \leq 0$ , 2.13. לכן מטענה 2.13,  $(i' + 1)r + s - r \notin \phi$ .

$$(i' + 1) \|r\|^2 + (s, r) \leq 0$$

באופן דומה  $(j' - 1)r + s + r \notin \phi$  ולכן שוב מטענה 2.13,  $(j' - 1)r + s + r \notin \phi$ . כלומר

$$(j' - 1) \|r\|^2 + (s, r) \geq 0$$

קעת נקבל  $j' \leq i' \iff j' - 1 < i' + 1 \iff (j' - 1) \|r\|^2 < (i' + 1) \|r\|^2 \iff (j' - 1) \|r\|^2 + (s, r) < (i' + 1) \|r\|^2 + (s, r) \leq 0$ . סתירה. ■

**הגדרה 2.15** קבוצת השורשים  $(ir + s)_{-p \leq i \leq q}$  נקראת שרשרת  $r$  דרך  $s$ .

**טענה 2.16** בסימונים הנ"ל שרשרת  $r$  דרך  $s$  נשמרת תחת השיקוף  $w_r$ . מתקיים  $p - q = \frac{2(r, s)}{(r, r)}$ . האורך המקסימלי של שרשרת הוא 4.

**הוכחה:**

$$\begin{aligned} \phi \ni w_r(ir + s) &= -ir + w_r(s) \\ &= -ir + \left( s - \frac{2(r, s)}{(r, r)} \cdot r \right) \\ &= \left( \underbrace{-i - \frac{2(r, s)}{(r, r)}}_{\in \mathbb{Z}} \right) r + s \\ &= j(i)r + s \end{aligned}$$

שייך לשרשרת. השרשרת סופית ו  $w_r$  חד-חד-ערכית ולכן  $w_r$  מעביר את השרשרת לעצמה. כיוון ש  $-i - \frac{2(r, s)}{(r, r)}$  יורד כאשר  $i$  עולה,  $w_r$  הופך את השרשרת. בפרט

$$\left( -q - \frac{2(r, s)}{(r, r)} \right) r + s = -pr + s$$



ע"י השוואת מקדמי  $r$  נקבל  $p - q = \frac{2(r,s)}{(r,r)}$   
 נתבונן בשרשרת  $r$  דרך  $s' = -pr + s$

$$s', r + s', 2r + s', \dots, (p + q)r + s'$$

כאן  $q' = p + q$ ,  $p' = 0$  ולכן

$$p + q = p' - q' = \frac{2(r, s')}{(r, r)}$$

$(r \neq \pm s')$

ראינו בהוכחה של טענה 2.13 כי  $\frac{2(r, s')}{(r, r)} \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$  ולכן אורך השרשרת הוא

$$p + q + 1 = \left| \frac{2(r, s')}{(r, r)} \right| + 1 \leq 4$$

■

#### דוגמאות

1.  $A_l$  - כאן שרשרת היא שרשרת באורך  $\geq 2$ . כי כאן לשני שורשים  $s = e_i - e_j$ ,  
 $r = e_i - e_j$

$$\frac{2(r, s)}{(r, r)} = (r, s) \in \{0, \pm 1\}$$

למשל שרשרת כזאת:

$$e_i - e_j, \underbrace{e_i - e_j + (e_j - e_k)}_{e_i - e_k}$$

$(i < j) \quad (j < k)$

2.  $B_l$  - שרשרת היא באורך 3 לכל היותר:

$$\{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm e_i\}_{i=1}^l$$

(תרגיל: לבדוק שהאורך הוא לכל היותר 3)

דוגמה לשרשרת באורך 3:

$$e_i - e_j, \underbrace{(e_i - e_j) + e_j}_{e_i}, \underbrace{(e_i - e_j) + 2e_j}_{e_i + e_j}$$

$(i < j)$

3.  $G_2$  - ניתן להשיג את האורך המקסימלי 4:

$$s = 2e_2 - e_1 - e_3$$

$$r = e_1 - e_2$$

$$s, \underbrace{s+r}_{e_2-e_3}, \underbrace{s+2r}_{e_1-e_3}, \underbrace{s+3r}_{2e_1-e_2-e_3}$$

טענה 2.17 נגדיר

$$\phi^* = \left\{ h_r = \frac{2r}{(r,r)} \mid r \in \phi \right\} \subseteq V$$

זאת מערכת שורשים הנקראת המערכת הדואלית ל $\phi$ .

מתקיים  $\phi^{**} = (\phi^*)^* = \phi$ . מתקיים ל $r, s \in \phi$ ,  $\|r\| > \|s\| \iff \|h_r\| < \|h_s\|$ .

הוכחה: כיוון ש $h_r$  הוא כפולה בסקלר של  $r$ , גם  $\phi^*$  פורשת את  $V$ .

$$\frac{2(h_r, h_s)}{(h_r, h_r)} = \frac{2 \cdot \frac{4(r,s)}{\|r\|^2 \|s\|^2}}{\frac{4\|r\|^2}{\|r\|^4}} = \frac{2(r,s)}{(s,s)} \in \mathbb{Z}$$

בנוסף

$$\begin{aligned} w_{h_r}(h_s) &= h_s - \frac{2(h_r, h_s)}{(h_r, h_r)} h_r = \frac{2s}{(s,s)} - \frac{2(r,s)}{(s,s)} \cdot \frac{2r}{(r,r)} \\ &= \frac{2}{(s,s)} \left( s - \frac{2(r,s)}{(r,r)} r \right) = \frac{2w_r(s)}{(s,s)} = \frac{2w_r(s)}{(w_r(s), w_r(s))} = h_{w_r(s)} \in \phi^* \end{aligned}$$

אם  $\lambda h_r \in \phi^*$  אז  $\lambda h_r = h_s$  ולכן  $\frac{2\lambda r}{(r,r)} = \frac{2s}{(s,s)}$  ובפרט  $r, s$  פרופורציוניים ולכן  $r = \pm s$  ואז  $h_r = \pm h_s$  ולכן  $\lambda = \pm 1$ . נבדוק ש  $\phi^{**} = \phi$ :

$$h_{h_r} = \frac{2h_r}{(h_r, h_r)} = \frac{2 \cdot \frac{2r}{(r,r)}}{4 \frac{(r,r)}{\|r\|^2 \cdot \|r\|^2}} = r$$

■

דוגמאות

1.  $A_l$  דואלית לעצמה:

$$h_{e_i - e_j} = \frac{2(e_i - e_j)}{(e_i - e_j, e_i - e_j)} = e_i - e_j$$

2.  $B_l$  דואלית ל  $C_l$ :

$$h_{\pm e_i \pm e_j} = \frac{2(\pm e_i \pm e_j)}{(\pm e_i \pm e_j, \pm e_i \pm e_j)} = \pm e_i \pm e_j$$

$$(i < j)$$

$$h_{\pm e_i} = \frac{\pm 2e_i}{(\pm e_i, \pm e_i)} = \pm 2e_i$$

3.  $G_2$  לא דואלית ל  $G_2$  אבל בדפי התרגיל הוגדר איזומורפיזם של מערכות שורשים. מסתבר ש  $G_2$  איזומורפית למערכת הדואלית שלה.

4.  $D_l$  דואלית לעצמה לפי אותו חישוב כמו של  $B_l$ .

**הגדרה 2.18**  $r, s \in \phi$  עם  $r \neq \pm s$  נסמן

$$n_{r,s} = A_{r,s} \cdot A_{s,r} = \frac{2(r,s)}{(r,r)} \cdot \frac{2(s,r)}{(s,s)} \in \{0, 1, 2, 3\}$$

נניח כי  $r, s \in \Pi$ . כאן  $(r,s) \leq 0$ . נכתוב טבלה לאפשרויות של  $A_{r,s}, A_{s,r}$  (עד כדי סימטריה, כלומר החלפת תפקידי  $A_{r,s}$  ו  $A_{s,r}$ ):

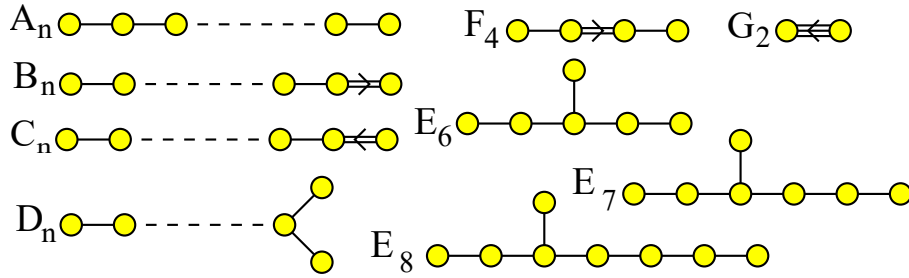
$A_{r,s}$	$A_{s,r}$
0	0
-1	-1
-1	-2
-1	-3

טבלה 2: האפשרויות של  $A_{r,s}, A_{s,r}$

אם  $\frac{2(r,s)}{\|r\|^2} = \frac{2(r,s)}{\|s\|^2} = -1$  (כלומר, כאשר  $n_{r,s} = 1$  אז  $\|r\| = \|s\|$  או  $n_{r,s} = 2$  אז  $\frac{2(r,s)}{\|r\|^2} = -1, \frac{2(r,s)}{\|s\|^2} = -2$  (או להפך), כלומר  $\frac{\|r\|^2}{\|s\|^2} = 2$  או  $\frac{\|s\|^2}{\|r\|^2} = 2$  (כלומר  $\frac{\|r\|}{\|s\|} = \sqrt{2}$  או  $\frac{\|s\|}{\|r\|} = \sqrt{2}$ ), או  $n_{r,s} = 3$  אז  $\frac{\|r\|}{\|s\|} = \sqrt{3}$  או  $\frac{\|s\|}{\|r\|} = \sqrt{3}$ .

**דיאגרמת דינקין (Dynkin) של  $\phi$**

$\Pi \subseteq \phi$  מערכת יסודית. נקח גרף שקודקודיו הם בהתאמה עם  $\Pi$ . ל  $r, s \in \Pi$  שונים נקשר את  $r$  ל  $s$  ב  $n_{r,s} = \frac{4(r,s)^2}{\|r\|^2 \|s\|^2}$  צלעות. כאשר  $n_{r,s} > 1$ , ראינו כי לאחד השורשים נורמה גדולה מהשני. במקרה הזה, נסמן גם חץ המצביע לשורש בעל הנורמה הגדולה יותר.



איור 1: דיאגרמות דינקין של מערכות שורשים מוכרות. בציור החץ מופנה מהשורש עם האורך הגדול לשורש עם האורך הקטן.

**הערה 2.19** קיים מושג של מערכת שורשים אי-פריקה: זאת מערכת שורשים שלא ניתן להציגה כאיחוד של שתי תת-מערכות שורשים ניצבות. מסתבר שאלו דיאגרמות דינקין של מערכות השורשים האי-פריקות (לא נוכיח ולא נשתמש בזה).

## 2.2 פונקציית האורך

$W = W(\phi), \Pi \subseteq \phi$   
 ל  $w \in W$  נגדיר  $l(w)$  להיות האורך של מכפלה מינימלית של שיקופים פשוטים אשר שווה ל  $w$ .  
 ל  $w \in W$  נגדיר

$$\begin{aligned} \phi_w^+ &= \phi^+ \cap w^{-1}(\phi^-) \\ &= \{\xi \in \phi^+ \mid w(\xi) \in \phi^-\} \\ n(w) &= |\phi_w^+| \end{aligned}$$

**למה 2.20** יהיו  $r \in \Pi, w \in W$

1. אם  $w^{-1}(r) \in \phi^+$  אז  $n(w_r w) = n(w) + 1$

2. אם  $w^{-1}(r) \in \phi^-$  אז  $n(w_r w) = n(w) - 1$

3. אם  $w(r) \in \phi^+$  אז  $n(w w_r) = n(w) + 1$

4. אם  $w(r) \in \phi^-$  אז  $n(w w_r) = n(w) - 1$

**הוכחה:** לפי טענה 2.7 מתקיים  $w_r(\phi^+ \setminus \{r\}) = \phi^+ \setminus \{r\}$  ולכן גם  $w_r(\phi^- \setminus \{-r\}) = \phi^- \setminus \{-r\}$ . לכן  $w_r$  מחליף סימן לשני שורשים בדיוק ואלה הם  $\pm r$ .

$$\begin{aligned} \phi_{w_r w}^+ &= \phi^+ \cap w^{-1} w_r(\phi^-) \\ &= \phi^+ \cap w^{-1}((\phi^- \setminus \{-r\}) \cup \{r\}) \\ &= (\phi^+ \cap w^{-1}(\phi^- \setminus \{-r\})) \cup (\phi^+ \cap \{w^{-1}(r)\}) \end{aligned}$$

1. נניח כי  $w^{-1}(r) \in \phi^+$  , אז  $w^{-1}(-r) \in \phi^-$  ואז

$$\phi^+ \cap w^{-1}(\phi^- \setminus \{-r\}) = \phi^+ \cap w^{-1}(\phi^-) = \phi_w^+$$

לכן

$$\phi_{w_r w}^+ = \phi_w^+ \cup \{w^{-1}(r)\}$$

$$.n(w_r w) = n(w) + 1 \text{ ולכן}$$

2. אם  $w^{-1}(r) \in \phi^-$  נקבל

$$\begin{aligned} \phi_{w_r w}^+ &= (\phi^+ \cap w^{-1}(\phi^- \setminus \{-r\})) \cup (\phi^+ \cap \{w^{-1}(r)\}) \\ &= \underbrace{(\phi^+ \cap w^{-1}(\phi^-))}_{w^{-1}(-r) \in \phi^+} \setminus (\{w^{-1}(-r)\}) \\ &= \phi_w^+ \setminus (\{w^{-1}(-r)\}) \end{aligned}$$

$$.n(w_r w) = n(w) - 1 \text{ ולכן}$$

כדי להראות את 3, 4, נבצע חישוב דומה לקודם:

$$\begin{aligned} \phi_{w w_r}^+ &= \phi^+ \cap w_r w^{-1}(\phi^-) \\ &= w_r [w_r(\phi^+) \cap w^{-1}(\phi^-)] \\ &= w_r [(\{-r\} \cup w_r(\phi^+ \setminus \{r\})) \cap w^{-1}(\phi^-)] \\ &= w_r [((\phi^+ \setminus \{r\}) \cap w^{-1}(\phi^-)) \cup (\{-r\} \cap \{w^{-1}(\phi^-)\})] \end{aligned}$$

וממשיכים באופן דומה לקודם. ■

**משפט 2.21**  $l(w) = n(w)$

**הוכחה:** נרשום  $w = w_{r_1} w_{r_2} \cdots w_{r_k}$  כאשר  $r_1, \dots, r_k \in \Pi$  ו  $k = l(w)$

$$\begin{aligned} n(w) &= n((w_{r_1} \cdots w_{r_{k-1}}) \cdot w_{r_k}) \\ &= n(w_{r_1} \cdots w_{r_{k-1}}) \pm 1 \\ &\leq n(w_{r_1} \cdots w_{r_{k-1}}) + 1 \\ &\leq n(w_{r_1} \cdots w_{r_{k-2}}) + 2 \\ &\leq \dots \\ &\leq n(w_{r_1}) + k - 1 = k = l(w) \end{aligned}$$

לכן  $n(w) \leq l(w)$

נניח בשלילה כי  $n(w) < l(w)$ . לכן בשרשרת אי-השוויונים יש לפחות אי-שוויון חזק אחד. לכן יש  $j$  כך ש

$$n((w_{r_1} \cdots w_{r_j}) \cdot w_{r_{j+1}}) = n(w_{r_1} \cdots w_{r_j}) - 1$$

לפי למה 2.20 זה מחייב  $w_{r_1} \cdots w_{r_j}(r_{j+1}) \in \phi^-$ . מתקיים  $r_{j+1} \in \phi^+ \setminus \{r_j\}$  כי אחרת  $r_{j+1} = r_j$  ואז  $w_{r_j} w_{r_{j+1}} = 1$  וזה מקצר את המכפלה של  $w$  ב-2 וזו סתירה. לכן  $w_{r_j}(r_{j+1}) \in \phi^+ \setminus \{r_j\} \subseteq \phi^+$ . לכן קיים  $i < j$  כך ש  $w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j}(r_{j+1}) \in \phi^+$  וכך  $w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j}(r_{j+1}) = r_i$ . מכאן  $w_{r_i} [w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j}(r_{j+1})] \in \phi^-$  ש במקרה כזה ראינו (ראו סוף ההוכחה של משפט 2.11) כי

$$\begin{aligned} w_{r_i} &= w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} w_{r_{j+1}} (w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j})^{-1} \\ &= w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} w_{r_{j+1}} w_{r_j} \cdots w_{r_{i+1}} \\ &\implies \\ w_{r_i} w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} &= w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} w_{r_{j+1}} \end{aligned}$$

נציב ב- $w$ :

$$\begin{aligned} w &= w_{r_1} w_{r_2} \cdots w_{r_{i-1}} (w_{r_i} \cdots w_{r_j}) \cdot w_{r_{j+1}} \cdots w_{r_k} \\ &= w_{r_1} w_{r_2} \cdots w_{r_{i-1}} (w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} w_{r_{j+1}}) \cdot w_{r_{j+1}} \cdots w_{r_k} \\ &= w_{r_1} w_{r_2} \cdots w_{r_{i-1}} w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} \cdot w_{r_{j+2}} \cdots w_{r_k} \end{aligned}$$

■ וזו מכפלה קצרה יותר (ב-2 איברים). סתירה.

**מסקנה 2.22** נניח כי  $w(\Pi) = \Pi$  אז  $w = 1$ .

**הוכחה:** כיוון שכל איבר ב- $\phi^+$  הוא צירוף לינארי של איברי  $\Pi$  במקדמים  $0 \leq$ , נסיק כי  $w(\phi^+) = \phi^+$  ואז

$$\begin{aligned} l(w) = n(w) &= |\phi_w^+| = |\phi^+ \cap w^{-1}(\phi^-)| \\ &= |w(\phi^+) \cap \phi^-| \\ &= |\phi^+ \cap \phi^-| = 0 \end{aligned}$$

■ וזה מחייב  $w = 1$ .

**הערה 2.23** נזכר כי  $W(A_l) \cong S_{l+1}$ . כאן

$$\begin{aligned} \phi^+ &= \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq l+1\} \\ \phi^- &= \{e_i - e_j \mid 1 \leq j < i \leq l+1\} \end{aligned}$$

ויש איזומורפיזם  $\sigma \mapsto w(\sigma)$ . במקרה זה  $l(w(\sigma)) = n(w(\sigma))$  הוא אורך הקצר ביותר של  $\sigma$  כמכפלת חילופים, שגם שווה למספר הזוגות  $(i, j)$  עם  $i < j$  כך ש  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

**משפט 2.24** 1. תהי  $\phi \subseteq \Pi$  מערכת יסודית. אז לכל  $w \in W$  גם  $w(\Pi) \subseteq \phi$  היא מערכת יסודית.

2. לכל שתי מערכות יסודיות  $\Pi_1, \Pi_2 \subseteq \phi$  יש  $w \in W$  יחיד כך ש  $w(\Pi_1) = \Pi_2$ .

**הוכחה:**

1. ברור כי  $W(\Pi)$  בת"ל. יהי  $\xi \in \phi$ . נכתוב  $\xi = w(\xi')$ , כאשר  $\xi' \in \phi$ . נכתוב

$$\xi' = \sum_{r \in \Pi} x_r \cdot r$$

או  $x_r \geq 0$  או  $x_r \leq 0$  לכל  $r \in \Pi$ .

$$\xi = \sum_{w(r) \in \Pi} x_r \cdot w(r)$$

כל המקדמים  $0 \leq$  או  $0 \geq$ .

נרצה להראות קצת יותר. תהי  $\phi^+$  מערכת השורשים החיוביים (היחידה) המכילה את  $\Pi$ . ראינו כי  $\phi^+ = \phi \cap V^+$  כאשר  $V^+ \subseteq V$  הוא סגור ביחס לחיבור, לכפל בסקלר חיובי, וכן כך ש  $V = V^+ \cup V^- \cup \{0\}$ . ברור כי  $w(V^+) = w(V^+) \cup w(V^-) \cup \{0\}$  ולכן  $V^+$

$$\phi \cap w(V^+) = w(\phi \cap V^+) = w(\phi^+) \supseteq w(\Pi)$$

לכן  $w(\phi^+)$  היא המערכת החיובית היחידה המכילה את המערכת היסודית  $w(\Pi)$ .

2. נניח כי  $\Pi_1 \subseteq \phi_1^+$ ,  $\Pi_2 \subseteq \phi_2^+$  (המערכות החיוביות המתאימות). נוכיח את הטענה באינדוקציה על

$$n = |\phi_1^+ \cap \phi_2^-|$$

אם  $n = 0$  אז  $\phi_1^+ \subseteq \phi_2^+$  ולכן מיחידות המערכת השורשים החיובית המכילה את  $\Pi_1$  נקבל כי  $\phi_1^+ = \phi_2^+$ . מיחידות המערכת השורשים המוכלת ב  $\phi_1^+$  נקבל  $\Pi_1 = \Pi_2$  ולכן הטענה נכונה ע"י בחירת  $w = 1$ .

נניח כי  $n \geq 1$ . נראה כי  $\Pi_1 \cap \phi_2^-$  לא ריקה. אחרת  $\Pi_1 \subseteq \phi_2^+$ . כאן  $\phi_1^+ \subseteq \phi_2^+$  ולכן  $\phi_1^+ = \phi_2^+$  ומכאן  $\phi_1^+ \cap \phi_2^-$  ריקה. סתירה.

נבחר  $r \in \Pi_1 \cap \phi_2^-$  נתבונן ב

$$\begin{aligned} w_r(\phi_1^+) \cap \phi_2^- &= w_r(\phi_1^+ \setminus \{r\} \cup \{r\}) \cap \phi_2^- \\ &= (\phi_1^+ \setminus \{r\} \cup \{-r\}) \cap \phi_2^- \\ &= \underbrace{(\phi_1^+ \setminus \{r\})}_{-r \in \phi_2^+} \cap \phi_2^- \\ &= (\phi_1^+ \cap \phi_2^-) \setminus \{r\} \end{aligned}$$

ולכן

$$|w_r(\phi_1^+) \cap \phi_2^-| = |(\phi_1^+ \cap \phi_2^-) \setminus \{r\}| = n - 1$$

באינדוקציה (כיוון ש  $w_r(\phi_1^+)$  היא המערכת החיובית היחידה שמכילה את  $w_r(\Pi_1)$ ), יש  $w' \in W$  כך ש  $\Pi_2 = w'(w_r(\phi_1^+))$ . נקח  $w = w'w_r$ .

לבסוף, אם  $w_1(\Pi_1) = \Pi_2$ ,  $w_2(\Pi_1) = \Pi_2$  אז  $w_2^{-1}w_1(\Pi_1) = \Pi_1$ . ממסקנה 2.22 נובע כי  $w_2^{-1}w_1 = 1$  ולכן  $w_2^{-1}w_1 = 1$ .

■

**מסקנה 2.25** מספר המערכות היסודיות ב  $\phi$  הוא  $|W|$ .

**משפט 2.26** נקבע מערכת יסודית  $\phi \supseteq \phi^+ \supseteq \Pi$ . יש איבר יחיד  $w_0 \in W$  כך ש

$$w_0(\phi^+) = \phi^-$$

$w_0$  הוא מסדר 2. הוא בעל אורך מקסימלי מבין איברי  $W$ . מתקיים  $l(w) = \frac{1}{2}|\phi|$ .

**הוכחה:**  $-\Pi \subseteq \phi^-$  היא מערכת יסודית והמערכת החיובית היחידה המכילה את  $-\Pi$  היא  $\phi^-$ . ממשפט 2.24 יש  $w_0 \in W$  כך ש  $w_0(\Pi) = -\Pi$  ולכן ברור ש  $w_0(\phi^-) = \phi^+$ . נניח כי  $w'_0 \in W$  גם מקיים  $w'_0(\phi^+) = \phi^-$ . מההוכחה של משפט 2.24, היא המערכת היסודית החלקית ל- $\phi^-$ . זה מחייב ש  $w'_0(\Pi) = -\Pi$ . מהיחידות במשפט 2.24,  $w'_0 = w_0$ .

ברור כי  $w_0^2(\Pi) = \Pi$ . שוב מהיחידות במשפט 2.24 נקבל  $w_0^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} l(w_0) = n(w_0) &= |\phi^+ \cap w_0^{-1}(\phi^-)| \\ &= |w_0(\phi^+) \cap \phi^-| \\ &= |\phi^- \cap \phi^-| = |\phi^-| = \frac{1}{2}|\phi| \end{aligned}$$

וזו המקסימום שיכול להתקבל שכן הקבוצה  $\phi^+ \cap w_0^{-1}(\phi^-)$  היא קבוצה חלקית ל- $\phi^+$ , ולכן לכל היותר מגודל  $\phi^+$ .

■

**דוגמה**

$A_l$  ב

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \dots & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}_{(l+1) \times (l+1)}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} w_0(e_i - e_j) &= e_{l+1-i} - e_{l+1-j} \\ i < j &\iff l+1-i > l+1-j \\ e_i - e_j \in \phi^+ &\iff e_{l+1-i} - e_{l+1-j} \in \phi^- \end{aligned}$$

ולכן  $w_0(\phi^+) = \phi^-$ .



### 2.3 יוצרים ויחסים בחבורת Weyl

נקבע  $\phi \subseteq \Pi$  מערכת יסודית. לכל  $r, s \in \Pi$  יהי  $m_{r,s}$  הסדר של האיבר  $w_r w_s$  ב  $W$   $(r \in \Pi$  לכל  $m_{r,r} = 1)$ .

**משפט 2.27**  $W$  היא החבורה הנוצרת ע"י  $\{w_r \mid r \in \Pi\}$  עם היחסים  $(w_r w_s)^{m_{r,s}} = 1$  לכל  $r, s \in \Pi$ .

**הוכחה:** תהי  $F(\Pi)$  החבורה החופשית על איברי  $\Pi$ . נסמן ל  $r \in \Pi$  את היוצר המתאים ל  $w'_r$ .

תהי  $R \subseteq F(\Pi)$  תת-החבורה הנורמלית הקטנה ביותר ביותר אשר מכילה את הקבוצה

$$\{(w'_r w'_s)^{m_{r,s}} \mid r, s \in \Pi\}$$

יש הומומורפיזם על (ויחיד)

$$\begin{aligned} F(\Pi) &\rightarrow W \\ w'_r &\mapsto w_r \end{aligned}$$

לכל  $x \in \Pi$  ברור ש  $Rx$  חלקית לגרעין. לכן יש הומומורפיזם על

$$F(\Pi)/R \rightarrow W$$

המשפט אומר שזה איזומורפיזם.

נניח כי  $w_{r_1} \cdots w_{r_k} = 1$  כאשר  $r_i \in \Pi$  ללא חזרות רצופות. צריך להראות  $w'_{r_1} \cdots w'_{r_k} \in R$  ההוכחה באינדוקציה על  $k$ . הבסיס  $k = 0$  טריוואלי. כיוון ש  $\det w_{r_i} = -1$ , נקבל כי  $(-1)^k = 1$  ולכן  $k = 2m$  זוגי. נרשום

$$\underbrace{w_{r_1} \cdots w_{r_{m+1}}}_{m+1 \text{ terms}} = \underbrace{w_{r_{2m}} \cdots w_{r_{m+2}}}_{m-1 \text{ terms}}$$

ולכן  $n(w_{r_1} \cdots w_{r_{m+1}}) = l(w_{r_{2m}} \cdots w_{r_{m+2}}) \leq m-1 < m+1$  כמו בהוכחה של משפט 2.21 בדבר  $l = n$ , יש  $i < j \leq m$  כך ש

$$w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} (r_{j+1}) = r_i$$

וכמו בהוכחה זו נסיק כי

$$w_{r_i} w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} = w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j} w_{r_{j+1}}$$

זהו יחס באורך  $2(j-i+1) \leq 2m = k$

אם  $2(j-i+1) < k$ , נפעיל אינדוקציה ואז

$$w'_{r_i} w'_{r_{i+1}} \cdots w'_{r_j} = w'_{r_{i+1}} \cdots w'_{r_j} w'_{r_{j+1}} \pmod{R} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 1 &= w_{r_1} \cdots w_{r_k} = w_{r_1} \cdots w_{r_{i-1}} (w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_{j+1}}) w_{r_{j+1}} \cdots w_{r_{2m}} \\ &= w_{r_1} \cdots w_{r_{i-1}} (w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j}) w_{r_{j+2}} \cdots w_{r_k} \end{aligned}$$

באינדוקציה

$$w'_{r_1} \cdots w'_{r_{i-1}} \left( w'_{r_{i+1}} \cdots w'_{r_j} \right) w'_{r_{j+2}} \cdots w'_{r_k} \in R$$

ולפי (2) נקבל

$$\begin{aligned} R \ni w'_{r_1} \cdots w'_{r_{i-1}} \left( w'_{r_{i+1}} \cdots w'_{r_j} \underbrace{w'_{r_{j+1}} w'_{r_{j+1}}}_1 \right) w'_{r_{j+2}} \cdots w'_{r_k} &= \\ = w'_{r_1} \cdots w'_{r_{i-1}} \left( w'_{r_i} w'_{r_{i+1}} \cdots w'_{r_j} w'_{r_{j+1}} \right) w'_{r_{j+2}} \cdots w'_{r_k} \end{aligned}$$

נניח כי  $j - i + 1 = m$ . זה ייתכן רק כאשר  $i = 1, j = m$  ואז

$$w_{r_2} \cdots w_{r_m} (r_{m+1}) = r_1 \quad (3)$$

נצמיד את השוויון

$$w_{r_1} \cdots w_{r_k} = 1$$

ב  $w_{r_1}$  ונקבל

$$w_{r_2} \cdots w_{r_k} w_{r_1} = 1$$

נחזור על הארגומנט: או  $w'_{r_2} \cdots w'_{r_k} w'_{r_1} \in R$  או  $w'_{r_3} \cdots w'_{r_{m+1}} (r_{m+2}) = r_2$  במקרה הראשון נצמיד ב  $w'_{r_1}$  (כזכור  $R$  תת-חבורה נורמלית) ונקבל  $w'_{r_1} w'_{r_2} \cdots w'_{r_k} \in R$ .

במקרה השני

$$w_{r_2} = (w_{r_3} \cdots w_{r_{m+1}}) w_{r_{m+2}} (w_{r_{m+1}} \cdots w_{r_3})$$

(לפי הזהות  $w = w s w^{-1} \iff w(s) = r$  בסוף ההוכחה של משפט 2.11) לכן

$$w_{r_3} \cdots w_{r_{m+2}} = w_{r_2} w_{r_3} \cdots w_{r_{m+1}}$$

נכפול ב  $w_{r_3} w_{r_2}$  מצד שמאל ונקבל

$$w_{r_3} w_{r_2} w_{r_3} \cdots w_{r_{m+2}} = w_{r_4} \cdots w_{r_{m+1}}$$

$$\implies$$

$$w_{r_3} w_{r_2} w_{r_3} \cdots w_{r_{m+2}} w_{r_{m+1}} \cdots w_{r_4} = 1$$

נחזור על הארגומנט: או

$$w'_{r_3} w'_{r_2} w'_{r_3} \cdots w'_{r_{m+2}} w'_{r_{m+1}} \cdots w'_{r_4} \in R$$

או (האנלוג של (3))

$$w_{r_2} w_{r_3} \cdots w_{r_m} (r_{m+1}) = r_3 \quad (4)$$

במקרה הראשון,

$$\begin{aligned} w'_{r_3} w'_{r_2} w'_{r_3} \cdots w'_{r_{m+2}} &= w'_{r_4} \cdots w'_{r_{m+1}} \pmod{R} \\ w'_{r_3} \cdots w'_{r_{m+2}} &= w'_{r_2} w'_{r_3} w'_{r_4} \cdots w'_{r_{m+1}} \pmod{R} \end{aligned} \quad (5)$$

כמו קודם

$$\begin{aligned} 1 &= w_{r_1} \cdots w_{r_k} \\ &= w_{r_1} \cdot (w_{r_2} \cdots w_{r_{m+1}}) \cdot w_{r_{m+2}} \cdots w_{r_k} \\ &= w_{r_1} \cdot (w_{r_3} \cdots w_{r_{m+2}}) \cdot w_{r_{m+2}} \cdots w_{r_k} \\ &= w_{r_1} \cdot (w_{r_3} \cdots w_{r_{m+1}}) \cdot w_{r_{m+3}} \cdots w_{r_k} \end{aligned}$$

באינדוקציה נקבל

$$w'_{r_1} \cdot (w'_{r_3} \cdots w'_{r_{m+1}}) \cdot w'_{r_{m+3}} \cdots w'_{r_k} \in R$$

ומשוויון 5 נקבל  $w'_{r_1} \cdots w'_{r_k} \in R$

במקרה השני, נסיק מ(3) ו(4) כי  $r_1 = r_3$

נחזור על הארגומנט שוב ושוב אז או שנוכיח כמו קודם כי  $w'_{r_1} \cdots w'_{r_k} \in R$  כי יכולנו להפעיל אינדוקציה ואם זה לא יצליח, נקבל לבסוף

$$r := r_1 = r_3 = r_5 = \cdots = r_{2m-1}$$

נחזור על כל הצעדים האלה ל

$$w_{r_2} \cdots w_{r_m} \cdot w_{r_1} = 1$$

אם באיזה שלב הוכח המשפט, אז טוב. אחרת נקבל

$$s := r_2 = r_4 = \cdots = r_{2m}$$

אז

$$\begin{aligned} w'_{r_1} \cdots w'_{r_{2m}} &= w'_r w'_s w'_r w'_s \cdots w'_r w'_s \\ &= (w'_r w'_s)^m \end{aligned}$$

וכן

$$(w_r w_s)^m = 1$$

■ ולכן  $w'_{r_1} \cdots w'_{r_{2m}} = (w'_r w'_s)^{m_{r,s} e} \in R$  ולכן  $m_{r,s} \mid m$

**משפט 2.28** חבורת Weyl היא החבורה הנוצרת ע"י  $\{w_r \mid r \in \phi\}$  עם היחסים  $w_r^2 = 1$  ו  $w_r w_s w_r = w_{w_r(s)}$  לכל  $r, s \in \phi$

**הוכחה:** תהי  $F(\phi)$  החבורה החופשית על  $\phi$ . נסמן את היוצרים ב  $\{w'_r\}_{r \in \phi}$ . תהי  $S \subseteq F(\phi)$  תת-החבורה הנורמלית הקטנה ביותר אשר מכילה את  $w'_r w'_s w'_r (w'_{w_r(s)})^{-1}$  לכל  $r, s \in \phi$ . המשפט אומר ש  $F(\phi)/S \cong W$ . נראה כי  $F(\phi)/S$  נוצרת ע"י  $\{w'_r S \mid r \in \Pi\}$ . יהי  $r \in \phi$ . ממשפט 2.11 יש

$$r_1, \dots, r_k, s \in \Pi$$

כך ש  $w_{r_1} \cdots w_{r_k}(s) = r$  שוב פעם מסוף ההוכחה של משפט 2.11 נובע ש

$$w_r = w_{r_1} \cdots w_{r_k} \cdot w_s \cdot w_{r_k} \cdots w_{r_1}$$

מתקיים

$$w'_{r_k} w'_s w'_{r_k} \equiv w'_{w_{r_k}(s)} \pmod{S}$$

$\implies$

$$\begin{aligned} w'_{r_{k-1}} (w'_{r_k} w'_s w'_{r_k}) w'_{r_{k-1}} &\equiv w'_{r_{k-1}} w'_{w_{r_k}(s)} w'_{r_{k-1}} \pmod{S} \\ &\equiv w'_{w_{r_{k-1} w_{r_k}(s)}} \pmod{S} \end{aligned}$$

וכך נמשיך. לבסוף

$$\begin{aligned} w'_{r_1} \cdots (w'_{r_k} w'_s w'_{r_k}) \cdots w'_{r_1} &\equiv w_{w_{r_1} \cdots w_{r_k}(s)} \pmod{S} \\ &\equiv w_r \pmod{S} \end{aligned}$$

זה מראה ש  $F(\phi)/S$  נוצרת ע"י תמונת  $\{w'_r \mid r \in \Pi\}$  מודולו  $S$ . נניח כי  $w_{\xi_1} \cdots w_{\xi_n} = 1$  כאשר  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \phi$ . צ"ל  $w'_{\xi_1} \cdots w'_{\xi_n} \in S$ . נכתוב את  $w_{\xi_i}$  כמכפלת שיקופים ביחס לשורשים מ  $\Pi$  ונ"ל לגבי  $w'_{\xi_i}$ . לכן יש  $r_1, \dots, r_k \in \Pi$  כך ש

$$\begin{aligned} w'_{\xi_1} \cdots w'_{\xi_n} &= w'_{r_1} \cdots w'_{r_k} \pmod{S} \\ \implies 1 &= w_{\xi_1} \cdots w_{\xi_n} = w_{r_1} \cdots w_{r_k} \end{aligned}$$

ואפשר להניח שאין חזרות. צריך להוכיח כי  $w'_{r_1} \cdots w'_{r_k} \in S$ . ההוכחה באינדוקציה על  $k$ . הבסיס  $k=0$  טריוואלי. בדיוק כמו קודם  $k=2m$  ויש  $i < j \leq m$  כך ש

$$w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j}(r_{j+1}) = r_i$$

ולכן

$$w_{r_i} = (w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j}) w_{r_{j+1}} (w_{r_j} \cdots w_{r_{i+1}})$$

כמו קודם

$$\begin{aligned} (w'_{r_{i+1}} \cdots w'_{r_j}) w'_{r_{j+1}} (w'_{r_j} \cdots w'_{r_{i+1}}) &\equiv w'_{w_{r_{i+1}} \cdots w_{r_j}(r_{j+1})} \pmod{S} \\ &\equiv w'_{r_i} \pmod{S} \end{aligned}$$

מכאן

$$\begin{aligned} w'_{r_i} w'_{r_{i+1}} \dots w'_{r_j} &\equiv w'_{r_{i+1}} \dots w'_{r_j} w'_{r_{j+1}} \pmod{S} \\ &\implies \\ w_{r_i} w_{r_{i+1}} \dots w_{r_j} &= w_{r_{i+1}} \dots w_{r_j} w_{r_{j+1}} \end{aligned} \quad (6)$$

ולכן

$$\begin{aligned} 1 &= w_{r_1} \dots w_{r_k} = w_{r_1} \dots w_{r_{i-1}} (w_{r_i} \dots w_{r_j}) w_{r_{j+1}} \dots w_{r_k} \\ &= w_{r_1} \dots w_{r_{i-1}} (w_{r_{i+1}} \dots w_{r_j} w_{r_{j+1}}) w_{r_{j+1}} \dots w_{r_k} \\ &= w_{r_1} \dots w_{r_{i-1}} (w_{r_{i+1}} \dots w_{r_j}) w_{r_{j+2}} \dots w_{r_k} \end{aligned}$$

ומהנחת האינדוקציה נקבל כי

$$w'_{r_1} \dots w'_{r_{i-1}} (w'_{r_{i+1}} \dots w'_{r_j}) w'_{r_{j+2}} \dots w'_{r_k} \in S$$

מ(6) נקבל  $w'_{r_1} \dots w'_{r_k} \in S$  ולכן קיבלנו  $F(\phi)/S \cong W$  (ע"י ההעתקה  $w_r \mapsto w'_r$ ),  $r \in \phi$ . ■

#### דוגמאות

1.  $A_l$  כאן  $W \cong S_{l+1}$ .

$$\Pi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_l - e_{l+1}\} \subseteq \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq l+1\} = \phi$$

וראינו את ההתאמה

$$\underbrace{w_{e_i - e_{i+1}}}_{\in W} \leftrightarrow \underbrace{(i, i+1)}_{\in S_{l+1}}$$

$m_{i,j} =$  הסדר של האיבר  $w_{e_i - e_{i+1}} \cdot w_{e_j - e_{j+1}}$  ב  $\mathcal{W}$  אז

$$m_{i,j} = \begin{cases} 2 & |i-j| \geq 2 \\ 3 & |i-j| = 1 \implies (k, k+1)(k+1, k+2) = (k, k+1, k+2) \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$S_{l+1}$  היא החבורה נוצרת ע"י  $\sigma_i = (i, i+1)$  עם היחסים

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = 1 \\ (\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1 \\ (\sigma_i \sigma_{i-1})^3 = 1 \\ (\sigma_i \sigma_j)^2 = 1 & |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

.G<sub>2</sub> .2

$$\begin{aligned} \Pi &= \{a = e_1 - e_2, b = 2e_2 - e_1 - e_3\} \subseteq \\ &\subseteq \phi \subseteq V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \end{aligned}$$

אפשר לממש את  $W$  במייצב של  $\text{GL}_3(\mathbb{Z})$  ב

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_b(v) &= v - \frac{2(b, v)}{(b, b)}b \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{2 \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 - x_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &\implies w_b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} w_a^2 &= w_b^2 = I_3 \\ w_a w_b &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & (w_a w_b)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (w_a w_b)^3 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} & (w_a w_b)^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (w_a w_b)^6 &= I_3 \end{aligned}$$

מכאן  $\langle w_a w_b \rangle \subseteq W$  תת-חבורה ציקלית מסדר 6. מתקיים

$$w_a (w_a w_b) = w_b$$

ולכן  $W$  נוצרת ע"י  $\left\{ \underbrace{w_a}_{\text{ord}=2}, \underbrace{w_a w_b}_{\text{ord}=6} \right\}$ .  
נשים לב כי  $\langle w_a \rangle$  פועלת על  $\langle w_a w_b \rangle$ :

$$w_a (w_a w_b) w_a^{-1} = w_a (w_a w_b) w_a = w_b w_a = (w_a w_b)^{-1}$$

לכן

$$\underbrace{\langle w_a w_b \rangle}_{\cong \mathbb{Z}_6} \rtimes \langle w_a \rangle \cong D_{12}$$

החיתוך טריוואלי כי  $\det w_a = -1$  ואילו  $\det (w_a w_b) = 1$ .  
נתבונן באיבר

$$(w_a w_b)^3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

נסתכל לאן איברי  $\Pi$  עוברים תחת העתקה זו

$$a \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -a$$

$$b \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -b$$

קיבלנו כי  $(w_a w_b)^3$  מעביר כל שורש חיובי לשורש שלילי. כלומר, זהו האיבר היחיד  $w_0 = (w_a w_b)^3$  לפי משפט 2.26.

## 2.4 פירוש גיאומטרי

תהי  $V \subseteq \phi$  מערכת שורשים במרחב מכפלה פנימית. נקבע  $\phi^+ \subseteq \phi$ . לכל  $r \in \phi$  נסמן

$$H_r = \langle r \rangle^\perp = \{v \in V \mid (v, r) = 0\}$$

תת-מרחב של  $V$  מקו-מימד 1 (על מישור). נסמן

$$E = V \setminus \left( \bigcup_{r \in \phi^+} H_r \right) = \bigcap_{r \in \phi^+} (V \setminus H_r)$$

$E$  קבוצה פתוחה ב- $V$ . נכתוב

$$V \setminus H_r = \{v \in V \mid (v, r) > 0\} \cup \{v \in V \mid (v, r) < 0\}$$

יהי  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  (כאשר  $\phi^+ = \{r_1, \dots, r_n\}$ ,  $|\phi^+| = n$  ו- $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$  ונסמן גם  $\varepsilon_i = \varepsilon_{r_i}$ ) נסמן

$$C_{\bar{\varepsilon}} = \{v \in V \mid \text{sign}(v, r) = \varepsilon_r, \forall r \in \phi^+\}$$

זאת אולי קבוצה ריקה, כי  $\phi^+$  בד"כ תלויה לינארית.

מתקיים  $E = \bigcup_{C_{\bar{\varepsilon}} \neq \emptyset} C_{\bar{\varepsilon}}$ . קל לראות כי  $C_{\bar{\varepsilon}}$  פתוחה וקשירה. אם  $u, v \in C_{\bar{\varepsilon}}$  אז

$$[u, v] = \{tu + (1-t)v \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq C_{\bar{\varepsilon}}$$

מתקיים כי  $E = \bigcup_{C_{\bar{\varepsilon}} \neq \emptyset} C_{\bar{\varepsilon}}$  איחוד זר של קבוצות פתוחות וקשירות. אלה הם המרכיבים הקשירים של  $E$ . אלה הם החדרים (Chambers) של  $E$  (המתאימים ל- $\phi$ ).

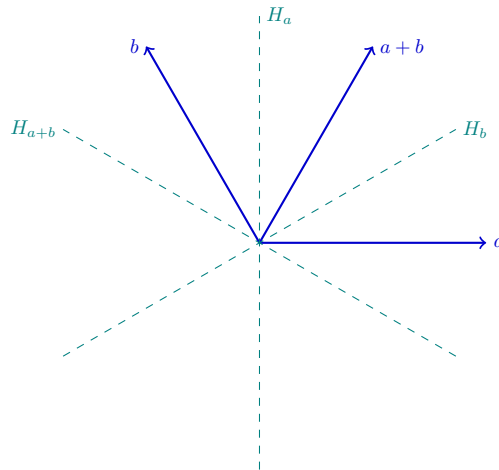
נתון חדר  $C$ . על מישור  $H_r$  (קיר קיר (Wall) של  $C$  אם  $H_r \cap \partial C$  אינו מוכל בתת-מרחב חלקי ממש ל- $H_r$ ).

### דוגמא

$$\phi^+ = \left\{ \underbrace{e_1 - e_2}_a, \underbrace{e_2 - e_3}_b, \underbrace{e_1 - e_3}_{a+b} \right\}, \phi = A_2$$

$$2 \cos \theta = (a, b) = -1 \implies \theta = 120^\circ$$

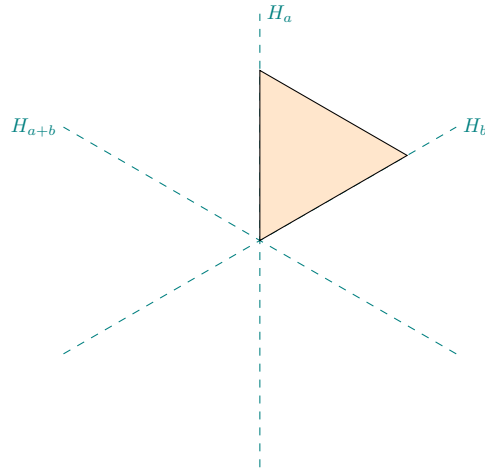
$A_2$



איור 2: הדגמת המושגים על  $A_2$ .



$A_2$



איור 3:  $H_a$  ו- $H_b$  קירות של החדר בציור, אך  $H_{a+b}$  אינו כזה.

באופן כללי תהי  $\phi \subseteq \phi^+ \subseteq \Pi$  מערכת יסודית. נסמן  $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\}$ . נגדיר

$$C_\Pi = \{v \in V \mid (v, r_i) > 0, i = 1, \dots, l\}$$

ברור כי לכל  $v \in C_\Pi$  ו- $r \in \phi^+$  מתקיים  $(v, r) > 0$ , ולכן בסימונים הקודמים  $C_\Pi = C_{(1,1,\dots,1)}$ . לכן זהו חדר (לא ריק. החדר היסודי המתאים ל- $\Pi$ ).

נראה כי הקירות של  $C_\Pi$  הם בדיק העל מישורים  $H_{r_i}$ ,  $1 \leq i \leq l$ . הוכחה:

$$H_{r_i} \cap \partial C_\Pi = \{v \in V \mid (v, r_i) = 0 \mid (v, r_j) = 0 \forall j \neq i\}$$

נניח בשלילה כי  $H_{r_i} \cap \partial C_\Pi$  מוכל בתת-מרחב חלקי ממש ל- $H_{r_i}$ , ולכן יש  $v_0 \in V \setminus \mathbb{R}r_i$  כד

$$H_{r_i} \cap \partial C_\Pi \subseteq v_0^\perp$$

נכתוב  $v_0 = \sum_{t=1}^l x_t r_t$ . לכל  $j \neq i$  נבחר  $v^j \in V$  כך ש

$$(v^j, r_j) = 1$$

$$\forall j \neq j' \quad (v^j, r_{j'}) = 0$$

בפרט  $(v^j, r_i) = 0$ . ברור ש  $v^j \in H_{r_i} \cap \partial C_\Pi$ . בפרט מתקיים  $(v^j, v_0) = 0$ . מצד שני

$$0 = (v^j, v_0) = \left( v^j, \sum_{t=1}^l x_t r_t \right) = \sum_{t=1}^l x_t (v^j, r_t) = x_j$$

כלומר  $x_j = 0$  לכל  $j \neq i \iff v_0 = x_i r_i$ . בסתירה.  
 עתה יהי  $\Pi \setminus \phi^+ \in H_r$ . נראה כי  $H_r$  אינו קיר של  $C_\Pi$ . נכתוב  $r = \sum_{i=1}^l \lambda_i r_i$  עם  $\lambda_i \geq 0$ , לכל  $i$  ולפחות 2 מקדמים  $> 0$ .  
 נניח כי  $v \in H_r \cap \partial C_\Pi$

$$0 = (v, r) = \sum_{i=1}^l \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{(v, r_i)}_{\geq 0}$$

מכאן  $\lambda_i (v, r_i) = 0$  ולכן  $(v, r_i) = 0$  (ל  $i$  עבורם  $\lambda_i > 0$ ). תנאים אלה מגדירים מרחב חלקי ממש ל  $H_r$  (כמובן  $(v, r) = 0$ ). ■

אפשר לאפיין את איברי  $\Pi$  באמצעות  $C_\Pi$ : אלה הם בדיוק כל השורשים ב  $\phi$ , אשר מאונכים לקירות של  $C_\Pi$  ומצביעים בכיוון  $C_\Pi$  (במובן שהמכפלה הפנימית שלהם עם איברי  $C_\Pi$  חיובית).

**בפירוט** נניח כי  $r \in \phi$  מאונך לאיזשהו קיר של  $C_\Pi$  ולכן  $r \in H_{r_i}^\perp = \mathbb{R}r_i$  לאיזשהו  $1 \leq i \leq l$ . כלומר  $r = \lambda r_i$  ולכן  $r = \pm r_i$ . נאמר כי  $r$  מצביע בכיוון  $C_\Pi$  אם  $(r, v) > 0$  לכל  $v \in C_\Pi$ . לכן  $r_i$  מצביע בכיוון  $C_\Pi$ .

### טענה 2.29 פועלת טרנזיטיבית על קבוצת החדרים.

**הוכחה:** נקבע  $\Pi \subseteq \phi^+$  כמו קודם. באופן כללי, לכל  $r \in \phi$  ו  $w \in W$  מתקיים  $w(H_r) = H_{w(r)}$ .

$$(v, r) = 0 \iff (w(v), w(r)) = 0$$

כיון ש  $w(V) = V$ ,

$$\begin{aligned} w(H_r) &= \{w(v) \mid (v, r) = 0\} \\ &= \{w(v) \mid (w(v), w(r)) = 0\} \\ &= \{v \mid (v, w(r)) = 0\} = H_{w(r)} \end{aligned}$$

לכן

$$w(E) = w\left(V \setminus \left(\bigcup_{r \in \phi} H_r\right)\right) = V \setminus \left(\bigcup_{r \in \phi} H_r\right) = E$$

כיון ש  $w$  הומיאומורפיזם,  $w$  מעביר מרכיב קשיר של  $E$  למרכיב קשיר של  $E$ . קל לבדוק גם כי  $w(C_{\bar{\varepsilon}}) = C_{w(\bar{\varepsilon})}$ .

$$\begin{aligned} w(C_{\bar{\varepsilon}}) &= \{w(v) \in V \mid \text{sign}(v, r) = \varepsilon_r, \forall r \in \phi^+\} \\ &= \{v \in V \mid \text{sign}(v, w(r)) = \varepsilon_r, \forall r \in \phi^+\} \\ &= \{v \in V \mid \text{sign}(v, r) = \varepsilon_{w(r)}, \forall r \in \phi^+\} \end{aligned}$$

[כאן מגדירים  $\varepsilon_r$  להיות  $\varepsilon_r$  אם  $r \in \phi^+$  ו  $-\varepsilon_{-r}$  אם  $r \in \phi^-$  ומגדירים  $w(\bar{\varepsilon})$  ע"י  $[r \in \phi^+ \text{ ל } w(\bar{\varepsilon})_r = \varepsilon_{w(r)}$   
 לכן  $w$  גם מעביר קירות של חדר לקירות של חדר.]

**טרנזיטיביות** יהי  $C$  חדר. יהי  $v \in C$ . נתבונן ב  $W \cdot v$ . כזכור  $\phi^+ \cap V^+ = \phi^+$  ו  $V^+$  מגדיר יחס סדר מלא על  $V$ . נבחר  $v' \in W \cdot v$  גדול ביותר ביחס לסדר. נראה כי  $v' \in C_\Pi$ . יהי  $r \in \Pi$

$$w_r(v') \in W \cdot v$$

ולכן  $w_r(v') \leq v'$  כלומר

$$\begin{aligned} v' - \frac{2(v', r)}{(r, r)} r &\leq v' \\ \iff \\ -\frac{2(v', r)}{(r, r)} r &\leq 0 \\ \iff (r \in \phi^+) \\ -\frac{2(v', r)}{(r, r)} &\leq 0 \\ \iff \\ (v', r) &\geq 0 \end{aligned}$$

מתקיים  $\langle w(v), r \rangle = (v', r) \neq 0$  (כי  $\langle v, w(r) \rangle \neq 0$  כי  $v \in C \subseteq E$  ולכן  $(v', r) > 0$ ). נכתוב  $C_\Pi \ni v' = w'(v) \in w'(C)$ . לכן  $C_\Pi \cap w'(C)$  לא ריק. זהו חיתוך של שני חדרים וזה מחייב ש  $C_\Pi = w'(C)$ ,  $C = w'^{-1}(C_\Pi)$ . ■

יהי  $C$  חדר ויהי  $w \in W$  כך ש  $C = w(C_\Pi)$ . ברור כי  $w(C_\Pi) = C_{w(\Pi)}$ . מערכת יסודית. ראינו כי הקירות של  $C_\Pi$  הם  $\{w(H_r)\}$  כאשר  $\{H_r\}$  קירות של  $C_\Pi$ , כלומר  $r \in \Pi$  לכן אפשר לאפיין את  $w(\Pi)$  באמצעות  $C = w(C_\Pi)$ : זאת קבוצת השורשים ב  $\phi$  שמאונכים לאישהו קיר של  $C$  ומצביעים לכיוון  $C$ . זה מראה שכל חדר  $C$  קובע באופן יחיד מערכת יסודית  $\Pi' \subseteq \phi$  כך ש  $C = C_{\Pi'}$ .

**מסקנה 2.30** ההתאמה  $\Pi' \mapsto C_{\Pi'}$  היא חד־חד־ערכית ועל.

**מסקנה 2.31** פעולת  $W$  על קבוצת החדרים היא טרנזיטיבית ופשוטה, כלומר המייצב של כל חדר הוא טריוואלי.

**הוכחה:** יהי  $C$  חדר ויהי  $w \in W$  כך ש  $w(C) = C$ . תהי  $\Pi \subseteq \phi$  המערכת היסודית המתאימה ל  $C$ , אז  $C = C_\Pi$ .

$$C = w(C) = w(C_\Pi) = C_{w(\Pi)}$$

לכן  $C_\Pi = C_{w(\Pi)}$  ומכאן  $w(\Pi) = \Pi$  ומכאן, ממשפט 2.24,  $w = 1$ . ■

**משפט 2.32** יהי  $C$  חדר. אז  $\overline{C}$  מכיל איבר אחד בדיוק מכל מסלול של פעולת חבורת Weyl על המרחב  $V$ .

**הוכחה:** יהי  $v \in V$ . המסלול של  $v$  הוא  $W \cdot v$ . יש חדר  $C'$  כך ש  $\bar{C}' \in W$ . יהי  $w' \in W$  כך ש  $C' = w'(C)$ , לכן  $w'(v) \in \bar{C}$ . יהיו  $w_1, w_2 \in W$  כך ש  $w_1(v) = v_1$  ו  $w_2(v) = v_2$ . צריך להוכיח  $v_1 = v_2$ . נכתוב

$$\underbrace{w_2 w_1^{-1}}_w(v_1) = v_2$$

נוכיח באינדוקציה על האורך של  $w$ , כי אם  $w(v_1) = v_2$ , כאשר  $v_1, v_2 \in \bar{C}$  אז  $v_1 = v_2$ . נקבע מערכת יסודית  $\Pi \subseteq \phi$  כך ש  $C = C_\Pi$ . אם  $l(w) = 0$  אז  $w = 1$  ואז  $v_1 = v_2$ . נניח  $l(w) > 0$ , ראינו שהאורך של  $w$  שווה למספר השורשים החיוביים שעוברים לשליליים ע"י  $w$ , ולכן קיים  $r \in \Pi$  כך ש  $w(r) \in \phi^-$ .  $v_1 \in \bar{C}_\Pi$  ולכן  $(v_1, r) \geq 0$ .  $v_2 \in \bar{C}_\Pi$ ,  $-w(r) \in \phi^+$  ולכן  $(v_2, -w(r)) \geq 0$  כלומר  $(v_2, w(r)) \leq 0$ . אבל

$$0 \leq (v_1, r) = (w(v_1), w(r)) = (v_2, w(r)) \leq 0$$

ולכן  $(v_1, r) = 0$ , ולכן בפרט  $w_r(v_1) = v_1$  ואז  $w_r(v_1) = v_2$ . כיוון ש  $w(r) \in \phi^-$ , ראינו כי (למה 2.20)  $l(w_r) = l(w) - 1$ . באינדוקציה נקבל  $v_1 = v_2$ . ■

### דוגמא

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq l-1\} \cup \{2e_l\} \subseteq \mathbb{R}^l, \Pi \subseteq C_l$$

$$C_\Pi = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \mid x_1 > x_2 > \dots > x_l > 0 \right\}$$

$W \cong S_l \times \mathbb{Z}_2^l$ .  $\sigma \in S_l$  ממומשת ע"י מטריצת התמורה  $w(\sigma)$  כך ש  $w(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$

$$\begin{aligned} w(\sigma)(C_\Pi) &= \left\{ v = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(l)} \end{pmatrix} \mid x_1 > x_2 > \dots > x_l > 0 \right\} \\ &= \left\{ v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} \mid y_{\sigma(1)} > y_{\sigma(2)} > \dots > y_{\sigma(l)} > 0 \right\} \end{aligned}$$

איברי  $\mathbb{Z}_2^l$  ממומשים ב  $W$  כך: נבחר  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l = \pm 1$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$  ממומש כאיבר

$$w(\varepsilon) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
w(\varepsilon)(C_\Pi) &= \left\{ v = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n x_l \end{pmatrix} \mid x_1 > x_2 > \cdots > x_l > 0 \right\} \\
&= \left\{ v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} \mid \varepsilon_1 y_1 > \varepsilon_2 y_2 > \cdots > \varepsilon_l y_l > 0 \right\}
\end{aligned}$$

## 2.5 תת-חבורות פרבוליות של $W$

תהי  $\phi \subseteq V$  מערכת שורשים במרחב מכפלה פנימית. נקבע מערכת יסודית  $\Pi \subseteq \phi$ . תהי  $J \subseteq \Pi$  תת-קבוצה. נסמן

$$\begin{aligned}
V_J &= \text{span}_{\mathbb{R}} J \subseteq V \\
\phi_J &= \phi \cap V_J \\
W_J &= \langle w_r \mid r \in J \rangle \subseteq W
\end{aligned}$$

**טענה 2.33**  $\phi_J$  היא מערכת שורשים ב- $V_J$ .  $J \subseteq \phi_J$  היא מערכת יסודית. חבורת Weyl של  $\phi_J$  היא  $W_J$ .

**הוכחה:** לפי הבנייה,  $J$  הוא בסיס של  $V_J$ . כמובן,  $J \subseteq \phi_J$ . לכל  $r, s \in \phi_J$

$$\phi \ni w_r(s) = s - \frac{2(r, s)}{(r, r)} r \in \text{span}_{\mathbb{R}} \{r, s\} \subseteq V_J$$

לכן  $w_r(\phi_J) \subseteq \phi_J$ . זה מראה  $w_r(s) \in \phi \cap V_J = \phi_J$  לכל  $s \in \phi_J$ . שתי התכונות הנוספות בהגדרת מערכת שורשים נכונות לכל שני איברים מ- $\phi$  ובפרט נכונות לכל שני איברים מ- $\phi_J$ . מההגדרה, כל איבר ב- $\phi_J$  הוא צירוף לינארי של איברי  $J$ . כיוון ש- $J \subseteq \Pi$ , נסיק כי כל המקדמים  $0 \leq$  או כולם  $\geq 0$ . לכן  $J \subseteq \phi_J$  מערכת יסודית. אנו יודעים כי  $W(\phi_J)$  נוצרת ע"י השיקופים המתאימים למערכת יסודית המוכלת ב- $\phi_J$  ולכן  $W(\phi_J) = W_J$  נוצרת ע"י  $\{w_r \mid r \in J\}$ , כלומר  $W(\phi_J) = W_J$ . ■

**הגדרה 2.34**  $W_J \subseteq W$  נקראת תת-חבורה פרבולית.

**טענה 2.35** אם  $J, K \subseteq \Pi$  שונות אז גם  $W_J \neq W_K$ .

**הוכחה:** נניח כי  $W_J = W_K$ . נניח כי  $r \in K$  אז  $w_r \in W_K$  ולכן  $w_r \in W_J$ . אם  $r' \in J$  אז

$$\begin{aligned}
w_{r'}(x) &= x - \frac{2(x, r')}{(r', r')} r' \\
&\implies \\
w_{r'}(x) - x &\in V_J \\
w_{r'}(x) &\equiv x \pmod{V_J}
\end{aligned}$$

מכאן, לכל  $w \in W_J$  מתקיים  $w(x) \equiv x \pmod{V_J}$  (לכל  $x \in V$ ), ובפרט  $w_r(x) - x \in V_J$  לכל  $x \in V$ . נציב  $x = r$  ונקבל

$$\begin{aligned} w_r(r) &= -r \\ \implies \\ -2r &\in V_J \\ \implies \\ r &\in V_J \end{aligned}$$

כלומר  $r$  הוא צירוף לינארי של איברים מ- $J$ . כיוון ש- $r \in \Pi$ ,  $J \subseteq \Pi$ , נסיק כי  $r \in J$ . ■

**טענה 2.36** תהי  $\Pi \subseteq \phi$  מערכת יסודית. נניח כי  $v \in C_\Pi$ . נניח כי  $w \in W$  מייצב את  $v$ : כלומר  $w(v) = v$ . נגדיר

$$J = \{r \in \Pi \mid (r, v) = 0\} = \Pi \cap v^\perp$$

אז  $w$  הוא מכפלה של שיקופים ביחס לאיברי  $J$ , כלומר  $w \in W_J$ .

**הוכחה:** באינדוקציה על  $l(w)$ . אם  $l(w) = 0$  אז  $w = 1$  ואין מה להוכיח. נניח כי  $l(w) > 0$ , אז יש  $r \in \Pi$  כך ש- $w(r) \in \phi^-$ . כמו בהוכחה של טענה 2.32, מתקיים  $(v, r) = 0$  ולכן  $w_r(v) = v$  ולכן  $ww_r(v) = v$  שוב מלמה 2.20,  $l(ww_r) = l(w) - 1$ . באינדוקציה נקבל כי  $ww_r \in W_J$ . כמו כן,  $r \in J$  ואז  $w_r \in W_J$  ולכן  $w \in W_J$ . ■

**הערה 2.37** נניח כי  $w \neq 1$ , אז קיבלנו מההוכחה כי  $J \neq \emptyset$ . נכליל:

**משפט 2.38** נתון  $w \in W$  נסמן

$$U = \{v \in V \mid w(v) = v\}$$

אז  $w$  הוא מכפלה של שיקופים ביחס לשורשים מ- $U^\perp$ .

**הוכחה:** אפשר להניח ש- $w \neq 1$ . נוכיח באינדוקציה את הטענה הבאה:

**טענה 2.39** נניח כי  $w(v_1) = v_1, \dots, w(v_k) = v_k$  אז  $w$  הוא מכפלה של שיקופים ביחס לשורשים המאונכים ל- $v_1, \dots, v_k$ .

האינדוקציה היא על  $k$  (ואז נקח  $\{v_1, \dots, v_k\}$  להיות קבוצה בת"ל מקסימלית ש- $w$  שומר איבר איבר. קבוצה זו היא בסיס של  $U$ ).

עבור  $k = 1$  הטענה נובעת מהטענה הקודמת (כאשר נקח  $\Pi \subseteq \phi$  מערכת יסודית כך ש- $v_1 \in \overline{C_\Pi}$ ).

עבור  $k > 1$  נבחר  $\Pi \subseteq \phi$  מערכת יסודית כך ש- $v_k \in \overline{C_\Pi}$ . מהטענה הקודמת,  $w \in W_J$ , כאשר  $J = \Pi \cap v_k^\perp \neq \emptyset$ . נתבונן ב- $V_J$  ו- $\phi_J$  ונפרק  $V = V_J \oplus V_J^\perp$ . כמובן,  $v_k \in V_J^\perp$ . נפרק

$$v_i = \underbrace{v'_i}_{\in V_J} + \underbrace{v''_i}_{\in V_J^\perp} \quad 1 \leq i \leq k$$

(כאשר  $v_k'' = v_k, v_k' = 0$ )  
 $W_J$  היא חבורת Weyl של  $\phi_J$  שהיא מערכת שורשים ב  $V_J$ .  $w \in W_J$  מייצב את  $v_1, \dots, v_{k-1}$ .  
 כיוון ש  $w \in W_J$ , ברור כי  $w(v) = v$  לכל  $v \in V_J^\perp$ . לכן  $w(v_i'') = v_i''$  לכל  $i$ . ומכיוון ש  $w(v_i) = v_i$  לכל  $i$ , נסיק כי  $w(v_i') = v_i'$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ .  
 באינדוקציה,  $w$  הוא מכפלה של שיקופים ביחס לאיברים מ  $\phi_J$  שהם מאונכים ל  $v_1', \dots, v_{k-1}'$ .  
 כיוון שאיברי  $\phi_J$  ניצבים ל  $V_J^\perp$ , הם גם ניצבים ל  $v_1'', \dots, v_{k-1}''$ . לכן  $w$  הוא מכפלה של שיקופים ביחס לשורשים מ  $\phi_J$  המאונכים ל  $v_1, \dots, v_k$ . בסה"כ:  $w$  הוא מכפלה של שיקופים ביחס לשורשים המאונכים ל  $v_1, \dots, v_k$ .  
 ■

**משפט 2.40** נקבע מערכת יסודית  $\Pi \subseteq \phi$  ותהינה  $J, K \subseteq \Pi$  (לא ריקות). אז

$$1. \langle W_J, W_K \rangle = W_{J \cup K}$$

$$2. W_J \cap W_K = W_{J \cap K}$$

**הוכחה:**

1. ברור.

2. ברור כי  $W_{J \cap K} \subseteq W_J, W_K$  ולכן גם  $W_{J \cap K} \subseteq W_J \cap W_K$ . להפך, נניח כי  $w \in W_J \cap W_K$ . לכן  $w$  מייצב כל וקטור ב  $V_J^\perp$  וכל וקטור ב  $V_K^\perp$  ולכן מייצב כל וקטור ב  $V_J^\perp + V_K^\perp$ . נוכיח כי

$$V_J^\perp + V_K^\perp = V_{J \cap K}^\perp$$

ההכלה  $\subseteq$  ברורה.

$$\begin{aligned} \dim(V_J^\perp + V_K^\perp) &= \dim V_J^\perp + \dim V_K^\perp - \dim \left( \underbrace{V_J^\perp \cap V_K^\perp}_{(V_J + V_K)^\perp} \right) \\ &= \dim V - \dim V_J - \dim V_K + \dim(V_J + V_K) \\ &= \dim V - \dim(V_J \cap V_K) \end{aligned}$$

כיוון ש  $J, K$  שתי תת-קבוצות של אותו בסיס  $\Pi$ , ברור כי  $V_J \cap V_K = V_{J \cap K}$  ולכן

$$\dim(V_J^\perp + V_K^\perp) = \dim V - \dim(V_{J \cap K}) = \dim(V_{J \cap K}^\perp)$$

לכן משיקולי מימדים  $V_J^\perp + V_K^\perp = V_{J \cap K}^\perp$ .

חזרה לעניינו: כעת ברור ש  $w$  מייצב כל וקטור מ  $V_{J \cap K}^\perp$ . ממשפט 2.38,  $w$  שווה למכפלה של שיקופים ביחס לשורשים השייכים ל  $(V_{J \cap K}^\perp)^\perp = V_{J \cap K}$ . שורשים אלה הם שורשי  $\phi$  שהם צירופים לינאריים של  $J \cap K$ , כלומר ב  $\phi_{J \cap K}$ , ולכן  $w \in W_{J \cap K}$ .  
 ■

נמצא קבוצת נציגים ל  $W/W_J$ :

$$W = \bigcup d_j W_J$$

**הגדרה 2.41** תהי  $\phi \subseteq \phi^+ \subseteq \Pi \subseteq J$ . נגדיר

$$D_J = \{w \in W \mid w(J) \subseteq \phi^+\}$$

**משפט 2.42** לכל  $w \in W$  יש הצגה יחידה בצורה  $w = d_j w_j$  כאשר  $d_j \in D_J$  ו  $w_j \in W_J$  ומתקיים  $l(w) = l(d_j) + l(w_j)$ .

**הוכחה:**

**קיום** נוכיח באינדוקציה על האורך. עבור  $l(w) = 0$ ,  $w = 1$ , נקח  $d_j = 1$ ,  $w_j = 1$ . נניח כי  $l(w) > 0$ . אם  $w \in D_J$  אז נבחר  $d_j = w$ ,  $w_j = 1$  וכמובן  $l(w) = l(d_j) + \underbrace{l(1)}_{=0}$ .

נניח כי  $w \notin D_J$ . לכן יש  $r \in J$  כך ש  $w(r) \in \phi^-$ . שוב מלמה 2.20,

$$l(w w_r) = l(w) - 1 < l(w)$$

באינדוקציה  $w w_r = d_j w_j$ ,

$$l(w w_r) = l(d_j w_j) = l(d_j) + l(w_j)$$

כיוון ש  $r \in J$ ,  $w_r \in W_J$  ולכן  $w w_r \in W_J$ ,  $w = d w_j w_r$ ,

$$l(d_j w_j) = l\left(\underbrace{d_j w_j w_r}_{w} w_r\right) = l(w) - 1$$

$\implies$

$$l(w) = l(d_j w_j) + 1 = l(d_j) + l(w_j) + 1$$

לבסוף

$$\begin{aligned} l(w) = l(d_j w_j w_r) &\leq l(d_j) + l(w_j w_r) \\ &\leq l(d_j) + l(w_j) + l(w_r) \\ &= l(d_j) + l(w_j) + 1 \end{aligned}$$

ולכן

$$l(w) = l(d_j) + l(w_j w_r)$$



**יחידות** נניח כי  $d_j w_j = d'_j w'_j \iff d_j = d'_j w'_j w_j^{-1}$  אם  $w'_j w_j^{-1} \neq 1$  אז

$$l(w'_j w_j^{-1}) > 0$$

וכיוון ש  $w'_j w_j^{-1} \in W_J$  אז יש  $r \in J$  כך ש  $w'_j w_j^{-1}(r) \in \phi_J^-$  (ממשפט 2.21 מופעל על המערכת שורשים  $\phi_J$ ). כיוון ש  $d'_j \in D_J$ ,  $d'_j w'_j w_j^{-1}(r) \in \phi^-$  ואז  $d_j(r) \in \phi^-$  וזאת סתירה. לכן  $w'_j = w_j$  ולכן  $d'_j = d_j$ .

■

**מסקנה 2.43** בכל מחלקה  $wW_J$  יש איבר יחיד  $d_j \in D_J$ . הוא האיבר בעל אורך מינימלי מבין כל האיברים של  $wW_J$ .

**הוכחה:** נכתוב  $w = d_j w_j$  כמו קודם ואז  $wW_J = d_j W_J$ . אם יש עוד נציג  $d'_j \in wW_J$  אז נכתוב  $d'_j = w w'_j$  ונציב  $d'_j = d_j w_j w'_j$  ואז  $d'_j w'_j^{-1} = d_j w_j$  ומכאן  $d_j = d'_j$  (וגם  $w'_j^{-1} = w_j$ ).

איבר כללי ב  $wW_J$  נראה כך:  $d_j w_j w'_j$  ואז

$$l(d_j w_j w'_j) = l(d_j) + l(w_j w'_j) \geq l(d_j)$$

■

## דוגמה

$W \cong S_l$  כאן  $A_l$ .

$$\Pi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{l-1} - e_l\}$$

נבחר

$$J = \{e_1 - e_2, \dots, e_{l_1-1} - e_{l_1}\} \cup \{e_{l_1+1} - e_{l_1+2}, \dots, e_{l_1+l_2-1} - e_{l_1+l_2}\} \\ \cup \dots \cup \left\{ e_{l_1+\dots+l_{k-1}+1} - e_{l_1+\dots+l_{k-1}+2}, \dots, e_{l_1+\dots+l_k-1} - \underbrace{e_{l_1+\dots+l_k}}_l \right\}$$

(זרקנו את  $e_{l_1+l_2+\dots+l_{k-1}} - e_{l_1+l_2+\dots+l_{k-1}+1}, \dots, e_{l_1+l_2} - e_{l_1+l_2+1}, e_{l_1} - e_{l_1+1}$  מתקיים)

$$W_J \cong S_{l_1} \times S_{l_2} \times \dots \times S_{l_k}$$

קיים זיהוי  $D_J \leftrightarrow D_J / W_J$ . איברי  $D_J$  מתאימים לתמורות  $\sigma \in S_l$  כך

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(l_1)$$

$$\sigma(l_1 + 1) < \sigma(l_1 + 2) < \dots < \sigma(l_1 + l_2)$$

$\vdots$

$$\sigma(l_1 + \dots + l_{k-1} + 1) < \sigma(l_1 + \dots + l_{k-1} + 2) < \dots < \sigma(l_1 + \dots + l_{k-1} + l_k)$$

### 3 אלגבראות לי פשוטות - סקירה

#### 3.1 אלגבראות לי פשוטות

יהי  $K$  שדה.

**הגדרה 3.1** אלגברת לי  $\mathfrak{g}$  היא מרחב וקטורי מעל  $K$  כך שיש פונקציה  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  כך ש:

1.  $[x, y]$  בילינארי.
2.  $[x, x] = 0$  לכל  $x \in \mathfrak{g}$ .
3. זהות יעקובי:  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$  לכל  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

#### דוגמאות

1.  $M_n(K)$  עם  $[x, y] = xy - yx$  אלגברת לי מעל  $K$ . נסמנה  $\mathfrak{gl}_n(K)$ . באופן כללי יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $K$ .  $\text{End}_K(V)$  אלגברה אסוציאטיבית. זאת אלגברת לי מעל  $V$ , נסמנה  $\mathfrak{gl}(V)$ . באופן כללי, לכל אלגברה אסוציאטיבית  $A$  מעל  $K$  יש מבנה של אלגברת לי מעל  $K$  ביחס לקומוטטור,  $[x, y] = xy - yx$ .

2. תהי  $S \in M_n(K)$  נגדיר

$$\mathfrak{g}_S = \{x \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid {}^t x S + S x = 0\}$$

ברור כי  $\mathfrak{g}_S$  תת-מרחב של  $\mathfrak{gl}_n(K)$  ונראה סגירות ביחס לפעולת הקומוטטור:

$$\begin{aligned} {}^t [x, y] S + S [x, y] &= (y^t x^t - x^t y^t) S + S (xy - yx) \\ &= y^t x^t S - x^t y^t S + Sxy - Syx \\ &= y^t (-Sx) - x^t (-Sy) + Sxy - Syx \\ &= Syx - Sxy + Sxy - Syx = 0 \end{aligned}$$

ל  $S = \begin{pmatrix} & I_l \\ & 1 \\ I_l & \end{pmatrix}$  מסמנים  $S = B_l(K)$   $\mathfrak{g}_S = \mathfrak{o}_{2l+1}(K)$  אלגברת לי האורתוגונלית ב  $2l+1$  משתנים.

עבור  $S = \begin{pmatrix} & I_l \\ I_l & \end{pmatrix}$  מסמנים  $S = D_l(K)$   $\mathfrak{g}_S = \mathfrak{o}_{2l}(K)$  אלגברת לי האורתוגונלית ב  $2l$  משתנים.

3.  $\mathfrak{sl}_n(K) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid \text{tr} x = 0\}$  זאת תת-אלגברת לי של  $\mathfrak{gl}_n(K)$  כי לכל  $x, y \in \mathfrak{gl}_n(K)$  מתקיים  $\text{tr} [x, y] = 0$ .

**הערה 3.2** נשים לב כי באלגברת לי  $[x, y] = -[y, x]$  (נשתמש בכך ש  $[x+y, x+y] = 0$ )  $[x, y] + [y, x] = 0$ .

**הגדרה 3.3** תהי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי מעל  $K$ . אידאל  $J \subseteq \mathfrak{g}$  הוא תת-מרחב מעל  $K$  כך ש  $[g, J] \subseteq J$ .

**הגדרה 3.4** תהיינה  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  אלגבראות לי מעל  $K$ . הומומורפיזם  $T : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  הוא העתקה לינארית מעל  $K$  כך ש

$$T([x, y]) = [T(x), T(y)]$$

לכל  $x, y \in \mathfrak{g}_1$ .

גרעין של הומומורפיזם הוא אידאל  $(\mathfrak{g}_1)$ . כל אידאל  $J$  בג הוא גרעין של הומומורפיזם כי על  $\mathfrak{g}/J$  מבנה של אלגברת לי ע"י

$$[x + J, y + J] = [x, y] + J$$

**העתקה  $\text{ad}_x$**

נגדיר  $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ע"י  $\text{ad}_x(y) = [x, y]$ . זאת העתקה לינארית. מתקיים לכל  $x, y \in \mathfrak{g}$

$$\text{ad}_x \circ \text{ad}_y - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x = \text{ad}_{[x, y]}$$

יהי  $z \in \mathfrak{g}$ . נציב בצד שמאל:

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] - [y, [x, z]] &= [[z, y], x] + [[x, z], y] \\ &= -[[y, x], z] \\ &= [[x, y], z] \\ &= \text{ad}_{[x, y]}(z) \end{aligned}$$

מכאן קיבלנו כי  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  הוא הומומורפיזם של אלגבראות לי.

$$\begin{aligned} \ker(\text{ad}) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_x = 0\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{g}] = 0\} \\ &= Z(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

כאשר  $Z(\mathfrak{g})$  הוא המרכז של  $\mathfrak{g}$ .

$\text{ad}_x$  היא העתקת גזירה (derivation): העתקה כזאת היא העתקה לינארית  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  המקיימת את כלל לייבניץ:

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

**הוכחה:**

$$\begin{aligned} \text{ad}_x([y, z]) &= [x, [y, z]] = [[z, y], x] \\ &= -[[y, x], z] - [[x, z], y] \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Jacobi's Identity}} \\ &= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\ &= [\text{ad}_x(y), z] + [y, \text{ad}_x(z)] \end{aligned}$$

מעתה נניח כי  $\dim_K g < \infty$ . נתבונן בתבנית הבאה:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow K \\ (x, y) &= \text{tr} [\text{ad}_x \circ \text{ad}_y] \end{aligned}$$

לתבנית זאת קוראים תבנית Killing (על שם וילהלם קילינג) על  $\mathfrak{g}$ . זאת תבנית בילנארית [ברור מתכונות לינאריות של  $[\cdot, \cdot]$  ושל  $\text{tr}$ ] ומתקיים  $(x, [y, z]) = ([x, y], z)$ , אכן:

$$\begin{aligned} (x, [y, z]) &= \text{tr} (\text{ad}_x \circ \text{ad}_{[y, z]}) \\ &= \text{tr} (\text{ad}_x \circ (\text{ad}_y \circ \text{ad}_z - \text{ad}_z \circ \text{ad}_y)) \\ &= \text{tr} (\text{ad}_x \circ \text{ad}_y \circ \text{ad}_z - \text{ad}_x \circ \text{ad}_z \circ \text{ad}_y) \\ &= \text{tr} (\text{ad}_x \circ \text{ad}_y \circ \text{ad}_z) - \text{tr} (\text{ad}_x \circ \text{ad}_z \circ \text{ad}_y) \\ &= \text{tr} (\text{ad}_x \circ \text{ad}_y \circ \text{ad}_z) - \text{tr} (\text{ad}_y \circ \text{ad}_x \circ \text{ad}_z) \\ &= \text{tr} ((\text{ad}_x \circ \text{ad}_y - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x) \circ \text{ad}_z) \\ &= \text{tr} (\text{ad}_{[x, y]} \circ \text{ad}_z) = ([x, y], z) \end{aligned}$$

### דוגמה

תבנית Killing על  $\mathfrak{sl}_n(k)$  נתונה ע"י  $(x, y) = 2n \text{tr}(xy)$ .

**הגדרה 3.5** תהי  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  תת-אלגברת לי. הנורמליזטור של  $\mathfrak{h}$  בתוך  $\mathfrak{g}$  הוא

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$$

תת-אלגברת לי וברור כי  $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  אידיאל.

**הגדרה 3.6** 1. אלגברת לי  $\mathfrak{g}$  נקראת אבלית אם  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ , כלומר אם  $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$ .

2. אלגברת לי  $\mathfrak{g}$  נקראת לא אבלית נקראת פשוטה אם אין לה אידיאלים לא טריוואליים.

### 3.2 פתירות ונילפוטנטיות

נסמן

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{span} \{[x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\} \\ \mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \\ &\vdots \end{aligned}$$

אלה הם אידיאלים ב- $\mathfrak{g}$ . (תרגיל. הדרכה: להשתמש בתכונות הגזירה)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^{(k)}$$

**הגדרה 3.7**  $\mathfrak{g}$  נקראת פתירה אם יש  $k$  טבעי כך ש  $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ .

**דוגמה**

$$\mathfrak{b}_n(K) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid x \text{ is an upper triangular matrix}\}$$

ל  $x, y \in \mathfrak{b}_n(K)$  מתקיים

$$[x, y] = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וקומוטטור של שתי מטריצות כאלה נראה כך:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ & 0 & \ddots & * \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

תת־אלגברת לי של  $\mathfrak{g}$  פתירה, היא פתירה, ותמונה הומומורפית של  $\mathfrak{g}$  פתירה, היא פתירה.

**טענה 3.8** (סוג של טענה הפוכה): אם  $J \subseteq \mathfrak{g}$  אידיאל פתיר וגם  $\mathfrak{g}/J$  פתירה, אז  $\mathfrak{g}$  פתירה.

נגדיר

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^0 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^1 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] \end{aligned}$$

מקבלים שרשרת יורדת של אידיאלים

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^k \supseteq \dots$$

**הגדרה 3.9** נאמר כי  $\mathfrak{g}$  נילפוטנטית אם יש  $k$  טבעי כך ש  $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ .

**דוגמה**

$$\mathfrak{n}_n(K) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid x \text{ is an upper triangular nilpotent matrix}\}$$

זאת אלגברת לי נילפוטנטית. ברור כי  $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^k$  ולכן נילפוטנטיות גוררת פתירות כי אם  $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$  אז  $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ . ההפך לא נכון:  $\mathfrak{b}_n(K)$  פתירה, אך לא נילפוטנטית.

**טענה 3.10**  $\mathfrak{g}$  נילפוטנטית  $\iff$  יש טבעי  $k$  ש  $\text{ad}_{x_1} \circ \text{ad}_{x_2} \circ \dots \circ \text{ad}_{x_k} = 0$  לכל  $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{g}$ .

**הוכחה:** התנאי שקול לכך ש  $[x_1, [x_2, [x_3, \dots [x_{k-1}, [x_k, y]]]] = 0$  לכל  $x_1, \dots, x_k, y \in \mathfrak{g}$ . ■

מכאן אם  $\mathfrak{g}$  נילפוטנטית, לכל  $x$  מתקיים כי  $\text{ad}_x$  נילפוטנטי.

**משפט 3.11 (Engel):** נניח כי לכל  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}_x$  נילפוטנטי, אז  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי נילפוטנטית.

**משפט 3.12 (Engel):** תהי  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(K)$  תת-אלגברת לי נילפוטנטית. אז יש  $a \in \text{GL}_n(K)$  כך ש  $aga^{-1} \subseteq \mathfrak{n}_n(K)$ .

**משפט 3.13 (Lie):** תהי  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  תת-אלגברת לי פתירה. אז יש  $a \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  כך ש

$$aga^{-1} \subseteq \mathfrak{b}_n(\mathbb{C})$$

**למה 3.14** נתונים שני תת-מרחבים וקטוריים  $A, B \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . נגדיר

$$M = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid [x, B] \subseteq A\}$$

תהי  $x \in M$  המקיימת  $[x, A] \subseteq A$ . נניח כי  $\text{tr}(xy) = 0$  לכל  $y \in M$ . אז  $x$  מטריצה נילפוטנטית.

**הוכחה:** נניח כי  $x \in M$  כך ש  $\text{tr}(xM) = 0$ . נזכר בפירוק ז'ורדן: קיימים  $s, v$  כך ש  $x = s + v$  כאשר  $s$  ניתנת ללכסון,  $v$  נילפוטנטית וכן  $s$  ו- $v$  מתחלפות. כמו כן,  $s, v$  הם פולינומים של  $x$ , ואפשר לבחור את הפולינומים כך שיהיו בעלי איבר חופשי 0.

קל לראות כי  $\text{ad}_s$  ניתנת ללכסון (למשל, אם  $s = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$  אז

$$\left[ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}, e_{ij} \right] = t_i e_{ij} - t_j e_{ij} = (t_i - t_j) e_{ij}$$

וקטורים עצמיים. אחרת  $s$  צמודה לכזאת ולוקחים הצמודות של  $e_{ij}$ .

$$[\text{ad}_s, \text{ad}_v] = \text{ad}_{[s,v]} = \text{ad}_0 = 0$$

[ $s, v$ ] = 0 כי  $s, v$  מתחלפות]

לכן  $\text{ad}_x = \text{ad}_s + \text{ad}_v$  הוא פירוק ז'ורדן, ולכן  $\text{ad}_s, \text{ad}_v$  פולינומים של  $\text{ad}_x$  בלי איבר חופשי. נסיק כי  $\text{ad}_s(B) \subseteq A, \text{ad}_v(B) \subseteq A$  (למשל עבור  $\text{ad}_s$ ):

$$\text{ad}_s(B) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\text{ad}_x)^i(B)$$

ומהנתון  $(\text{ad}_s(B) \subseteq A \text{ ולכן } \text{ad}_x(B), \text{ad}_x(A) \subseteq A$  מכאן  $s, v \in M$ . נוכיח כי  $s = 0$  ואז  $x$  נילפוטנטית.

יהי  $\{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $\mathbb{C}^n$  של וקטורים עצמיים של  $s: s(v_i) = \lambda_i v_i$  לכל  $1 \leq i \leq n$ . נניח גם כי המטריצה של  $v$  ביחס לבסיס זה היא נילפוטנטית עליונה. צריך להוכיח כי  $\lambda_i = 0$  לכל  $i$ . נגדיר

$$E = \text{span}_{\mathbb{Q}} \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

נראה כי  $E^* = \{0\}$ . יהי  $f \in E^*$ . תהי  $y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  כך ש  $y \cdot v_i = f(\lambda_i) v_i$ . ניתנת ללכסון, ולכן גם  $\text{ad}_y$  ניתנת ללכסון עם ערכים עצמיים  $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j)$ . אפשר לכתוב את  $\text{ad}_y$  כפולינום של  $\text{ad}_s$ : בוחרים פולינום  $r$  כך ש  $f(\lambda_i - \lambda_j) = r(\lambda_i - \lambda_j)$  לכל  $i, j$ . לר אין איבר חופשי, ולכן  $\text{ad}_y = r(\text{ad}_s) = \text{polynomial of ad}_x$ . נסיק כמו קודם  $\text{ad}_y B \subseteq A$ , כלומר  $y \in M$  ולכן

$$0 = \text{tr}(xy) = \text{tr}(sy + vy) = \text{tr}(sy) + \text{tr}(vy)$$

ע"י כתיבת  $sy$  לפי הבסיס  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , מקבלים כי  $\text{tr}(vy) = 0$  (כי  $v$  נילפוטנטית ביחס לבסיס זה, ו  $y$  אלכסונית ביחס לבסיס זה), ו  $\text{tr}(sy) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i)$  (כי  $sy$  ביחס לבסיס הנ"ל אלכסונית עם אלכסון  $(\lambda_i f(\lambda_i))_{i=1}^n$ ). לכן קיבלנו

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i) = 0$$

נפעיל  $f$  עוד פעם ונקבל

$$\sum_{i=1}^n f(\lambda_i)^2 = 0$$

■  $f(\lambda_i) \geq 0$  לכל  $i$  ומכאן  $f(\lambda_i) = 0$  לכל  $i$ . מכאן  $f = 0$ .

**משפט 3.15** (קריטריון Cartan): תהי  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  תת-אלגברת לי. נניח כי לכל  $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  ולכל  $y \in \mathfrak{g}$  מתקיים  $\text{tr}(xy) = 0$ . אז  $\mathfrak{g}$  פתירה.

**הוכחה:** די להראות כי  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  תת-אלגברת לי נילפוטנטית. ממשפט Engel, די להראות כי לכל  $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $\text{ad}_x|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$  נילפוטנטי. זה ינבע אם נראה ש  $x$  מטריצה מטריצה נילפוטנטית, כי

$$\text{ad}_x(y) = xy - yx = \lambda_x(y) - r_x(y)$$

אם  $x$  נילפוטנטית, אז  $\lambda_x, r_x$  נילפוטנטיים. כיוון ש  $\lambda_x \circ r_x = r_x \circ \lambda_x$ , גם  $\lambda_x - r_x$  נילפוטנטית.

נשתמש בלמה עם  $B = \mathfrak{g}, A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

$$M = \{z \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid [z, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

התנאי שצריך מהלמה:  $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  כך ש  $[x, A] \subseteq A$  המקיים  $\text{tr}(xM) = 0$ . ברור כי  $\mathfrak{g} \subseteq M$ . ל  $y \in \mathfrak{g}$  מתקיים  $\text{tr}(xy) = 0$  מהנתון, אבל צריך שזה יהיה נכון ל  $y \in M$  כלשהו. נכתוב

$$x = \sum_{i=1}^l [a_i, b_i]$$

אז

$$\text{tr}(xy) = \sum_{i=1}^l \text{tr}([a_i, b_i] y)$$

כמו בהוכחה של תבנית Killing מתקיים  $\text{tr}([a_i, b_i] y) = \text{tr}(a_i [b_i, y])$  ולכן

$$\text{tr}(xy) = \sum_{i=1}^l \text{tr} \left( \underbrace{a_i}_{\in \mathfrak{g}} \underbrace{[b_i, y]}_{\in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} \right) = 0$$

■ מהלמה,  $x$  מטרצה נילפוטנטית.

**מסקנה 3.16** תהי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי, כך ש  $(x, y) = 0$  לכל  $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  ו  $y \in \mathfrak{g}$ . אז  $\mathfrak{g}$  פתירה.

**הוכחה:** מתקיים  $\text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = 0$  לכל  $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$ . תת-אלגברת לי המקיימת את הנחות המשפט הקודם, ולכן פתירה.

$$\ker(\text{ad}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{g}] = 0\} = Z(\mathfrak{g})$$

■ כמובן,  $Z(\mathfrak{g})$  אידאל פתיר,  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) \cong \text{ad}_{\mathfrak{g}}$  פתירה, ולכן  $\mathfrak{g}$  פתירה.

### 3.3 תת-אלגבראות Cartan, פירוק Cartan ומערכות שורשים

מעתה נניח כי  $K = \mathbb{C}$ .

**הגדרה 3.17** תת-אלגברת לי  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  תקרא תת-אלגברת Cartan אם היא מקיימת:

1.  $\mathfrak{h}$  נילפוטנטית.

2.  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ .



**דוגמה** תהי  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  תת-אלגברה המכילה מטריצה אלכסונית

$$t = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$$

כך ש  $t_i \neq t_j$  לכל  $i \neq j$  נסמן

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid x \text{ is diagonal}\}$$

זאת תת-אלגברת לי.  $\mathfrak{h}$  תת-אלגברת Cartan. **הוכחה:**  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$  ובפרט נילפוטנטית. נניח כי  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ : אז  $x \in \mathfrak{g}$  ומקיים  $[\mathfrak{h}, x] \subseteq \mathfrak{h}$ . בפרט  $[x, t] \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} [x, t] &= xt - tx \\ &= (x_{ij}) \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} (x_{ij}) \\ &= ((t_i - t_j) x_{ij}) \in \mathfrak{h} \end{aligned}$$

לכן לכל  $i \neq j$ ,  $(t_i - t_j) x_{ij} = 0$  (כי ב  $\mathfrak{h}$  יש רק מטריצות אלכסוניות)  $\iff x_{ij} = 0$  לכל  $i \neq j$   
 $x \in \mathfrak{h} \iff (x_{ij})$  אלכסונית  $\iff i \neq j$   
 ■

**דוגמה**

$$1. \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \mid t_1 + \dots + t_n = 0 \right\}, \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$$

$$2. \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t x_1 & {}^t x_3 \\ {}^t x_2 & {}^t x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 \\ -x_4 & x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^t x_2 & {}^t x_4 \\ -{}^t x_1 & -{}^t x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 = {}^t x_2, x_3 = {}^t x_3, x_4 = -{}^t x_1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -{}^t x_1 \end{pmatrix} \mid x_2 = {}^t x_2, x_3 = {}^t x_3 \right\} \end{aligned}$$

כאן

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \mid t = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \right\}$$

תת-אלגברת Cartan.

באופן כללי, נניח כי קיימת  $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{g}$  תת-אלגברת לי כך ש  $\text{ad}_x \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  ניתן ללכסון לכל  $x \in \mathcal{L}$

טענה 3.18  $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = 0$

**הוכחה:** נניח כי  $x \in \mathcal{L}$ . אז  $\text{ad}_x \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  ניתן ללכסון. נראה כי כל הערכים העצמיים של  $\text{ad}_x \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  הם אפס. בשלילה, נניח כי יש  $y \in \mathcal{L}$  כד  $y \neq 0$  ו  $[x, y] = \lambda y$  ו  $\lambda \neq 0$ .  
 $\text{ad}_y \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  ניתן ללכסון. נניח כי  $\{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $\mathcal{L}$  המורכב מוקטורים עצמיים של  $\text{ad}_y \upharpoonright_{\mathcal{L}}$

$$[y, v_i] = \lambda_i v_i$$

נכתוב  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ , אז

$$-\lambda y = [y, x] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [y, v_i] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$$

מתקיים כי  $-\lambda y$  הוא וקטור עצמי של  $\text{ad}_y \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  המתאים לערך העצמי  $\lambda$ ,  $\lambda_i = 0$  שכן  $[y, -\lambda y] = 0$ . נסיק כי לזים עבורם  $\lambda_i \neq 0$ , מתקיים  $\alpha_i = 0$  ולכן

$$-\lambda y = \sum_{\lambda_i=0}^n \alpha_i \lambda_i v_i = 0$$

■

סתירה.

נסיק כי  $\text{ad}_{\mathcal{L}}$  משפחה קומוטטיבית של העתקות לינאריות על  $\mathfrak{g}$  שניתנות ללכסון ולכן ניתנות ללכסון סימולטני. נכתוב

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{L}^*} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

כאשר

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \forall h \in \mathcal{L}\}$$

(מבילינאריות  $[\cdot, \cdot], \alpha : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  הוא פונקציונאל לינארי)

$$\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0 \forall h \in \mathcal{L}\}$$

המרכז של  $\mathcal{L}$ . מהטענה  $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{g}_0$ .  
 אם  $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq \{0\}$  וגם  $\alpha \neq 0$  נאמר כי שורש של  $\mathfrak{g}$  ביחס ל  $\mathcal{L}$ .  
 נסמן

$$\phi = \{\alpha \in \mathcal{L}^* \mid \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_{\alpha} \neq \{0\}\}$$

זאת קבוצת השורשים של  $\mathfrak{g}$  ביחס ל  $\mathcal{L}$ .

$$.1 \quad \mathcal{L} = \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n t_i = 0 \right\}, \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$$

$$\left[ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}, e_{ij} \right] = (t_i - t_j) e_{ij} \quad (i \neq j)$$

$\alpha_{ij} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\alpha_{ij} \left( \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \right) = t_i - t_j \quad (i \neq j)$$

כאן השורשים הם

$$\phi = \{\alpha_{ij} \mid i \neq j\}$$

ומתקיים

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\sum_{i < j} \mathbb{C}(e_{ii} - e_{jj})}_{\mathfrak{g}_0} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \underbrace{\mathbb{C}e_{ij}}_{\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}}$$

.2

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -tx_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in M_n(\mathbb{C}) \mid x_2, x_3 \text{ are symmetric.} \right\}$$

$$\mathfrak{h} = \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} \mid t = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{נסמן } {}^t \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} + e_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} + e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_{ij} = \begin{pmatrix} e_{ij} & \\ & -e_{ji} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{ij} & \\ & -e_{ji} \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} [t, e_{ij}] & \\ & [t, e_{ji}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t_i - t_j) e_{ij} & \\ & (t_j - t_i) e_{ji} \end{pmatrix} \\ &= (t_i - t_j) \begin{pmatrix} e_{ij} & \\ & -e_{ji} \end{pmatrix} = (t_i - t_j) \hat{e}_{ij} \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

נסמן

$$\alpha_{ij} \left( \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \right) = t_i - t_j$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \left[ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} + e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} t(e_{ij} + e_{ji}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(e_{ij} + e_{ji})t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} te_{ij} + te_{ji} + e_{ij}t + e_{ji}t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_i e_{ij} + t_j e_{ji} + t_j e_{ij} + t_i e_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (t_i + t_j) \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

נסמן  $\rho_{ij} \left( \begin{pmatrix} t & \\ & -t \end{pmatrix} \right) = t_i + t_j$ . ע"י חישוב דומה רואים ש

$$\left[ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, t \varepsilon_{ij} \right] = -\rho_{ij} \left( \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} \right) t \varepsilon_{ij}$$

**טענה 3.19** 1. לכל  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^*$ ,  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

2. נניח כי  $\alpha \in \phi$  (כלומר  $\alpha \neq 0$  ו  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ ), אז לכל  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $0 \neq \text{ad}_x$  נילפוטנטי.

3. אם  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^*$  כך ש  $\beta \neq -\alpha$ , אז  $\mathfrak{g}_\alpha$  מאונך ל  $\mathfrak{g}_\beta$  ביחס לתבנית Killing.

**הוכחה:**

1. נניח כי  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $y \in \mathfrak{g}_\beta$  ו  $h \in \mathcal{L}$ . מתכונת הגזירה

$$\begin{aligned} [h, [x, y]] &= [[h, x], y] + [x, [h, y]] \\ &= [\alpha(h)x, y] + [x, \beta(h)y] \\ &= (\alpha(h) + \beta(h)) [x, y] \end{aligned}$$

כלומר  $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

2. ע"י שימוש ב 1 פעמים מתקיים כי  $\text{ad}_x^k(\mathfrak{g}_\beta) \subseteq \mathfrak{g}_{k\alpha+\beta}$  לכל  $\beta \in \mathcal{L}^*$ . כיוון ש  $\mathfrak{g}$  ממימד סופי,  $\phi$  סופית, ולכן יש  $k$  די גדול כך ש  $\mathfrak{g}_{k\alpha+\beta} = 0$  לכל  $\beta \in \phi$  או  $\beta = 0$ . ואז  $\text{ad}_x^k(\mathfrak{g}) = 0$

3. נניח כי  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $y \in \mathfrak{g}_\beta$ . יהי  $h \in \mathcal{L}$  אז

$$([h, x], y) = (-[x, h], y) = (-x, [h, y]) = -\beta(h)(x, y)$$

מצד שני

$$([h, x], y) = (\alpha(h)x, y) = \alpha(h)(x, y)$$

לכן  $(\alpha(h) + \beta(h))(x, y) = 0$ . מאחר ו  $\alpha \neq -\beta$ , נוכל לבחור  $h \in \mathcal{L}^*$  כך ש  $\alpha(h) + \beta(h) \neq 0$  ואז נקבל  $(x, y) = 0$ .

■

**משפט 3.20** תהי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי פשוטה (מעל  $\mathbb{C}$ ). נניח כי  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  תת-אלגברת לי מקסימלית כך ש- $\text{ad}_x|_{\mathfrak{h}} = 0$  לכל  $x \in \mathfrak{h}$ . אז  $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ .

**מסקנה 3.21**  $\mathfrak{h}$  כמו במשפט היא אלגברת Cartan.

**הוכחה:** ראינו באופן כללי כי לתת-אלגברה  $\mathfrak{h}$  כך ש- $\text{ad}_x|_{\mathfrak{h}} = 0$  ניתן ללכסון לכל  $x \in \mathfrak{h}$  מתקיים  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$  (טענה 3.18). לכן  $\mathfrak{h}$  נילפוטנטית. צריך להראות כי  $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . נניח כי  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . נשתמש בפירוק

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{h}}_{=\mathfrak{g}_0} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right)$$

נכתוב  $x = h_0 + \sum_{\alpha \in \phi} x_{\alpha}$ . נניח כי  $h \in \mathfrak{h}$ , לכן  $[x, h] \in \mathfrak{h}$ . מכאן

$$\mathfrak{h} \ni [x, h] = \underbrace{[h_0, h]}_{=0} + \sum_{\alpha \in \phi} \underbrace{[x_{\alpha}, h]}_{-\alpha(h)x_{\alpha}}$$

ולכן

$$[x, h] \in \mathfrak{h} \cap \left( \bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) = \{0\}$$

■

לכן  $x \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$

נניח כי  $\mathfrak{g}$  פשוטה.

**משפט 3.22** כל תת-אלגבראות Cartan של  $\mathfrak{g}$  מתקבלות כמו  $\mathfrak{h}$  במשפט 3.20. כל שתי תת-אלגבראות Cartan של  $\mathfrak{g}$  צמודות ע"י אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}$ .

**טענה 3.23** נניח כי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי פשוטה (מעל  $\mathbb{C}$ ), אז תבנית Killing אינה מנוונת. יתר על כן, צמצום התבנית לתת-אלגברת Cartan אינו מנוון גם כן.

**הוכחה:** נתבונן ברדיקל של התבנית:

$$I = \{x \in \mathfrak{g} \mid (x, y) = 0 \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

זהו אידאל של  $\mathfrak{g}$ : אם  $x \in I$  ו- $z \in \mathfrak{g}$  אז

$$\forall y \in \mathfrak{g} \quad ([x, z], y) = (x, [z, y]) = 0$$

לכן  $[x, z] \in I$ . לכן  $I = 0$  (כלומר התבנית לא מנוונת) או  $I = \mathfrak{g}$  (כלומר התבנית  $= 0$ ). במקרה השני נובע (מקריטריון Cartan, משפט 3.15) כי  $\mathfrak{g}$  פתירה. נתבונן ב- $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ : זהו אידאל  $\neq 0$  (כי מניחים ש- $\mathfrak{g}$  אינה אבלית). לכן  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$  ולכן  $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$  לכל  $k$ , ומכאן  $\mathfrak{g}$  אינה פתירה. סתירה.

נניח כי  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  תת-אלגברת Cartan.

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{g}_0} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

נניח כי  $h_0 \in \mathfrak{h}$  מקיים  $(h_0, \mathfrak{h}) = 0$ . מטענה קודמת (טענה 3),  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$  לכל  $\alpha \in \phi$  ולכן  $(h_0, \mathfrak{g}) = 0$  (מהנתון) ו  $(h_0, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$  לכל  $\alpha \in \phi$ . מכאן  $(h_0, \mathfrak{g}) = 0$  ולכן  $h_0 \in I = \{0\}$ . ■

הפירוק  $\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{g}_0} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$  נקרא פירוק Cartan של  $\mathfrak{g}$  ביחס ל  $\mathfrak{h}$ .

**מסקנה 3.24** לכל  $\alpha \in \phi$  יש  $\alpha' \in \mathfrak{h}$  כך ש  $\alpha(h) = (h, \alpha')$  לכל  $h \in \mathfrak{h}$ . (נובע מכך שהתבנית לא מנוונת)

נסמן בה את תת-אלגברת Cartan של  $\mathfrak{g}$ .

**טענה 3.25** 1.  $\phi$  פורשת את  $\mathfrak{h}^*$ .

2. אם  $\alpha \in \phi$  אז גם  $-\alpha \in \phi^*$ .

3. יהיו  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  אז  $\alpha'(x, y) = [x, y]$ .

4.  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C} \cdot \alpha'$ .

5.  $\alpha(\alpha') = (\alpha', \alpha') \neq 0$  לכל  $\alpha \in \phi$ .

**הוכחה:**

1. נניח בשלילה כי  $\phi$  אינה פורשת את  $\mathfrak{h}^*$ . אז יש  $h_0 \neq 0$  כך ש  $\alpha(h_0) = 0$  לכל  $\alpha \in \phi$  (כי להעתקה  $(\text{span } \Phi)^* \rightarrow \mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$  המוגדרת ע"י העתקת הצמצום  $\varphi \mapsto \varphi|_{\text{span } \Phi}$  יש גרעין). מכאן

$$[h_0, \mathfrak{g}_\alpha] = \alpha(h_0) \mathfrak{g}_\alpha = 0$$

כמו כן  $[h_0, \mathfrak{h}] = 0$ . לכן  $[h_0, \mathfrak{g}] = 0$ . מכאן  $h_0 \in Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$  כי  $Z(\mathfrak{g}) = 0$  פשוטה ולכן אין לה אידאלים לא טריוויאליים.

2. אם  $\alpha \in \phi$  כך ש  $-\alpha \in \phi$  אז  $\alpha + \beta \neq 0$  לכל  $\beta \in \phi$ . במקרה כזה ראינו כי  $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$  (טענה 3.19 סעיף 3). כמו כן ראינו (מאותה טענה) כי  $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_0) = 0$  ו  $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}) = 0$  ואז  $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$ , כלומר  $\mathfrak{g}_\alpha$  חלקי לרדיקל של תבנית Killing, וזה שווה ל 0 (כי התבנית לא מנוונת), סתירה.

3. יהיו  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . יהי  $h \in \mathfrak{h}$ . אז

$$\begin{aligned} \left( h, \underbrace{[x, y]}_{\in \mathfrak{h}} \right) &= ([h, x], y) = \alpha(h)(x, y) = (\alpha', h)(x, y) \\ &= ((x, y) \alpha', h) = (h, (x, y) \alpha') \end{aligned}$$

הוכחנו  $(h, [x, y]) - (x, y) \alpha' = 0$  לכל  $h \in \mathfrak{h}$ . מכיון שהצמצום של תבנית Killing ל  $\mathfrak{h}$  הוא לא מנוון, נקבל כי  $[x, y] - (x, y) \alpha' = 0$ .

4. מ3 נובע כי  $\mathbb{C}\alpha' \subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ . לכן מ3 נותר להראות שיש  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  ו  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  כך ש  $(x, y) \neq 0$ . בשלילה, נניח כי  $\mathfrak{g}_\alpha \ni x_0 \neq 0$  הוא כך ש  $(x_0, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = 0$ . נחזור על הארגומנט בסעיף 2 ונקבל כי  $x_0$  ברדיקל של תבנית Killing ואז  $x_0 = 0$  - סתירה.

(למעשה הראנו יותר: הראנו כי לכל  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  קיים  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  כך ש  $(x, y) \neq 0$ )

5. בשלילה, נניח שיש  $\alpha \in \phi$  כך ש  $\alpha(\alpha') = (\alpha', \alpha') = 0$ . לכן לכל  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $x = 0$  ולכל  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ,  $[\alpha', x] = \alpha(\alpha')x = 0$  ו  $[\alpha', y] = -\alpha(\alpha')y = 0$ . נבחר לפי מה שראינו בסעיף 4,  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  ו  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  כך ש  $(x, y) = 1$ . ואז מסעיף 3 מתקיים

$$\begin{cases} [x, y] = \alpha'(x, y) = \alpha' \\ [\alpha', y] = 0 \\ [\alpha', x] = 0 \end{cases}$$

נסמן  $S = \text{span}\{x, y, \alpha'\} \subseteq \mathfrak{g}$ . היא אלגברת לי (כיוון שסגורה לקומוטטור מהמשוואות) והיא פתירה (בעצם  $[[S, S], S] = 0$ ). יש שיכון

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

(ההעתקה חד-חד-ערכית כי פשוטה) ולכן

$$S \xrightarrow{\text{ad}} \text{ad}_S \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

פתירה כתמונה הומומורפית (אפילו נילפוטנטית). ממשפט 3.13,  $\text{ad}_S$  צמודה ע"י איבר של  $\text{GL}(\mathfrak{g})$  לתוך תת-אלגברה של מטריצות משולשיות עליונות (לאחר בחירת בסיס) ואז

$$\text{ad}_{[S, S]} = [\text{ad}_S, \text{ad}_S]$$

מורכב ממטריצות נילפוטנטיות. ולכן העתקה לינארית נילפוטנטית וגם ניתנת ללכסון (כי  $\alpha' \in \mathfrak{h}$ ). מכאן  $\text{ad}_{\alpha'} = 0$ . נסיק כי  $\alpha' = 0$  (כי  $\text{ad}$  שיכון) - סתירה.

■

אפשר להוכיח עוד:

1. לכל  $\alpha \in \phi$ ,  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ .

2. לכל תת-קבוצה  $B \subseteq \phi$  שפורשת את  $\mathfrak{h}^*$ , מתקיים  $B \subseteq \text{span}_{\mathbb{Q}} \phi$ .

3. לכל  $\alpha, \beta \in \phi$  מתקיים  $(\alpha', \beta') \in \mathbb{Q}$ .

4. נזהה את  $\mathfrak{h}^*$  עם  $\mathfrak{h}$  דרך תבנית Killing. נגדיר  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \text{span}_{\mathbb{R}} \phi$ . אז  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$ . אז תבנית Killing מצומצמת ל  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  היא מכפלה פנימית.

5.  $\phi$  היא מערכת שורשים ב  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  כמרחב מכפלה פנימית (ביחס לתבנית Killing).

נסמן ל  $\phi$   $r, s$

$$A_{r,s} = \frac{2(r, s)}{(r, r)}$$

### דוגמה

$(x, y) = 2(n+1) \operatorname{tr}(xy)$  מתרגיל, תבנית Killing נתונה ע"י  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ .

$$\mathfrak{h} = \left\{ t = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n+1} \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 0 \right\}$$

$$\phi = \{r_{ij} \mid r_{ij}(t) = t_i - t_j \mid i \neq j\}$$

מתקיים

$$r_{ij}(t) = (r'_{ij}, t) = 2(n+1) \operatorname{tr}(r'_{ij} \cdot t)$$

ולכן

$$r'_{ij} = \frac{1}{2(n+1)} (e_{ii} - e_{jj})$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (i < j)$$

ומתקיים

$$A_{r_{ij}, r_{st}} = \frac{2(r_{ij}, r_{st})}{(r_{ij}, r_{ij})} = \frac{2 \operatorname{tr}((e_{ii} - e_{jj})(e_{ss} - e_{tt}))}{\underbrace{\operatorname{tr}((e_{ii} - e_{jj})^2)}_{=2}}$$

$$= \operatorname{tr}(\delta_{is}e_{is} - \delta_{it}e_{it} - \delta_{js}e_{js} + \delta_{jt}e_{jt})$$

$$= \delta_{is} - \delta_{it} - \delta_{js} + \delta_{jt} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$$

מערכת שורשים זו איזומורפית ל- $A_n$ .

**משפט 3.26** תהינה  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$  שתי אלגבראות לי פשוטות מעל  $\mathbb{C}$  בעלות תת-אלגבראות Cartan,  $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}'$ ,  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  ביחס ל $\mathfrak{h}'$  ו $\mathfrak{h}$  ביחס ל $\mathfrak{g}'$  שורשים של  $\phi'$  ו $\phi$  מערכות שורשים של  $\mathfrak{g}$  ו $\mathfrak{g}'$  בהתאמה. נקבע מערכות יסודיות

$$\Pi = \{p_1, \dots, p_l\} \subseteq \phi$$

$$\Pi' = \{p'_1, \dots, p'_l\} \subseteq \phi'$$



נסמן  $1 \leq i, j \leq l$  (המטריצה  $(A_{ij})$  נקראת מטריצת Cartan של  $\mathfrak{g}$ ),  $A'_{i,j} = A_{p'_i, p'_j}$ , נסמן גם  $h_{p'_i} = \frac{2p'_i}{(p'_i, p'_i)}$ ,  $h_{p_i} = \frac{2p_i}{(p_i, p_i)}$ . נבחר  $e_{p_i} \neq 0$  ו  $e_{-p'_i}$  בשביל  $\mathfrak{g}'$ .  
 קיים  $1 \leq i \leq l$  ל  $\mathfrak{g}_{p_i}$  יחיד  $e_{-p_i} \in \mathfrak{g}_{-p_i}$  כך ש  $[e_{p_i}, e_{-p_i}] = h_{p_i}$ . באותו אופן נבחר  $e_{p'_i}$  ו  $e_{-p'_i}$  בשביל  $\mathfrak{g}'$ .  
 נניח כי  $A_{ij} = A'_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq l$ . אז קיים איזומורפיזם יחיד  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  כך ש  $\theta(h_{p_i}) = h_{p'_i}$  ו  $\theta(e_{-p_i}) = e_{-p'_i}$ ,  $\theta(e_{p_i}) = e_{p'_i}$ .

## 4 חבורות Chevalley

### 4.1 קבועי המבנה

תהי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי פשוטה מעל  $\mathbb{C}$ .  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  תת-אלגברת Cartan. נכתוב את פירוק Cartan:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

נבחר מערכת יסודית ומערכת חיובית מתאימה  $\Pi \subseteq \phi^+ \subseteq \phi$ . לכל  $r \in \Pi$  נסמן  $h_r = \frac{2r}{(r,r)} \in \mathfrak{h}$  ואז  $\{h_r \mid r \in \Pi\}$  בסיס של  $\mathfrak{h}$ . לכל  $r \in \phi^+$  נבחר  $e_r \in \mathfrak{g}_r \neq 0$  ויהי  $e_{-r} \in \mathfrak{g}_{-r}$  האיבר היחיד כך ש  $[e_r, e_{-r}] = h_r$ . אז  $\{h_r \mid r \in \Pi\} \cup \{e_r \mid r \in \phi\}$

בסיס של  $\mathfrak{g}$ .

נחשב את הקומוטטור על איברי הבסיס:

$$\begin{aligned} [h_r, h_s] &= 0 & (r, s \in \Pi) \\ [h_r, e_s] &= \frac{2}{(r,r)} [r, e_s] = \frac{2r(s')}{(r,r)} e_s = & (r \in \Pi, s \in \phi) \\ &= \frac{2(r,s)}{(r,r)} e_s = A_{r,s} e_s \end{aligned}$$

אם  $r+s \notin \phi$  אז  $[e_r, e_s] \in \mathfrak{g}_{r+s} = \{0\}$  ולכן  $[e_r, e_s] = 0$ . נסמן במקרה זה  $N_{r,s} = 0$ .  
 אם  $r+s \in \phi$  אז  $[e_r, e_s] \in \mathfrak{g}_{r+s}$  ולכן  $[e_r, e_s] = N_{r,s} \cdot e_{r+s}$  כאשר  $N_{r,s} \in \mathbb{R}$ .  
 $N_{r,s}$  נקראים קבועי המבנה.

תכונות של  $N_{r,s}$  (קבועי המבנה):

$$1. [e_s, e_r] = -[e_r, e_s] \text{ כי } N_{s,r} = -N_{r,s}$$

2. נניח כי  $r_1, r_2, r_3 \in \phi$  כך ש  $r_1 + r_2 + r_3 = 0$  (זה קורה בדיוק כאשר  $r_1 + r_2 \in \phi$  ו  $r_3 = -(r_1 + r_2)$ ) אז מזהות יעקובי

$$\begin{aligned} [[e_{r_1}, e_{r_2}], e_{r_3}] + [[e_{r_2}, e_{r_3}], e_{r_1}] + [[e_{r_3}, e_{r_1}], e_{r_2}] &= 0 \\ [N_{r_1, r_2} e_{-r_3}, e_{r_3}] + [N_{r_2, r_3} e_{-r_1}, e_{r_1}] + [N_{r_3, r_1} e_{-r_2}, e_{r_2}] &= 0 \\ -N_{r_1, r_2} h_{r_3} - N_{r_2, r_3} h_{r_1} - N_{r_3, r_1} h_{r_2} &= 0 \\ \frac{-2N_{r_1, r_2} r_3}{(r_3, r_3)} - \frac{2N_{r_2, r_3} r_1}{(r_1, r_1)} - \frac{2N_{r_3, r_1} r_2}{(r_2, r_2)} &= 0 \end{aligned}$$

נציב  $r_3 = -r_1 - r_2$  ונקבל

$$\left( \frac{2N_{r_1, r_2}}{(r_3, r_3)} - \frac{2N_{r_2, r_3}}{(r_1, r_1)} \right) r_1 + \left( \frac{2N_{r_1, r_2}}{(r_3, r_3)} - \frac{2N_{r_3, r_1}}{(r_2, r_2)} \right) r_2 = 0$$

$r_1, r_2$  הם בת"ל - אם תלויים אז  $r_1 = \pm r_2$  ואז  $r_3 = 0, -2r_1$ , סתירה. לכן קיבלנו

$$\frac{N_{r_1, r_2}}{(r_3, r_3)} = \frac{N_{r_2, r_3}}{(r_1, r_1)} = \frac{N_{r_3, r_1}}{(r_2, r_2)}$$

נתונים  $r, s \in \phi$  כך ש  $r + s \in \phi$ . נתבונן בשרשרת  $r$ -דרך  $s$ :

$$-pr + s, \dots, -r + s, s, r + s, 2r + s, \dots, qr + s$$

$q \geq 1$  (מההנחה),  $p \geq 0$ . ראינו (טענה 2.16) כי  $A_{r,s} = p - q$

$$N_{r,s} \cdot N_{-r,-s} = -(p+1)^2 \quad \mathbf{משפט 4.1}$$

**הוכחה:**

$$\begin{aligned} [[e_r, e_{-r}], e_s] + [[e_{-r}, e_s], e_r] + [[e_s, e_r], e_{-r}] &= 0 \\ [h_r, e_s] + N_{-r,s} [e_{-r+s}, e_r] + N_{s,r} [e_{r+s}, e_{-r}] &= 0 \\ A_{r,s} e_s + N_{-r,s} N_{-r+s,r} e_s + N_{s,r} N_{r+s,-r} e_s &= 0 \\ A_{r,s} + N_{-r,s} N_{-r+s,r} + N_{s,r} N_{r+s,-r} &= 0 \end{aligned}$$

מזהות 2, אם  $r - s \in \phi$  אז

$$\frac{N_{r-s,-r}}{(s,s)} = \frac{N_{-r,s}}{(r-s,r-s)} \implies N_{-r,s} = \frac{(r-s,r-s)}{(s,s)} N_{r-s,-r}$$

ומאחר ולפי הנתון  $r + s \in \phi$  נקבל

$$\frac{N_{r+s,-r}}{(s,s)} = \frac{N_{-r,-s}}{(r+s,r+s)} \implies N_{r+s,-r} = \frac{(s,s)}{(r+s,r+s)} N_{-r,-s}$$

אם  $r - s \notin \phi$  אז גם  $-r + s \notin \phi$  ולכן  $N_{-r+s,r} = 0$  ולכן בכל מקרה נקבל

$$A_{r,s} + \frac{(r-s,r-s)}{(s,s)} N_{r-s,-r} N_{-r+s,r} + \frac{(s,s)}{(r+s,r+s)} N_{s,r} N_{-r,-s} = 0$$

קיבלנו

$$\begin{aligned} A_{r,s} &= -\frac{(r-s,r-s)}{(s,s)} N_{r-s,-r} N_{-r+s,r} + \frac{(s,s)}{(r+s,r+s)} N_{s,r} N_{-r,-s} \\ &= -\frac{(r-s,r-s)}{(s,s)} N_{r,-r+s} N_{-r,r-s} + \frac{(s,s)}{(r+s,r+s)} N_{s,r} N_{-r,-s} \end{aligned}$$

נסמן  $M_{r,s} = \frac{\binom{s,s}{r+s,r+s}}{N_{r,s} N_{-r,-s}}$ . הוכחנו:

$$A_{r,s} = -M_{r,-r+s} + M_{r,s}$$

כעת

$$\begin{aligned} A_{r,s} &= M_{r,s} - M_{r,-r+s} \\ A_{r,-r+s} &= M_{r,-r+s} - M_{r,-2r+s} \\ &\vdots \\ A_{r,-(p-1)r+s} &= M_{r,-(p-1)r+s} - M_{r,-pr+s} \\ A_{r,-pr+s} &= M_{r,-pr+s} - \underbrace{M_{r,-(p+1)r+s}}_{=0} \end{aligned}$$

כאשר  $M_{r,-(p+1)r+s} = 0$  כי  $(p+1)r+s \notin \phi$ . נסכום את השוויונות ונקבל

$$M_{r,s} = A_{r,s} + A_{r,-r+s} + \dots + A_{r,-(p-1)r+s} + A_{r,-pr+s}$$

מתקיים

$$A_{r,-ir+s} = \frac{2(r, -ir+s)}{(r, r)} = -2i + A_{r,s}$$

לכן

$$\begin{aligned} M_{r,s} &= (p+1)A_{r,s} - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - \dots - 2p \\ &= (p+1)A_{r,s} - (p+1)p \\ &= (p+1)(A_{r,s} - p) \end{aligned}$$

נזכר כי  $A_{r,s} = p - q$  ולכן קיבלנו  $M_{r,s} = -q(p+1)$   
 נותר להוכיח את הלמה הבאה:

#### 4.2 למה

$$\frac{\binom{r+s, r+s}{s, s}}{(s, s)} = \frac{p+1}{q}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
 p+1-q \cdot \frac{(r+s, r+s)}{(s, s)} &= \underbrace{\phantom{A_{r,s} + q + 1 - q \cdot \frac{(r+s, r+s)}{(s, s)}}}_{A_{r,s}=p-q} \\
 &= A_{r,s} + q + 1 - q \cdot \frac{(r+s, r+s)}{(s, s)} \\
 &= A_{r,s} + q + 1 - q \cdot \frac{(r, r) + 2(r, s) + (s, s)}{(s, s)} \\
 &= A_{r,s} + 1 - \frac{q(r, r)}{(s, s)} \left( 1 + \frac{2(r, s)}{(r, r)} \right) \\
 &= A_{r,s} + 1 - \frac{q(r, r)}{(s, s)} (1 + A_{r,s}) \\
 &= \left( 1 - \frac{q(r, r)}{(s, s)} \right) (1 + A_{r,s})
 \end{aligned}$$

נחלק למקרים:

$$1. (r, r) \geq (s, s) \iff$$

$$|A_{r,s}| = \frac{2|(r, s)|}{(r, r)} \leq \frac{2|(r, s)|}{(s, s)} = |A_{s,r}|$$

ראינו (בטענה 2.13) כי  $A_{r,s} \cdot A_{s,r} \in \{0, 1, 2, 3\}$  מכאן  $A_{r,s} = 0, \pm 1$  אם  $A_{r,s} = -1$ , גמרנו. נניח כי  $A_{r,s} = 0, 1$   $\iff (r, s) \geq 0$ .

נגדיר  $\phi' = (\mathbb{Z}r + \mathbb{Z}s) \cap \phi$  - זאת מערכת שורשים ש  $\{r, s\}$  מערכת יסודית שלה.  $\phi'$  היא אי-פריקה (אחרת  $\phi$  לא יכלה להיות באף אחת מהקבוצות מאונכות, נקבל כי  $r$  ו  $s$  בקבוצות שונות ולכן  $r+s$  לא יכול להיות באף אחת מהקבוצות הנ"ל). אפשר לבדוק שב  $\phi'$  (ובעצם אפילו ב  $\phi$ ) יש לכל היותר שני אורכים אפשריים לשורשים.

$$\|r+s\|^2 = \|r\|^2 + 2(r, s) + \|s\|^2 \geq \|r\|^2 + \|s\|^2 > \|r\|^2, \|s\|^2$$

לכן  $\|r\|, \|s\| > \|r+s\|$ . כיוון ש  $r, s, r+s \in \phi'$ , נסיק כי  $\|r\| = \|s\|$  ואז

$$\begin{aligned}
 p+1-q \cdot \frac{(r+s, r+s)}{(s, s)} &= \left( 1 - \frac{q(r, r)}{(s, s)} \right) (1 + A_{r,s}) \\
 &= (1 + A_{r,s})(1 - q)
 \end{aligned}$$

לבסוף נראה כי  $\phi \not\subseteq 2r+s$ , ואז  $q=1$  ונקבל את הדרוש:

$$\begin{aligned}
 \|2r+s\|^2 &= 4\|r\|^2 + 4(r, s) + \|s\|^2 \\
 &\geq 4\|r\|^2 + 2(r, s) + \|s\|^2 \\
 &> \|r\|^2 + 2(r, s) + \|s\|^2 \\
 &= \|r+s\|^2 > \|r\|^2 = \|s\|^2
 \end{aligned}$$

מכיוון שב  $\phi'$  לכל היותר שני אורכים שונים,  $\phi \not\subseteq 2r+s$  ולכן גם  $\phi \not\subseteq 2r+s$  ולכן  $q=1$  וקיבלנו את הדרוש.

2. במקרה זה:  $(r, r) < (s, s)$

$$|A_{r,s}| = \frac{2|(r,s)|}{(r,r)} > \frac{2|(r,s)|}{(s,s)} = |A_{s,r}|$$

יש לנו  $r, s \in \phi$  בעלי אורכים שונים. כיוון ש  $r+s \in \phi$  נקבל  $\|r\|^2 + 2(r,s) + \|s\|^2 = \|r+s\|^2 \in \{\|r\|^2, \|s\|^2\}$  ולכן  $(r,s) < 0$  ואז

$$A_{r,s} < A_{s,r} < 0$$

כיוון ש  $A_{r,s} \cdot A_{s,r} \in \{0, 1, 2, 3\}$  נקבל כי  $A_{s,r} = -1$ , כלומר  $\frac{2(r,s)}{(s,s)} = -1$   
נחשב כמו קודם:  $2(r,s) = -(s,s)$

$$\begin{aligned} \|-r+s\|^2 &= \|r\|^2 - 2(r,s) + \|s\|^2 \\ &> \|r\|^2 + \|s\|^2 > \|s\|^2 > \|r\|^2 \end{aligned}$$

נסיק כי  $-r+s \notin \phi$  ולכן  $p=0$  כלומר  $p-q = -q$  ולכן  $A_{r,s} = p-q = -q$  ולכן

$$\begin{aligned} \frac{2(r,s)}{(r,r)} &= -q \\ \implies \\ \frac{(s,s)}{(r,r)} &= q \end{aligned}$$

לכן

$$p+1-q \cdot \frac{(r+s, r+s)}{(s,s)} = \left(1 - \frac{q(r,r)}{(s,s)}\right) (1 + A_{r,s}) = 0$$

כנדרש.

■

■

נניח כי  $r_1, \dots, r_4 \in \phi$  כך ש  $r_1 + r_2 + \dots + r_4 = 0$  (ונניח כי אין שני מחוברים שווים או מנוגדים).

$$\begin{aligned} &[[e_{r_1}, e_{r_2}], e_{r_3}] + [[e_{r_2}, e_{r_3}], e_{r_1}] + [[e_{r_3}, e_{r_1}], e_{r_2}] = 0 \\ &N_{r_1, r_2} [e_{r_1+r_2}, e_{r_3}] + N_{r_2, r_3} [e_{r_2+r_3}, e_{r_1}] + N_{r_3, r_1} [e_{r_3+r_1}, e_{r_2}] = 0 \\ &N_{r_1, r_2} N_{r_1+r_2, r_3} e_{-r_4} + N_{r_2, r_3} N_{r_2+r_3, r_1} e_{-r_4} + N_{r_3, r_1} N_{r_3+r_1, r_2} e_{-r_4} = 0 \end{aligned}$$

נקבל

$$N_{r_1, r_2} N_{r_1+r_2, r_3} + N_{r_2, r_3} N_{r_2+r_3, r_1} + N_{r_3, r_1} N_{r_3+r_1, r_2} = 0$$

מתקיים מזהות 2

$$\begin{aligned}\frac{N_{r_1+r_2, r_3}}{(r_4, r_4)} &= \frac{N_{r_3, r_4}}{(r_1 + r_2, r_1 + r_2)} \\ \frac{N_{r_2+r_3, r_1}}{(r_4, r_4)} &= \frac{N_{r_1, r_4}}{(r_2 + r_3, r_2 + r_3)} \\ \frac{N_{r_3+r_1, r_2}}{(r_4, r_4)} &= \frac{N_{r_2, r_4}}{(r_1 + r_3, r_1 + r_3)}\end{aligned}$$

ולכן קיבלנו את הזהות

$$\frac{N_{r_1, r_2} N_{r_3, r_4}}{(r_1 + r_2, r_1 + r_2)} + \frac{N_{r_2, r_3} N_{r_1, r_4}}{(r_2 + r_3, r_2 + r_3)} + \frac{N_{r_3, r_1} N_{r_2, r_4}}{(r_1 + r_3, r_1 + r_3)} = 0$$

## 4.2 בסיס Chevalley

משפט 4.1 מציע שאולי אפשר לבחור את הבסיס כך ש  $N_{r,s} = \pm(p+1)$  הוא  $p \geq 0$  רגיל המספר הגדול ביותר כך ש  $-pr + s \in \phi$ . נראה שניתן לעשות זאת. נבחר מערכת יסודית  $\Pi = \{p_1, \dots, p_l\} \subseteq \phi^+$  ו  $p'_i = -p_i$

$$\Pi' = \{p'_1, \dots, p'_l\}$$

$\Pi'$  גם מערכת יסודית של  $\phi$ . נבחר  $0 \neq e_{p_i} \in \mathfrak{g}_{p_i}$  וכן  $e_{-p_i} \in \mathfrak{g}_{-p_i}$  כך ש  $h_{p_i} = [e_{p_i}, e_{-p_i}]$ . נגדיר

$$\begin{cases} e'_{p'_i} &= -e_{-p_i} \\ e'_{-p'_i} &= -e_{p_i} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq l)$$

אז

$$\begin{aligned}[e'_{p'_i}, e'_{-p'_i}] &= [-e_{-p_i}, -e_{p_i}] \\ &= [e_{-p_i}, e_{p_i}] \\ &= -[e_{p_i}, e_{-p_i}] \\ &= -h_{p_i} = \frac{-2p_i}{(-p_i, -p_i)} = h_{p'_i}\end{aligned}$$

ומתקיים

$$A_{p'_i, p'_j} = \frac{2(p'_i, p'_j)}{(p'_i, p'_i)} = \frac{2(p_i, p_j)}{(p_i, p_i)} = A_{p_i, p_j}$$

ממשפט 3.26 קיים אוטומורפיזם יחיד  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  כך ש

$$\begin{cases} \theta(e_{p_i}) &= -e_{-p_i} \\ \theta(e_{-p_i}) &= -e_{p_i} \\ \theta(h_{p_i}) &= -h_{p_i} \end{cases}$$

$\theta^2 = \text{id}$  פועל כזהות על וקטורים כאלה ולכן  $\theta^2 = \text{id}$ .  
 יהי  $r \in \phi^+$  (ביחס ל $\Pi$ ). מתרגילי הבית, אפשר לכתוב  $r = r_1 + \dots + r_k$  כך ש  
 $r_1 + \dots + r_i \in \phi^+$  לכל  $i \leq k$  כאשר  $r_1, \dots, r_k \in \Pi$ . בפרט  $r_1 + r_2 \in \phi^+$  ולכן

$$[e_{r_1}, e_{r_2}] = \underbrace{N_{r_1, r_2}}_{\neq 0} e_{r_1+r_2}$$

$$[[e_{r_1}, e_{r_2}], e_{r_3}] \underbrace{N_{r_1+r_2, r_3}}_{\neq 0} e_{r_1+r_2+r_3}$$

כך נמשיך ונקבל

$$[\dots [[e_{r_1}, e_{r_2}], e_{r_3}], \dots e_{r_k}] = c \cdot e_r$$

כאשר  $c \neq 0$ . נפעיל  $\theta$  ונקבל

$$\alpha \cdot e_{-r} = [\dots [[-e_{r_1}, -e_{r_2}], -e_{r_3}], \dots -e_{r_k}] = c \cdot \theta(e_r)$$

כאשר  $\alpha \neq 0$ . לכן

$$\theta(e_r) = \lambda_r e_{-r}$$

כאשר  $\lambda_r \neq 0$ . ע"י הפעלת  $\theta$  שוב

$$e_r = \lambda_r \theta(e_{-r})$$

$$\theta(e_{-r}) = \lambda_r^{-1} e_r$$

לכן  $\mu$  כלשהו מתקיים

$$\theta(\mu e_r) = \mu \lambda_r e_{-r} = \lambda_r \mu^2 (\mu^{-1} e_r)$$

נבחר  $\mu_r$  כך ש  $\lambda_r \mu_r^2 = -1$  ואז

$$\theta(\mu_r e_r) = -\mu_r^{-1} e_r$$

נסמן  $\varepsilon_r = \mu_r e_r$  ו  $\varepsilon_{-r} = \mu_r^{-1} e_r$  לכן לכל  $r \in \phi^+$

$$\theta(\varepsilon_r) = -\varepsilon_{-r}$$

$$\theta(\varepsilon_{-r}) = -\varepsilon_r = -\varepsilon_{-(-r)}$$

ולכן לכל  $r \in \phi$  מתקיים  $\theta(\varepsilon_r) = -\varepsilon_{-r}$ .  $\{\varepsilon_r\}$  עדיין בסיס ל  $\mathfrak{g}_r$  ועדיין מתקיים  $[\varepsilon_r, \varepsilon_{-r}] = h_r$ .  
 נחליף את  $e_r$  ו  $e_{-r}$  ב  $\varepsilon_r$  ו  $\varepsilon_{-r}$  בהתאמה.

נפעיל את  $\theta$  על הזהות  $[e_r, e_s] = N_{r,s} e_{r+s}$  ונקבל

$$\theta[e_r, e_s] = [\theta(e_r), \theta(e_s)] = N_{r,s} \theta(e_{r+s})$$

$$[e_{-r}, e_{-s}] = [-e_{-r}, -e_{-s}] = N_{r,s} e_{-r-s}$$

$$-N_{-r,-s} e_{-r-s} = N_{r,s} e_{-r-s}$$

$$N_{r,s} = -N_{-r,-s}$$

#### ולכן ממשפט 4.1

$$\begin{aligned} N_{r,s} \cdot N_{-r,-s} &= -(p+1)^2 \\ N_{r,s}^2 &= (p+1)^2 \\ N_{r,s} &= \pm (p+1) \end{aligned}$$

**לסיכום** תהי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי פשוטה מעל  $\mathbb{C}$ .

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{r \in \phi} \mathfrak{g}_r \right)$$

נבחר  $\Pi \subseteq \phi$  מערכת יסודית. נבחר בסיס  $\{e_r\}$  ל  $\mathfrak{g}_r$  לכל  $r \in \phi$  כך ש

$$[e_r, e_s] = \begin{cases} 0 & r+s \in \phi \\ \pm(p+1)e_{r+s} & r+s \notin \phi \end{cases}$$

הקבוצה  $\{h_r \mid r \in \Pi\} \cup \{e_r \mid r \in \phi\}$  היא בסיס ל  $\mathfrak{g}$  הנקרא בסיס Chevalley של  $\mathfrak{g}$ . מתקיימים היחסים הבאים:

$$\begin{aligned} [h_r, h_s] &= 0 & r, s \in \Pi \\ [h_r, e_s] &= A_{r,s} e_s & \left( A_{r,s} = \frac{2(r,s)}{(r,r)} \right) \\ [e_r, e_s] &= \begin{cases} 0 & r+s \notin \phi \\ \pm(p+1)e_{r+s} & r+s \in \phi \end{cases} \end{aligned}$$

אפשר להתעניין ביחידות של בסיס Chevalley כנ"ל. בין היתר אפשר להוכיח שקיימת קבוצה של זוגות שורשים  $(r,s)$  עבורם אפשר לקבוע את סימן  $N_{r,s}$  כרצוננו (הבנייה נעשית באמצעות אינדוקציה על זוגות המקיימים  $r+s \in \phi$  ו  $0 < r < s$  לפי היחס המושרה מ  $\phi^+$ ). לא נכנס לזה כאן.

### 4.3 ההעתקה האכספוננציאלית

$\mathfrak{g}$  אלגברת לי מעל  $\mathbb{C}$ .

**למה 4.3** תהי  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  העתקת גזירה (derivation) נילפוטנטית. אז

$$\exp \delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!}$$

הוא אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}$ .

**הערה 4.4** מדובר בסכום סופי כי  $\delta^n = 0$  לאיזשהו  $n$ .



**הוכחה:** כרגיל מתקיים

$$(\exp(-\delta))(\exp \delta) = (\exp \delta)(\exp(-\delta)) = \text{id}$$

ולכן ההעתקה הפיכה.

מאחר ו $\delta$  העתקת גזירה, מתקיים

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

ומכלל לייבניץ לגזירה מסדר גבוה:

$$\delta^r([x, y]) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} [\delta^i(x), \delta^{r-i}(y)]$$

מכאן

$$\begin{aligned} \frac{\delta^r([x, y])}{r!} &= \sum_{i=0}^r \frac{1}{i! \cdot (r-i)!} [\delta^i(x), \delta^{r-i}(y)] \\ &= \sum_{i=0}^r \left[ \frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^{r-i}(y)}{(r-i)!} \right] \\ &= \sum_{\substack{i+j=r \\ i, j \geq 0}} \left[ \frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^j(y)}{j!} \right] \end{aligned}$$

(נניח כי  $\delta^N = 0$  אז די להסתפק ב  $r \leq N - 1$ )

$$\begin{aligned} (\exp \delta)([x, y]) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{i+j=r \\ i, j \geq 0}} \left[ \frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^j(y)}{j!} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^j(y)}{j!} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{\delta^i(x)}{i!}, (\exp \delta)(y) \right] \\ &= [(\exp \delta)(x), (\exp \delta)(y)] \end{aligned}$$

■

יהי  $C = \{h_r \mid r \in \Pi\} \cup \{e_r \mid r \in \phi\}$  בסיס Chevalley של  $\mathfrak{g}$  (אלגברת לי פשוטה מעל  $\mathbb{C}$ ). ראינו כי  $\text{ad}_{e_r} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  הן העתקות גזירה נילפוטנטיות. נסתכל על  $\zeta \text{ad}_{e_r}$  כאשר  $\zeta \in \mathbb{C}$  - אלה הן העתקות גזירה נילפוטנטיות. נגדיר ל  $r \in \phi$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $x_r(\zeta) = \exp(\zeta \cdot \text{ad}_{e_r})$  זהו אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}$ . נחשב את פעולת  $x_r(\zeta)$  על איברי  $C$ :

1.

$$x_r(\zeta) e_r = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\zeta^i}{i!} \text{ad}_{e_r}^i(e_r) = \text{ad}_{e_r}^0(e_r) = e_r$$

.2

$$x_r(\zeta) h_s = h_s - A_{s,r} e_r \zeta$$

$$[e_r, [e_r, h_s]] = [e_r, -A_{s,r} e_r] = 0 \quad \vee \quad [e_r, h_s] = -[h_s, e_r] = -A_{s,r} e_r \quad \text{כי}$$

.3

$$x_r(\zeta) e_{-r} = e_{-r} + \zeta h_r - \zeta^2 e_r$$

$$\text{ad}_{e_r}^4(e_r) = [e_r, -2e_r] = 0 \quad \text{ולכן} \quad [e_r, h_r] = -A_{r,r} e_r = -2e_r \quad \vee \quad [e_r, e_{-r}] = h_r \quad \text{כי}$$

.0

.4

(s ≠ ±r)

$$\begin{aligned} x_r(\zeta) e_s &= \sum_{i \geq 0} \frac{\zeta^i}{i!} \text{ad}_{e_r}^i(e_s) \\ &= e_s + \zeta [e_r, e_s] + \frac{\zeta^2}{2!} [e_r, [e_r, e_s]] + \dots \\ &= e_s + \zeta N_{r,s} e_{r+s} + \frac{\zeta^2}{2!} N_{r,s} N_{r,r+s} e_{2r+s} + \frac{\zeta^3}{3!} N_{r,s} N_{r,r+s} N_{r,2r+s} e_{3r+s} + \dots + \\ &\quad + \frac{\zeta^q}{q!} N_{r,s} N_{r,r+s} N_{r,2r+s} \cdots N_{r,(q-1)r+s} \cdot e_{qr+s} \end{aligned}$$

כאשר  $q \geq 0$  כרגיל הוא המקסימלי כך ש  $s + rq \in \phi$  .נסמן

$$M_{r,s,i} = \frac{1}{i!} N_{r,s} N_{r,r+s} N_{r,2r+s} \cdots N_{r,(i-1)r+s}$$

לכן  $M_{r,s,0} = 1$

$$x_r(\zeta) e_s = \sum_{i=0}^q M_{r,s,i} \zeta^i e_{ir+s}$$

נראה כי  $M_{r,s,i} \in \mathbb{Z}$  : אם  $r + s \notin \phi$  זה ברור.

נניח כי  $r + s \in \phi$  .ראינו כי  $N_{r,s} = \pm(p+1)$  .נזכיר כי  $p \geq 0$  הוא המקסימלי כך ש  $-pr + s \in \phi$  , כלומר  $p, q \geq 0$  המקסימליים כך ש

$$-pr + s, -(p-1)r + s, \dots, s, r + s, \dots, qr + s$$

שרשרת. לכן  $N_{r,r+s} = \pm((p+1)+1) = \pm(p+2)$  .נמשיך ונקבל  $N_{r,s+(i-1)r} = \pm(p+i)$  לכן

$$M_{r,s,i} = \pm \frac{(p+1)(p+2) \cdots (p+i)}{i!} = \pm \binom{p+i}{i} \in \mathbb{Z}$$

נסכם את החשבון:

$$1. \quad x_r(\zeta) e_r = e_r$$

$$2. \quad x_r(\zeta) h_s = h_s - A_{s,r} \zeta e_r$$

$$3. \quad x_r(\zeta) e_{-r} = e_{-r} + \zeta h_r - \zeta^2 e_r$$

$$4. \quad (r \neq \pm s, r + s \notin \phi) \quad x_r(\zeta) e_s = e_s$$

$$5. \quad (r + s \in \phi) \quad x_r(\zeta) e_s = \sum_{i=0}^q M_{r,s,i} \zeta^i e_{ir+s}$$

הוכחנו:

**משפט 4.5** תהי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי פשוטה מעל  $\mathbb{C}$ . יהי  $C$  בסיס Chevalley של  $\mathfrak{g}$  שמתאים לפירוק Cartan ומערכת שורשים  $\phi$ . אז לכל  $r \in \phi$ , המטריצה של  $x_r(\zeta)$  ביחס ל' $C$  היא עם קואורדינטות בחוג  $\mathbb{Z}[\zeta]$ .

#### 4.4 אלגבראות לי וחבורות Chevalley מעל שדה כלשהו $K$

תהי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי פשוטה מעל  $\mathbb{C}$ .  $C$  בסיס Chevalley. נסמן  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}} C$ . זאת אלגברת לי מעל החוג  $\mathbb{Z}$  (לא הגדרנו, אבל ההגדרה ברורה לכל חוג קומוטטיבי). נגדיר

$$\mathfrak{g}_K = K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$$

זהו מרחב וקטורי מעל  $K$ . יש לו בסיס לינארי

$$\left\{ \underbrace{1 \otimes h_r}_{= \bar{h}_r} \mid r \in \Pi \right\} \cup \left\{ \underbrace{1 \otimes e_r}_{= \bar{e}_r} \mid r \in \phi \right\}$$

מוגדר מבנה של אלגברת לי על  $\mathfrak{g}_K$ :  $x, y \in C$  נגדיר

$$[\bar{x}, \bar{y}] = 1 \otimes [x, y]$$

ונרחיב באופן בילינארי לכל  $\mathfrak{g}_K$ .

קבועי המבנה לפי  $\bar{C}$  (לפי הפירוש הנכון) הם כמו אלה ב  $\mathfrak{g}$  (מעל  $\mathbb{C}$ ), למשל:

$$[e_r, e_s] = N_{r,s} e_{r+s} = \pm (p+1) e_{r+s}$$

$$[\bar{e}_r, \bar{e}_s] = (N_{r,s} \times 1_K) \cdot \bar{e}_{r+s}$$

וכו'.

נסמן ב  $A_r(\zeta)$  את המטריצה של  $x_r(\zeta)$  (מעל  $\mathbb{C}$ ) לפי  $C$ . נגדיר  $\bar{A}_r(t)$  ל' $t \in K$  להיות המטריצה המתקבלת מ' $A_r(\zeta)$  ע"י החלפת כל קואורדינטה  $a\zeta^i$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ) ב  $a t^i$  ב  $(a \times 1_K) \cdot t^i$ , ותהי

$$\bar{x}_r(t) : \mathfrak{g}_K \rightarrow \mathfrak{g}_K$$

ההעתקה הלינארית שהמטריצה שלה ביחס ל' $\bar{C}$  נתונה ע"י  $\bar{A}_r(t)$ :

$$[\bar{x}_r(t) v]_{\bar{C}} = \bar{A}_r(t) \cdot [v]_{\bar{C}}$$

**טענה 4.6** לכל  $r \in \phi, t \in K$  הוא אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}_K$ .

**הוכחה:** כיוון ש  $x_r(\zeta) x_r(-\zeta) = \text{id}_{\mathfrak{g}}$  , נקבל  $\overline{x_r}(-t) = \overline{x_r}(t) \overline{x_r}(-t) = \text{id}_{\mathfrak{g}_K}$  ולכן  $\overline{x_r}(-t) = \overline{x_r}(t)^{-1}$   
 לכל  $u, v \in \mathfrak{g}$  ולכן  $[x_r(\zeta) u, x_r(\zeta) v] = x_r(\zeta) [u, v]$   
 לכל  $\overline{u}, \overline{v} \in C$  ולכן  $[\overline{x_r}(t) u, \overline{x_r}(t) v] = \overline{x_r}(t) [u, v]$   
 לכל  $u, v \in \mathfrak{g}_K$  ולכן  $[\overline{x_r}(t) u, \overline{x_r}(t) v] = \overline{x_r}(t) [u, v]$  ■

**למה 4.7** נתבונן בג וב  $\mathfrak{g}_K$ . אז לכל  $r \in \phi, \overline{h_r} \neq 0$ .

**הוכחה:** תהי  $\phi^*$  המערכת הדואלית ל  $\phi$ . אז  $\left\{ \frac{2r}{(r,r)} \mid r \in \Pi \right\}$  מערכת יסודית ל  $\phi^*$ .  
 נסמן  $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\}$ . נסיק כי לכל  $r \in \phi, h_r = \sum_{i=1}^l n_i h_{r_i}$ ,  $n_i$  שלמים כולם מאותו סימן או אפס. כיוון ש  $\{\overline{h_{r_i}}\}_{i=1}^l$  חלק מבסיס של  $\mathfrak{g}_K$  נקבל

$$\overline{h_r} = 0 \implies n_1 \times 1_K = \dots = n_l \times 1_K = 0$$

זה מחייב ש  $\text{char} K = p > 0$  ו  $p \mid n_i$  לכל  $i$ . יש  $w \in W(\phi)$  ויש שורש פשוט  $r_j$  כך ש  $w(r_j) = r$  ולכן

$$w(h_{r_j}) = w\left(\frac{2r_j}{(r_j, r_j)}\right) = \frac{2w(r_j)}{(w(r_j), w(r_j))} = \frac{2r}{(r, r)} = h_r = \sum_{i=1}^l n_i h_{r_i}$$

ראינו כי המטריצה של  $w$  ביחס ל  $\{h_{r_i} \mid 1 \leq i \leq l\}$  היא מטריצה מעל  $\mathbb{Z}$  ובעלת דטרמיננטה  $\pm 1$ . העמודה  $j$  של מטריצה זו היא  $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_l \end{pmatrix}$  וכל איבריה מתחלקים ב  $p$ . לכן  $p \mid \det w$  - סתירה. ■

**הגדרה 4.8** תהי  $\mathfrak{g}$  אלגברת לי פשוטה מעל  $\mathbb{C}$ . יהי  $K$  שדה. חבורת Chevalley מטיפוס  $\mathfrak{g}$  מעל  $K$  היא תת-חבורת האוטומורפיזמים של אלגברת לי  $\mathfrak{g}_K$ , אשר נוצרת ע"י

$$\{\overline{x_r}(t) \mid t \in K, r \in \phi\}$$

נסמן את החבורה  $\mathfrak{g}(K)$ . מעתה נסמן את  $\overline{x_r}(t)$  ב  $x_r(t)$  ונראה את  $\mathbb{C}$  כמקרה פרטי מבין כל השדות  $K$ . מתקיימות הזהויות הבאות שכבר ראינו:

1.  $x_r(t) e_r = e_r$
2.  $x_r(t) h_s = h_s - A_{s,r} t e_r$
3.  $x_r(t) e_{-r} = e_{-r} + t h_r - t^2 e_r$
4.  $(r \neq \pm s, r + s \notin \phi) x_r(t) e_s = e_s$
5.  $(r + s \in \phi) x_r(t) e_s = \sum_{i=0}^q M_{r,s,i} t^i e_{ir+s}$

#### 4.5 החבורה $A_1(K)$

אלגברת לי שסומנה  $A_n$  היא

$$\mathfrak{sl}_{n+1}(K) = \{X \in M_{n+1}(K) \mid \text{tr}X = 0\}$$

בפרט

$$\mathfrak{sl}_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}$$

נסמן  $e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  אז

$$[e_+, e_-] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} [h, e_+] &= 2e_+ \\ [h, e_-] &= -2e_- \end{aligned}$$

**למה 4.9** תהי  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  תת-אלגברת לי. תהי  $y \in \mathfrak{g}$  כך ש  $y$  מטריצה נילפוטנטית, כלומר  $y^N = 0$  ל  $N$  טבעי. אז  $\text{ad}_y$  העתקת גזירה ונילפוטנטית ומתקיים לכל  $x \in \mathfrak{g}$

$$\exp(-\text{ad}_y)(x) = (\exp y) x (\exp y)^{-1}$$

**הערה 4.10** כאן הכפל הוא כפל מטריצות באלגברה האסוציאטיבית  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

הוכחה:

$$\exp(\text{ad}_y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{ad}_y^k(x)}{k!}$$

נוכיח באינדוקציה כי

$$\frac{\text{ad}_y^k(x)}{k!} = \sum_{\substack{i+j=k \\ i, j \geq 0}} \frac{y^i}{i!} \cdot x \cdot \frac{(-y)^j}{j!}$$

עבור  $k = 1$  מקבלים  $\text{ad}_y(x) = yx - xy$  והטענה נכונה.

נניח כי הטענה נכונה עבור  $k$  ונראה עבור  $k+1$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{ad}_y^{k+1}(x)}{(k+1)!} &= \frac{\text{ad}_y}{k+1} \circ \frac{\text{ad}_y^k}{k!}(x) \\
 &= \frac{\text{ad}_y}{k+1} \left( \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} \frac{y^i}{i!} \cdot x \cdot \frac{(-y)^j}{j!} \right) \\
 &= \frac{1}{k+1} \left( \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} \frac{y^{i+1}}{i!} \cdot x \cdot \frac{(-y)^j}{j!} + \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} \frac{y^i}{i!} \cdot x \cdot \frac{(-y)^{j+1}}{j!} \right) \\
 &= \frac{1}{k+1} \left( \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i \geq 1, j \geq 0}} \frac{y^i}{i!} \cdot x \cdot \frac{(-y)^j}{j!} \cdot i + \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i \geq 0, j \geq 1}} \frac{y^i}{i!} \cdot x \cdot \frac{(-y)^j}{j!} \cdot j \right) \\
 &= \frac{1}{k+1} \left( \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i \geq 1, j \geq 1}} \frac{y^i}{i!} \cdot x \cdot \frac{(-y)^j}{j!} \cdot (i+j) + \frac{y^{k+1}}{(k+1)!} \cdot x \cdot (k+1) + x \cdot \frac{(-y)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot (k+1) \right) \\
 &= \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i \geq 0, j \geq 0}} \frac{y^i}{i!} \cdot x \cdot \frac{(-y)^j}{j!}
 \end{aligned}$$

הזהות הזאת בפרט מראה ש  $\text{ad}_y$  העתקה נילפוטנטית (כי ל  $k \geq 2N$  מתקיים  $i+j = 2N$  כי  $i \geq N$  או  $j \geq N$ ), ולכן  $\exp(\text{ad}_y)$  מוגדרת.

$$\begin{aligned}
 \exp(\text{ad}_y)(x) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{i+j=k} \frac{y^i}{i!} x \frac{(-y)^j}{j!} \\
 &= \left( \sum_{i \geq 0} \frac{y^i}{i!} \right) x \left( \sum_{j \geq 0} \frac{(-y)^j}{j!} \right) \\
 &= (\exp y) x (\exp y)^{-1}
 \end{aligned}$$

■

מכאן  $x_+(\zeta) = \exp(\zeta \text{ad}_{e_+})$  מקיימת ל  $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$x_+(\zeta)(x) = \exp(\zeta e_+) x (\exp(\zeta e_+))^{-1}$$

ברור ש  $e_+$  נילפוטנטית מסדר 2 ולכן

$$\begin{aligned}
 \exp(\zeta e_+) &= I_2 + \zeta e_+ + \frac{\zeta^2}{2} e_+^2 + \dots \\
 &= I_2 + \zeta e_+
 \end{aligned}$$

כלומר

$$x_+(\zeta)(x) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & -\zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_-(\zeta)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \zeta & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta & 1 \end{pmatrix}$$

כשעוברים לשדה  $K$  מקבלים אותן נוסחאות.  
 $SL_2(K)$  נוצרת כחבורה ע"י

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in K \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \mid y \in K \right\}$$

אכן, תהי  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  עם  $ad - bc = 0$ . אם  $c = 0$  אז נוכל לרשום

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואת  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$  נרשום כך:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם  $c \neq 0$  נוכל לרשום

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת נגדיר העתקה  $\varphi : SL_2(K) \rightarrow A_1(K)$  ע"י  $\varphi(g)(x) = gxg^{-1}$ ,  $x \in \mathfrak{sl}_2(K)$ . מתקיים  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_+(t)$ ,  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_-(t)$ . מאחר ו- $SL_2(K)$  נוצרת ע"י איברים כנ"ל, נקבל כי  $\text{Im} \varphi \subseteq A_1(K)$ .  
 מתקיים  $xg = gx \iff g \in \ker \varphi$  לכל  $x \in \mathfrak{sl}_2(k)$ . ע"י בדיקה קלה מקבלים  $g \in Z(SL_2(K)) = \{\pm I_2\}$  ולכן ממשפט האיזומורפיזם הראשון  
 $A_1(K) \cong SL_2(K) / \{\pm I_2\} = PSL_2(K)$

נניח כי  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$  אלגברת לי קלאסית.  $(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}), \mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{C}), \mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{C}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}))$   
 $(A_n, B_n, D_n, C_n)$

בכל הדוגמאות האלה, האיברים  $e_r$  הם מטריצות נילפוטנטיות ואז

$$x_r(\zeta)(x) = \exp(\zeta \text{ad}_{e_r})(x)$$

$$= \underbrace{\exp(\zeta e_r)}_{y_r(\zeta)} x \exp(-\zeta e_r)$$

$$= y_r(\zeta) \cdot x \cdot y_r(\zeta)^{-1}$$

ובאותו אופן כשעוברים לשדה  $K$ .  
 נסמן ב- $G_K$  את תת-החבורה של  $GL_N(K)$  הנוצרת ע"י

$$\{y_r(t) \mid t \in K, r \in \phi\}$$

כמו קודם נוכל להגדיר העתקה  $\varphi : G_K \rightarrow \mathfrak{g}(K)$  לפי  $\varphi(g)(x) = gxg^{-1}$ . לפי ההגדרות,  $\varphi$  הומומורפיזם על.  
 אם  $g \in \ker \varphi$ , אז לכל  $x \in \mathfrak{g}_K$  מתקיים  $gxg^{-1} = x$  ולכן  $ge_rg^{-1} = e_r$  לכל  $r \in \phi$ . מכאן  $gy_r(t)g^{-1} = y_r(t)$  וכי  $gy_r(t)g^{-1} = y_r(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} e_r^i$  ולכן  $g \in Z(G_K)$  גם ההכלה  $Z(G_K) \subseteq \ker \varphi$  נכונה.  
 נדגים זאת ב- $D_n$ :

לפי פירוק Cartan ביחס למטריצות האלכסוניות, ראינו את  $\{e_r\}$  הבאים:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{ij} &= \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix} & (i \neq j) \\ \varepsilon_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ -{}^t\varepsilon_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} - e_{ji} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכל מטריצה כזאת יש את התכונה שהיא נילפוטנטית מסדר 2 ולכן  $e_r^2 = 0$

$$y_r(t) = \exp(te_r) = I + te_r$$

לכן אם  $g \in Z(G_K)$  אז  $g$  מתחלף עם  $y_r(t)$  ולכן  $g(I_N + te_r) = (I_N + te_r)g$  מתחלף עם  $e_r$  לכל  $r \in \phi$  ואז  $g$  מתחלף גם עם  $h_r = [e_r, e_{-r}]$  ולכן  $g$  מתחלף עם בסיס Chevalley של  $D_n$  ואז  $gxg^{-1} = x$  לכל  $x \in D_n$ , כלומר  $\varphi(g) = \text{id}$  ולכן  $g \in \ker \varphi$ .  
 ב- $D_n$  יוצא

$$\begin{aligned} y_{\hat{e}_{ij}}(t) &= \left( \begin{array}{c|c} I_n + te_{ij} & 0 \\ \hline 0 & I_n - te_{ji} \end{array} \right) \\ y_{\varepsilon_{ij}}(t) &= \left( \begin{array}{c|c} I_n & t(e_{ij} - e_{ji}) \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) \end{aligned}$$

**תרגיל:** להראות שעבור  $\mathfrak{sl}_{n+1}(K)$  מתקיים  $SL_{n+1}(K) = G_K$  ולכן

$$A_n(K) \cong SL_{n+1}(K) / Z(SL_{n+1}(K)) = PSL_{n+1}(K)$$

**הדרכה:** להוכיח ש- $SL_{n+1}(K)$  נוצרת ע"י מטריצות מהצורה

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & t & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & 1 & \ddots \\ & & & & 1 \end{array} \right)$$



## 5 תת-החבורות היוניפוטנטיות

### 5.1 החבורות $U, V$

מתכונות האקספוננט מתקיים  $x_r(t_1)x_r(t_2) = x_r(t_1 + t_2)$  לכל  $r \in \phi$  ו  $t_1, t_2 \in K$ . לכן  $x_r : K \rightarrow \mathfrak{g}(K)$  הוא הומומורפיזם מהחבורה החיבורית של  $K$  אל  $\mathfrak{g}(K)$ .  
דוגמאות טיפוסיות:

$$1. (\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. (\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})) \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & t \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$x_r$  הוא חד-חד-ערכי: אם  $x_r(t) = I$  בפרט מתקיים

$$e_{-r} = x_r(t)e_{-r} = e_{-r} + th_r - t^2e_r$$

$\{e_{-r}, h_r, e_r\}$  בת"ל ולכן  $th_r - t^2e_r = 0 \iff t = 0$ .  
נסמן  $X_r = \{x_r(t) \mid t \in K\} \subseteq \mathfrak{g}(K)$ , אז  $X_r \cong K$ . ל  $X_r$  קוראים root subgroup.  
נגדיר את  $U$  להיות תת-החבורה של  $\mathfrak{g}(K)$  הנוצרת ע"י  $\bigcup_{r \in \phi^+} X_r$ . באופן דומה, נגדיר את  $V$  להיות תת-החבורה הנוצרת ע"י  $\bigcup_{r \in \phi^-} X_r$ .  
נזכר בפונקציית הגובה על  $\phi$  (המתאימה למערכת היסודית  $\Pi$ ): ל  $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\}$  פונקציית הגובה מוגדרת ע"י

$$h \left( \underbrace{\sum_{i=1}^l n_i r_i}_{r \in \phi} \right) = \sum_{i=1}^l n_i$$

כאשר  $n_1, \dots, n_l$  כולם שלמים בעלי אותו סימן (או אפס).

**הערה 5.1** נשים לב כי  $h$  היא צמצום של פונקציונל לינארי על  $\text{span} \phi$  המוגדר ע"י

$$\tilde{h} \left( \sum_{i=1}^l x_i r_i \right) = \sum_{i=1}^l x_i$$

נכתוב  $\mathfrak{g}_K = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}_i$  כאשר  $\mathfrak{g}_i = \bigoplus_{h(r)=i} \mathfrak{g}_r$  ו  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  הוגדר בנפרד קודם.  
נתון  $r \in \phi^+$ . נתאר את פעולת  $x_r(t)$  על  $\mathfrak{g}_i$ . נניח כי  $i = h(s)$ .  
אם  $s = r$  אז  $x_r(t)e_r = e_r$  אם  $s = -r$  אז  $x_r(t)e_{-r} = e_{-r} + th_r - t^2e_r$   
אם  $i = 0$  אז  $x_r(t)h_s = h_s - A_{s,r}e_r = h_s - \frac{2(s,r)}{(s,s)}e_r$

נניח כי  $\pm r \neq s \in \phi$ . אם  $q = 0$  אז  $x_r(t) e_s = e_s$  נניח כי  $q \geq 1$ , אז

$$x_r(t) e_s = \sum_{\substack{jr+s \in \phi \\ j=0}}^q M_{r,s,j} e_{jr+s} t^j$$

(כאשר כרגיל  $q \geq 0$  הוא המקסימלי כך ש  $-pr + s, \dots, s, r + s, \dots, qr + s$  היא שרשרת, וראינו  $(M_{r,s,j} = \pm \binom{p+j}{j})$ .)

נסתכל ב  $x_r(t) e_s - e_s \in \sum_{j=1}^q \mathfrak{g}_{jr+s}$  מאחר ו  $h(jr + s) = jh(r) + h(s)$  אז מתקיים  $h(jr + s) > h(s)$  (כי  $h(r) > 0$ ) ולכן  $y \in \mathfrak{g}_i$  מתקיים

$$x_r(t) y - y \in \mathfrak{g}_0 + \sum_{h(\alpha) > i} \mathfrak{g}_\alpha$$

נסדר את בסיס Chevalley כך (ביחס ל  $r$ ):

$$\{e_r\} \cup \underbrace{\{h_s \mid s \in \Pi\} \cup \{e_s \mid s \in \phi, q_r \geq 1\} \cup \{e_s \mid s \in \phi, q_r = 0\}}_{\text{ordered by } h(s)} \cup \{e_{-r}\}$$

לפי בסיס זה  $x_r(t)$  נראית כך:

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{e_r} & \underbrace{\{h_s \mid s \in \Pi\}} & \underbrace{\{e_s \mid s \in \phi, q_r \geq 1\}} & \underbrace{\{e_s \mid s \in \phi, q_r = 0\}} & \underbrace{e_{-r}} \\ 1 & * & * & \dots & * & * & * & * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ & 1 & 0 & \vdots & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ & & 1 & \ddots & \vdots & * & * & * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ & & & \ddots & 0 & * & * & * & * & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & * & * & * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ & & & & & 1 & * & * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & & \ddots & * & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

באופן דומה אפשר להראות שלכל  $r \in \phi^-$  יש סידור של הבסיס כך שביחס לבסיס זה, ל  $x_r(t)$  יש צורה כנ"ל. נסכם:

**טענה 5.2** לכל  $r \in \phi$ , הוא אוטומורפיזם יוניפוטנטי של  $\mathfrak{g}_K$ , ולכן  $U, V$  נוצרות ע"י אוטומורפיזמים יוניפוטנטיים.

**למה 5.3** נניח כי  $\text{char}K = 0$ . יהי  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  אוטומורפיזם ונניח כי  $y \in \mathfrak{g}$  הוא כך ש  $\text{ad}_y$  נילפוטנטי. אז  $\theta \circ \exp(\text{ad}_y) \circ \theta^{-1} = \exp(\text{ad}_{\theta(y)})$ .

**הוכחה:** נניח כי  $x \in \mathfrak{g}$ .

$$\begin{aligned} (\theta \circ \exp(\text{ad}_y) \circ \theta^{-1})(x) &= \theta \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\text{ad}_y^i}{i!} (\theta^{-1}(x)) \right) \\ &= \theta \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[y, [y, \dots [y, \theta^{-1}(x)]]]}{i!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\theta(y), [\theta(y), \dots [\theta(y), x]]]}{i!} \\ &= \exp(\text{ad}_{\theta(y)})(x) \end{aligned}$$

■

**למה 5.4** נניח כי  $\xi, \eta \in \text{End}_K V$  (  $V$  מרחב וקטורי ממימד סופי מעל  $K$  ). נניח כי  $[\eta, \xi]$  מתחלף עם  $\xi$ . אז לכל  $i \geq 1$

$$\text{ad}_\eta(\xi^i) = i\xi^{i-1}\text{ad}_\eta(\xi)$$

**הוכחה:** באינדוקציה: עבור  $i = 1$  הטענה ברורה. מעבר האינדוקציה:

$$\begin{aligned} \text{ad}_\eta(\xi^{i+1}) &= [\eta, \xi^{i+1}] \\ &= \eta\xi^{i+1} - \xi^{i+1}\eta \\ &= (\eta\xi^i - \xi^i\eta)\xi + \xi^i(\eta\xi - \xi\eta) \\ &= [\eta, \xi^i]\xi + \xi^i[\eta, \xi] \\ &= i\xi^{i-1}[\eta, \xi]\xi + \xi^i[\eta, \xi] \\ &= i\xi^{i-1}\xi[\eta, \xi] + \xi^i[\eta, \xi] \\ &= (i+1)\xi^i[\eta, \xi] \end{aligned}$$

■

**למה 5.5** נניח כי  $\text{char}K = 0$  וכי  $\xi, \eta, [\xi, \eta] \in \text{End}_K(V)$  נילפוטנטיים, וכן נניח כי  $[\xi, \eta]$  מתחלף עם  $\eta$  וגם עם  $\xi$ . אז

$$\exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \exp(\eta) \exp\left(-\frac{1}{2}[\xi, \eta]\right)$$

**הוכחה:** ראשית נראה באינדוקציה כי

$$\frac{(\xi + \eta)^n}{n!} = \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{[\xi, \eta]^k (-1)^k}{2^k \cdot k!}$$

נכתוב את המקרים הראשונים כדי לסבר את העין:  $n = 0, 1$  ברור.  
 $n = 2$ : אגף ימין שווה ל

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi\eta}{1! \cdot 1!} + \frac{\eta^2}{2!} - \frac{[\xi, \eta]}{2} &= \frac{1}{2} (\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 - \xi\eta + \eta\xi) \\ &= \frac{1}{2} (\xi^2 + \xi\eta + \eta\xi + \eta^2) \\ &= \frac{(\xi + \eta)^2}{2!} \end{aligned}$$

צעד האינדוקציה:

$$\begin{aligned} \frac{(\xi + \eta)^n}{n!} &= \frac{(\xi + \eta)}{n} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{(\xi + \eta)}{n} \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\xi^{i+1}}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} + \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\eta \xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} \right) \end{aligned}$$

מלמה 5.4 מתקיים  $\eta \xi^i = \xi^i \eta + i \xi^{i-1} [\eta, \xi]$  ולכן

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \left( \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\xi^{i+1}}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} + \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\xi^i \eta}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} \frac{i \xi^{i-1} [\eta, \xi]}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} \right) \end{aligned}$$

נשתמש בכך ש  $[\eta, \xi] = -[\xi, \eta]$  מתחלף עם  $\eta$  ונקבל

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \left( \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} (i+1) \frac{\xi^{i+1}}{(i+1)!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} + \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} (j+1) \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^{j+1}}{(j+1)!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i+j+2k=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} 2(k+1) \frac{i \xi^{i-1}}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^{k+1}}{2^{k+1} \cdot (k+1)!} \right) \end{aligned}$$

ע"י החלפת אינדקסים נקבל

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n} \left( \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k \geq 0}} i \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} + \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k \geq 0}} j \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k \geq 0}} 2k \frac{(i+1) \xi^i}{(i+1)!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k \geq 0}} (i+j+2k) \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} \\
 &= \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!}
 \end{aligned}$$

כנדרש.

כיוון ש  $\xi, \eta, [\xi, \eta]$  נילפוטנטיים, נסיק כי גם  $\xi + \eta$  נילפוטנטי, כי ל  $n$  די גדול בסכום

$$\frac{(\xi + \eta)^n}{n!} = \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!}$$

$i$  או  $j$  או  $k$  יהיו די גדולים כך ש  $\xi^i = 0$  או  $\eta^j = 0$  או  $[\xi, \eta]^k = 0$  ואז  $(\xi + \eta)^n = 0$  כעת מתקיים

$$\begin{aligned}
 \exp(\xi + \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi + \eta)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{\xi^i}{i!} \cdot \frac{\eta^j}{j!} \cdot \frac{(-[\xi, \eta])^k}{2^k \cdot k!} \\
 &= \exp(\xi) \exp(\eta) \exp\left(-\frac{1}{2} [\xi, \eta]\right)
 \end{aligned}$$

■

## 5.2 נוסחת הקומוטטור של Chevalley

(נוסחה סופר חשובה, ההוכחה ממש טכנית ונראה רק חלק ממנה)

כאשר  $s \neq \pm r$  נכתוב נוסחה לקומוטטור  $[x_s(u), x_r(t)]$  כאן  $[x_s(u), x_r(t)] = (x_s(u)^{-1} x_r(t)^{-1} x_s(u) x_r(t))$

נתחיל במציאת נוסחה להצמדות מעל  $K = \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
 x_r(t) x_s(u) x_r(t)^{-1} &= x_r(t) \exp(\text{uad}_{e_s}) x_r(t)^{-1} \\
 &= \exp(\text{uad}_{x_r(t)} e_s)
 \end{aligned}$$

כאן השתמשנו בלמה 5.3 עם  $\theta = x_r(t)$ . נניח כי  $\phi \notin r+s$ , אז  $x_r(t)e_s = e_s$ . נקבל כי  $\exp(\text{ad}_{x_r(t)}e_s) = x_s(u)$ , כלומר מתחלפים. נניח כי  $r+s \in \phi$  בת"ל כך ש  $r, s \in \phi$ . אז

$$x_r(t)e_s = \sum_{i=0}^q M_{r,s,i} t^i e_{ir+s}$$

לכן

$$x_r(t)x_s(u)x_r(t)^{-1} = \exp\left(\sum_{i=0}^q M_{r,s,i} u t^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right)$$

קבוצת השורשים מהצורה  $ir + js$  היא מערכת שורשים בעלת בסיס  $\{r, s\}$ . נסמן  $\phi' = \phi \cap \text{span}_{\mathbb{Z}}\{r, s\}$ . מערכת כזאת היא מטיפוס  $A_2, B_2, G_2$  (ללא הוכחה). צריך לעבור על חמישה מקרים. נעבור על שלושה, היתר דומים.

**מקרה ראשון** נניח כי המערכת היא  $A_2$  או  $B_2$ . נרשום את השורשים החיוביים:

$\phi'$	$\phi'^+$	תנאי
$A_2$	$\{r, s, r+s\}$	
$B_2$	$\{r, s, r+s, 2r+s\}$	$\ r\  < \ s\ $
$B_2$	$\{r, s, r+s, r+2s\}$	$\ s\  < \ r\ $

טבלה 3: האפשרויות לקבוצת שורשים החיוביים

1. נניח כי  $\phi' \notin r+2s$ , לכן  $e_{jr+s}, e_{ir+s}$  מתחלפים, כי אין שורש מהצורה  $i'r + 2s$ . נקבל

$$x_r(t)x_s(u)x_r(t)^{-1} = \prod_{i=0}^q \exp(M_{r,s,i} u t^i \text{ad}_{e_{ir+s}})$$

2. נניח כי המערכת היא  $B_2$  וכי  $r+2s \in \phi$ . אז

$$\phi'^+ = \{r, s, r+s, r+2s\}$$

נשים לב כי  $s, r+s$  היא שרשרת  $r$  דרך  $s$  ולכן  $q=1$ .

$$x_r(t)x_s(u)x_r(t)^{-1} = \exp(\text{ad}_{ue_s} + \text{ad}_{N_{r,s}ute_{r+s}})$$

נסמן  $\xi = ue_s, \eta = N_{r,s}ute_{r+s}$ , אז

$$[\text{ad}_{\xi}, \text{ad}_{\eta}] = \text{ad}_{[\xi, \eta]}$$

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= [ue_s, N_{r,s}ute_{r+s}] \\ &= N_{r,s}N_{s,r+s}u^2te_{r+2s} \end{aligned}$$

$e_{2r+s}$  מתחלף עם  $e_s$  ועם  $e_r$  (כי  $\phi \notin \{e_{r+3s}, e_{2r+s}\}$ ). לפי למה 5.5 נקבל

$$\begin{aligned} \exp(\text{ad}_{ue_s} + \text{ad}_{N_{r,s}ute_{r+s}}) &= \exp(\text{uad}_{e_s}) \exp(N_{r,s}ut\text{ad}_{e_{r+s}}) \exp\left(-\frac{1}{2}N_{r,s}N_{s,r+s}u^2t\text{ad}_{e_{r+2s}}\right) \\ &= x_s(u) x_{r+s}(N_{r,s}ut) x_{r+2s}\left(\underbrace{-\frac{1}{2}N_{r,s}N_{s,r+s}u^2t}_{\in \mathbb{Z}}\right) \end{aligned}$$

נשים לב כי  $N_{s,r+s} = \pm 2$  כי מתקיים כי  $r, r+s, r+2s$  היא שרשרת  $s$  דרך  $r+s$  ארוכה ביותר ולכן  $p=1$  ו  $N_{s,r+s} = \pm(p+1)$ . לכן  $-\frac{1}{2}N_{r,s}N_{s,r+s} \in \mathbb{Z}$ .

**מקרה שני** נניח כי המערכת  $\phi' = \{ir + js \in \phi\}$  היא מטיפוס  $G_2$ .  
נניח כי  $3r + 2s \in \phi$ . במקרה זה, השורשים החיוביים הם

$$\phi'^+ = \{r, s, r+s, 2r+s, 3r+s, 3r+2s\}$$

כאן  $q=3$

$$\exp\left(\sum_{i=0}^q M_{r,s,i}ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) = \exp\left(\underbrace{\sum_{i=0}^2 M_{r,s,i}ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}}_{\xi} + \underbrace{M_{r,s,3}ut^3 \text{ad}_{e_{3r+s}}}_{\eta}\right)$$

מאחר ו  $e_{(3+i)r+2s} \in \phi$  רק כאשר  $i=0$ , מתקיים

$$[\xi, \eta] = u^2t^3 M_{r,s,3}N_{s,3r+s} \text{ad}_{e_{3r+2s}}$$

מלמה 5.5,

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{i=0}^q M_{r,s,i}ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) &= \exp\left(\sum_{i=0}^2 M_{r,s,i}ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) \exp(M_{r,s,3}ut^3 \text{ad}_{e_{3r+s}}) \circ \\ &\quad \circ \exp\left(-\frac{1}{2}u^2t^3 M_{r,s,3}N_{s,3r+s} \text{ad}_{e_{3r+2s}}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i=0}^2 M_{r,s,i}ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) x_{3r+s}(M_{r,s,3}ut^3) \circ \\ &\quad \circ x_{3r+2s}\left(-\frac{1}{2}N_{s,3r+s}M_{r,s,3}u^2t^3\right) \end{aligned}$$

נפרק לפי למה 5.5 את הגורם  $\exp\left(\sum_{i=0}^2 M_{r,s,i} ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right)$

$$\exp\left(\sum_{i=0}^2 M_{r,s,i} ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) = \exp\left(\underbrace{\sum_{i=0}^1 M_{r,s,i} ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}}_{\xi} + \underbrace{M_{r,s,2} ut^2 \text{ad}_{e_{2r+s}}}_{\eta}\right)$$

רק  $i = 1$  תורם לקומוטטור, שהרי  $(i+2)r + 2s \in \phi$  רק ל  $i = 1$  לכן

$$[\xi, \eta] = \underbrace{M_{r,s,1}}_{=N_{r,s}} M_{r,s,2} N_{r+s,2r+s} u^2 t^3 \text{ad}_{3r+2s}$$

ולכן מהלמה

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{i=0}^2 M_{r,s,i} ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) &= \exp\left(\sum_{i=0}^1 M_{r,s,i} ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) \exp(M_{r,s,2} ut^2 \text{ad}_{e_{2r+s}}) \circ \\ &\quad \circ \exp(N_{r,s} M_{r,s,2} N_{r+s,2r+s} u^2 t^3 \text{ad}_{3r+2s}) \\ &= \exp\left(\sum_{i=0}^1 M_{r,s,i} ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) \circ x_{2r+s}(M_{r,s,2} ut^2) \\ &\quad \circ x_{3r+2s}\left(-\frac{1}{2} N_{r,s} M_{r,s,2} N_{r+s,2r+s} u^2 t^3\right) \end{aligned}$$

מאחר ו  $s + (r+s) = r + 2s$  אינו שורש, נקבל כי

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{i=0}^1 M_{r,s,i} ut^i \text{ad}_{e_{ir+s}}\right) &= \exp(u \text{ad}_{e_s}) \exp(N_{r,s} ut \text{ad}_{e_{r+s}}) \\ &= x_s(u) x_{r+s}(N_{r,s} ut) \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו

$$\begin{aligned} x_r(t) x_s(u) x_r(t)^{-1} &= x_s(u) x_{r+s}(N_{r,s} tu) x_{2r+s}(M_{r,s,2} t^2 u) \circ \\ &\quad \circ x_{3r+2s}\left(-\frac{1}{2} N_{r,s} M_{r,s,2} N_{r+s,2r+s} t^3 u^2\right) \circ \\ &\quad \circ x_{3r+s}(M_{r,s,3} t^3 u) \circ \\ &\quad \circ x_{3r+2s}\left(-\frac{1}{2} N_{s,3r+s} M_{r,s,3} t^3 u^2\right) \end{aligned}$$

מאחר ו  $(3r+2s) + (r+s) \notin \phi$ ,  $x_{3r+s}$ ,  $x_{3r+2s}$  מתחלפים ולכן

$$\begin{aligned} x_r(t) x_s(u) x_r(t)^{-1} &= x_s(u) x_{r+s}(N_{r,s} tu) x_{2r+s}(M_{r,s,2} t^2 u) \circ \\ &\quad \circ x_{3r+s}(M_{r,s,3} t^3 u) \circ \\ &\quad \circ x_{3r+2s}\left(\left(-\frac{1}{2} N_{r+s,2r+s} N_{r,s} M_{r,s,2} - \frac{1}{2} N_{s,3r+s} M_{r,s,3}\right) t^3 u^2\right) \end{aligned}$$



למה 5.6 המקדם בתוך  $x_{3r+2s}$  הוא

$$-\frac{1}{2}N_{r+s,2r+s}N_{r,s}M_{r,s,2} - \frac{1}{2}N_{s,3r+s}M_{r,s,3} = \frac{1}{3}M_{r+s,r,2}$$

■ הוכחה: בספר Simple Groups of Lie Type של Carter, עמוד 73.

משפט 5.7 (נוסחת הקומוטטור של Chevalley): נניח כי  $r, s \in \phi$  שורשים בת"ל, כך ש  $r+s \in \phi$ .

$$x_r(t)x_s(u)x_r(t)^{-1} = x_s(u) \prod_{\substack{i,j \geq 1 \\ ir+js \in \phi}} x_{ir+js}(C_{i,j,r,s}t^i u^j)$$

(כאן סדר הגורמים במכפלה הוא לפי הגודל של  $i+j$  כאשר

$$\begin{aligned} C_{i,1,r,s} &= M_{r,s,i} \\ C_{i,j,r,s} &= (-1)^j M_{r,s,j} \\ C_{3,2,r,s} &= \frac{1}{3}M_{r+s,r,2} \\ C_{2,3,r,s} &= -\frac{1}{3}M_{s+r,r,2} \end{aligned}$$

הערה 5.8 שני המקדמים האחרונים מופיעים רק במקרה של  $G_2$  ומסתבר שהם מספרים שלמים.

עכשיו הנוסחה תקפה גם מעל שדה כלשהו  $K$ . נסמן

$$[x_s(u), x_r(t)] = x_s(u)^{-1} x_r(t)^{-1} x_s(u) x_r(t)$$

אז

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{\substack{i,j \geq 1 \\ ir+js \in \phi}} x_{ir+js}(C_{i,j,r,s}(-t)^i u^j)$$

### 5.3 המבנה של החבורות $U, V$

למה 5.9 נקבע פונקציית גובה על  $\phi$  (לפי מערכת יסודית II). אז אפשר להגדיר סדר על  $\phi$  כך ש  $h(r) \leq h(s) \iff r < s$

הוכחה: נכתוב  $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\} \subseteq Y$  (כאן  $Y$  מרחב אוקלידי), אז  $h\left(\sum_{i=1}^l x_i r_i\right) = \sum_{i=1}^l x_i$

נבחר בסיס  $\{v_2, \dots, v_l\}$  ל  $\ker h$  ונשלימו לבסיס של  $Y$   $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$  ע"י בחירת  $v_1 = r_1$  אז מתקיים  $h\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i v_i\right) = \lambda_1$  נגדיר

$$Y^+ = \left\{ 0 \neq \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i \mid \text{The first non-zero } \lambda_k \text{ is positive} \right\}$$

זה מגדיר סדר על  $Y$ :  $y_1 < y_2 \iff y_2 - y_1 \in Y^+$  נניח כי  $r, s \in \phi$  כך ש  $r < s$ , אז  $h(s) \geq h(r)$  ולכן  $h(s-r) \in h(Y^+) \geq 0$  ■

**מסקנה 5.10** אם  $r, s \in \phi$  המקיימים  $h(r) < h(s)$  אז  $r < s$

$$\text{נגדיר } U_m = \left\langle \bigcup_{\substack{r \in \phi^+ \\ h(r) \geq m}} X_r \right\rangle, \text{ אז } U_m \subseteq U$$

**משפט 5.11** 1.  $U_m \triangleleft U$

2.  $U$  היא תת-חבורה נילפוטנטית, יתר על כן, יש ל  $U$  את הסדרה המרכזית הבאה:

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots \supseteq U_{N_0} \supseteq \{1\}$$

כאשר  $N_0$  הוא הגובה המקסימלי של שורש מ  $\phi^+$  (תזכורת: סדרה מרכזית היא סדרה כנ"ל המקיימת  $U_m \triangleleft U$  לכל  $m$  ו  $U_m/U_{m+1} \subseteq Z(U/U_{m+1})$ ).

3. לכל איבר ב  $U$  יש ייצוג יחיד בצורה  $\prod_{r \in \phi^+} x_r(t_r)$  כאשר סדר הגורמים הוא לפי סדר עולה של השורשים לפי <.

**הוכחה:**

1. יהיו  $r, s \in \phi^+$  עם  $r \neq s$  (ובאופן אוטומטי  $r \neq -s$  כי  $r, s$  חיוביים). מנוסחת הקומוטטור של Chevalley (משפט 5.7) מתקיים

$$x_r(t) x_s(u) x_r(t)^{-1} = x_s(u) \prod_{\substack{i, j \geq 1 \\ ir + js \in \phi^+}} x_{ir+js}(C_{i,j,r,s} t^i u^j)$$

נניח כי  $s \in \phi^+$  המקיים  $h(s) \geq m$ . אז

$$h(ir + js) = ih(r) + jh(s) > \underbrace{h(r)}_{>0} + \underbrace{h(s)}_{\geq m} > m$$

ולכן כל הגורמים במכפלה הם ב  $U_m$  ומאחר ו  $h(s) \geq m$ , גם  $x_s(u) \in U_m$  ולכן ההצמדה ב  $U_m$ .

2. כמו קודם, נוסחת הקומוטטור מראה כי

$$[U_m, U_n] \subseteq U_{m+n}$$

ל  $m = 1$  מקבלים

$$\left[ \underbrace{U_1, U_n}_{=U} \right] \subseteq U_{n+1}$$

ולכן  $a \in U_n$  ו  $b \in U_{n+1}$  מתקיים  $[a, b] \in U_{n+1}$

$$[aU_{n+1}, bU_{n+1}] = [a, b]U_{n+1} = U_{n+1}$$

ולכן  $aU_{n+1}$  ו  $bU_{n+1}$  מתחלפים, כלומר  $aU_{n+1} \in Z(U/U_{n+1})$ .  
בנוסף ברור של  $m > N_0$ , החבורה  $U_m$  טריוואלית ולכן הסדרה המרכזית לכל היותר באורך  $N_0$ .

3. איבר של  $U$  הוא מכפלה  $\prod_{r \in \phi^+} x_r(t_r)$  באיזשהו אופן (כאשר מאפשרים חזרות של השורשים  $r$ ). נתבונן בשני גורמים עוקבים במכפלה:  $x_s(u)x_r(t)$  אם  $r = s$  אז  $x_r(u)x_r(t) = x_r(u+t)$  או  $r < s$  אז נשתמש בנוסחת הקומוטטור של Chevalley:

$$x_s(u)x_r(t) = x_r(t)x_s(u) \prod_{\substack{i,j \geq 1 \\ ir+js \in \phi^+}} x_{ir+js} \left( C_{i,j,r,s} (-t)^i u^j \right)$$

מתקיים  $h(ir+js) = ih(r) + jh(s) \geq h(r) + h(s) > h(r), h(s)$ , זה מראה שאפשר לכתוב את המכפלה לפי סדר עולה של השורשים.

**יחידות** באינדוקציה באופן הבא:

$$u = \prod_{h(r) \geq m} x_r(t_r) = \prod_{h(r) \geq m} x_r(t'_r)$$

(סדר עולה לפי  $<$  בכל מכפלה)

נוכיח באינדוקציה על  $m$  כי  $t_r = t'_r$  לכל  $r$ . נתחיל ב  $m = N_0 + 1$ . לפי ההגדרה,  $U_{N_0+1} = \{1_U\}$  ואין מה להוכיח.

נניח נכונות ל  $m + 1$  ונוכיח ל  $m$ . נניח כי  $r \in \phi^+$  כך ש  $h(r) = m$ . נתבונן ב  $ue_{-r}$ :

$$ue_{-r} = \prod_{h(s) \geq m} x_s(t_s) e_{-r}$$

נניח כי  $s \in \phi^+$  המקיים  $h(s) > m$ , ונתבונן ב  $x_s(t_s)e_{-r}$ . אם  $s - r$  אינו שורש, אז  $x_s(t_s)e_{-r} = e_{-r}$  (כי אחרת  $s - r \in \phi^+$  או  $s - r \in \phi^-$ ). אם  $s - r$  הוא שורש, אז  $h(s - r) < 0$  ולכן  $h(s) < h(r) = m$  (סתירה). במקרה זה

$$x_s(t_s)e_{-r} = \sum_{is-r \in \phi^+} M_{s,-r,i} t_s^i e_{is-r} \in e_{-r} + \sum_{s_i \in \phi^+} \mathfrak{g}_{s_i}$$

כל עוד  $h(s') > m$  נקבל

$$x_{s'}(t_{s'}) \left( e_{-r} + \sum_{s_i \in \phi^+} g_{s_i} \right) \in e_{-r} + \sum_{s \in \phi^+} g_s$$

נניח כי  $h(s) = m$ , אז  $s - r$  אינו שורש (כי הגובה שלו שווה ל-0). במקרה זה, אם  $s \neq r$

$$x_s(t_s) e_{-r} = e_{-r}$$

$$x_s(t_s) \left( \sum_{s' \in \phi^+} g_{s'} \right) = \sum_{s' \in \phi^+} g_{s'}$$

אם  $s = r$  אז

$$x_r(t_r) e_{-r} = e_{-r} + t_r h_r - t_r^2 e_r$$

לבסוף מראים ע"י שימוש ב

$$x_r(t) h_s = h_s - A_{s,r} t e_r$$

כי

$$u e_{-r} = e_{-r} + t_r h_r + x$$

כאשר  $x \in \sum_{s' \in \phi^+} g_{s'}$ . נסיק כי  $t_r = t'_r$  לכל  $r \in \phi^+$  כך ש  $h(r) = m$ . נצמצם משני האגפים של

$$\prod_{h(r) \geq m} x_r(t_r) = \prod_{h(r) \geq m} x_r(t'_r)$$

את  $\prod_{h(r)=m} x_r(t_r) = \prod_{h(r)=m} x_r(t'_r)$  ונקבל

$$\prod_{h(r) \geq m+1} x_r(t_r) = \prod_{h(r) \geq m+1} x_r(t'_r)$$

מהנחת האינדוקציה, לכל  $r$  המקיים  $h(r) \geq m + 1$

■

נזכר כי  $V = \langle \bigcup_{r \in \phi^-} X_r \rangle$ . משפט אנלוגי נכון כמובן גם ל- $V$ .

## 6 תת-החבורות $\langle X_r, X_{-r} \rangle$

### 6.1 הצגות של $SL_2(\mathbb{C})$

יהי  $q$  טבעי. נסמן ב- $R_q[x, y]$  את מרחב כל הפולינומים ב- $\mathbb{C}[x, y]$  שהם הומוגניים ממעלה  $q$  (זהו מרחב מממד  $q + 1$ ).

נגדיר  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  ולפולינום  $f(x, y) \in R_q[x, y]$

$$(\Pi_q(g)f)(x, y) = f((x, y)g) = f(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y)$$

אז  $g \mapsto \Pi_q(g)$  מגדיר הומומורפיזם של חבורות  $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(R_q[x, y])$ . נזנה את הסימון  $f \mapsto \Pi_q(g)f$  ונסמן במקום  $g \cdot f$ . נשתמש בבסיס  $v_i = x^i y^{q-i}$  אז

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_i &= x^i (tx + y)^{q-i} \\ &= x^i \sum_{j=0}^{q-i} \binom{q-i}{j} t^j x^j y^{q-i-j} \\ &= \sum_{j=0}^{q-i} \binom{q-i}{j} t^j x^{i+j} y^{q-i-j} \\ &= \sum_{j=0}^{q-i} \binom{q-i}{j} t^j v_{i+j} \end{aligned}$$

בסה"כ  $\{v_q, v_{q-1}, \dots, v_1, v_0\}$  ולכן ביחס לבסיס  $\{v_q, v_{q-1}, \dots, v_1, v_0\}$   $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_i = \sum_{j=0}^{q-i} \binom{q-i}{j} t^j v_{i+j}$  פעולת  $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  על  $R_q[x, y]$  מתוארת כמטריצה יוניפוטנטית עליונה.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} v_i &= (x + ty)^i y^{q-i} \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x^{i-j} t^j y^j y^{q-i} \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x^{i-j} t^j y^{q-i+j} \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} t^j v_{i-j} \end{aligned}$$

בסה"כ  $\{v_0, v_1, \dots, v_{q-1}, v_q\}$  ולכן ביחס לבסיס  $\{v_0, v_1, \dots, v_{q-1}, v_q\}$  פעולת  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$  על  $R_q[x, y]$  מתוארת כמטריצה יוניפוטנטית עליונה.

## 6.2 ההומומורפיזם מ- $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ ל- $\langle X_r, X_{-r} \rangle$

( $K = \mathbb{C}$ )

$\mathfrak{g}$  אלגברת לי המתאימה מעל  $\mathbb{C}$ . נתבונן בשרשראות  $r$ - $\phi$ .

נקח שרשרת כזאת ונניח כי השורש הפותח שלה הוא  $s$  (בת"ל):

$$s, r+s, 2r+s, \dots, qr+s \in \phi$$

$$\mathfrak{M}_s^{(r)} = \sum_{i=0}^q \mathfrak{g}_{ir+s} \subseteq \mathfrak{g} \quad (\text{כאן } p=0)$$

**טענה 6.1**  $\mathfrak{M}_s^{(r)}$  אינווריאנטי ל  $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ .

**הוכחה:** די להראות  $\mathfrak{M}_s^{(r)} \subseteq \mathfrak{M}_s^{(r)}$  ואכן  $x_{\pm r}(t)$

$$x_r(t) e_{ir+s} = \sum_{j=0}^{q-1} M_{r,ir+s,j} t^j e_{(i+j)r+s} \in \mathfrak{M}_s^{(r)}$$

$$x_{-r}(t) e_{ir+s} = \sum_{j=0}^{q-1} M_{-r,ir+s,j} t^j e_{(i-j)r+s} \in \mathfrak{M}_s^{(r)}$$

■

$$\mathfrak{M}_r^{(r)} = \mathfrak{g}_r + \mathbb{C}h_r + \mathfrak{g}_{-r}$$

**טענה 6.2**  $\mathfrak{M}_r^{(r)}$  אינווריאנטי ל  $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ .

**הוכחה:**

$$x_r(t) e_r = e_r \in \mathfrak{M}_r^{(r)}$$

$$x_r(t) h_r = h_r - 2te_r \in \mathfrak{M}_r^{(r)}$$

$$x_r(t) e_{-r} = e_{-r} + th_r - t^2 e_{-r} \in \mathfrak{M}_r^{(r)}$$

■

נחליף תפקידי  $r$  ו  $-r$  ונקבל כי  $\mathfrak{M}_r^{(r)}$  אינווריאנטי גם ל  $x_{-r}(t)$ .

**טענה 6.3**  $\langle X_r, X_{-r} \rangle$  פועלת זהותית על  $h_r^\perp$ .

**הוכחה:** נניח כי  $h \in h_r^\perp$ . נכתוב  $h = \sum_{s \in \Pi} \alpha_s h_s$ .

$$0 = (h, h_r) = \sum_{s \in \Pi} \alpha_s (h_s, h_r)$$

$$= \frac{4}{(r, r)} \sum_{s \in \Pi} \frac{\alpha_s(r, s)}{(s, s)}$$

$\implies$

$$\sum_{s \in \Pi} \frac{\alpha_s(r, s)}{(s, s)} = 0$$

$$\begin{aligned}
 x_r(t)h &= \sum_{s \in \Pi} \alpha_s x_r(t) h_s \\
 &= \sum_{s \in \Pi} \alpha_s \left( h_s - \underbrace{A_{s,r}}_{= \frac{2(r,s)}{(s,s)}} t e_r \right) \\
 &= \sum_{s \in \Pi} \alpha_s h_s - 2 \underbrace{\sum_{s \in \Pi} \alpha_s \frac{(r,s)}{(s,s)} h_s}_{=0} \\
 &= \sum_{s \in \Pi} \alpha_s h_s = h
 \end{aligned}$$

■

נסמן ב- $\Gamma_r$  את אוסף כל השורשים  $s$  שהם בלתי תלויים בר ופותרים שרשרת- $r$ . אז

$$\mathfrak{g} = h_r^\perp \oplus \mathfrak{M}_r^{(r)} \oplus \left( \bigoplus_{s \in \Gamma_r} \mathfrak{M}_s^{(r)} \right)$$

זהו פירוק של  $\mathfrak{g}$  לסכום ישר של תת-מרחבים האינוריאנטים לפעולת  $\langle X_r, X_{-r} \rangle$  (נובע מטענה 3.19 סעיף 3 ומכך שכל שורש  $s$  נמצא בשרשרת- $r$  העוברת דרכו).

**למה 6.4** תהי  $s, r+s, 2r+s, \dots, qr+s$  שרשרת  $r$  שנפתחת ב- $(s, r)$  בת"ל. נסמן  $i = 0, 1, \dots, q, f_i = e_{ir+s}$  (זהו בסיס ל- $\mathfrak{M}_s^{(r)}$ ). אז

$$\begin{aligned}
 x_r(t) f_i &= \sum_{j=0}^{q-i} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{i+j-1} \binom{i+j}{j} t^j f_{i+j} \\
 x_{-r}(t) f_i &= \sum_{j=0}^i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \cdots \varepsilon_{i-j} \binom{q-i+j}{j} t^j f_{i-j}
 \end{aligned}$$

כאשר  $\varepsilon_t = \pm 1$  נקבעים לפי  $N_{r, tr+s} = \varepsilon_t (t+1)$ .

**הערה 6.5** אם נסתכל בשרשרת  $r$  דרך  $tr+s$

$$tr+s-t, r, \dots, tr+s, \dots, qr+s$$

אז כאן  $p = t$  ולכן  $N_{r, tr+s} = \pm (p+1) = \pm (t+1)$ .

**הוכחה:**

$$\begin{aligned}
 x_r(t) f_i &= x_r(t) e_{ir+s} \\
 &= \sum_{j=0}^{q-i} M_{r, ir+s, j} t^j e_{(i+j)r+s}
 \end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}
 M_{r,ir+s,j} &= \frac{N_{r,ir+s} \cdot N_{r,(i+1)r+s} \cdots \cdots N_{r,(i+j-1)r+s}}{j!} \\
 &= \frac{\varepsilon_i (i+1) \varepsilon_{i+1} (i+2) \cdots \cdots \varepsilon_{i+j-1} (i+j)}{j!} \cdot \frac{i!}{i!} \\
 &= \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \cdots \varepsilon_{i+j-1} \frac{(i+j)!}{j! \cdot i!} \\
 &= \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \cdots \varepsilon_{i+j-1} \cdot \binom{i+j}{j}
 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 x_r(t) f_i &= \sum_{j=0}^{q-i} M_{r,ir+s,j} t^j e_{(i+j)r+s} \\
 &= \sum_{j=0}^{q-i} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \cdots \varepsilon_{i+j-1} \cdot \binom{i+j}{j} t^j f_{i+j}
 \end{aligned}$$

כנדרש.

נעבור להוכיח את הנוסחה השנייה.

$$\begin{aligned}
 x_{-r}(t) f_i &= x_{-r}(t) e_{ir+s} \\
 &= \sum_{j=0}^i M_{-r,ir+s,j} t^j e_{(i-j)r+s}
 \end{aligned}$$

מתקיים

$$M_{-r,ir+s,j} = \frac{N_{-r,ir+s} \cdot N_{-r,(i-1)r+s} \cdots \cdots N_{-r,(i-(j-1))r+s}}{j!}$$

נשים לב כי

$$\underbrace{-r}_{\in \phi} + \underbrace{(ir+s)}_{\in \phi} + \underbrace{((1-i)r-s)}_{\substack{s+(i-1)r \in \phi \\ \Rightarrow -(s+(i-1)r) \in \phi}} = 0$$

במקרה כזה ראינו את הזהות

$$\frac{N_{(1-i)r-s,-r}}{\|ir+s\|^2} = \frac{N_{-r,ir+s}}{\|(i-1)r+s\|^2}$$

1

$$N_{(1-i)r-s,-r} = -N_{(i-1)r+s,r} = N_{r,(i-1)r+s}$$



לכן

$$\begin{aligned} \frac{N_{-r,ir+s}}{\|(i-1)r+s\|^2} &= \frac{N_{r,(i-1)r+s}}{\|ir+s\|^2} \\ \implies \\ N_{-r,ir+s} &= \frac{\|(i-1)r+s\|^2}{\|ir+s\|^2} \cdot N_{r,(i-1)r+s} \end{aligned}$$

לבסוף ראינו (למה 4.2) כי

$$\frac{\|(i-1)r+s\|^2}{\|ir+s\|^2} = \frac{P+1}{Q}$$

כאשר  $P, Q$  מתאימים לשרשרת  $-r$  דרך  $ir+s$  כלומר

$$\underbrace{qr+s}_{-(q-i)(-r)+ir+s}, \dots, (i+1)r+s, ir+s, (i-1)r+s, \dots, \underbrace{s}_{ir+s+i(-r)}$$

לכן

$$\frac{\|(i-1)r+s\|^2}{\|ir+s\|^2} = \frac{q-i+1}{i}$$

ונקבל

$$\begin{aligned} N_{-r,ir+s} &= \frac{\|(i-1)r+s\|^2}{\|ir+s\|^2} \cdot N_{r,(i-1)r+s} \\ &= \frac{q-i+1}{i} N_{r,(i-1)r+s} \\ &= \frac{q-i+1}{i} \cdot i \cdot \varepsilon_{i-1} \\ &= (q-i+1) \varepsilon_{i-1} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} M_{-r,ir+s,j} &= \frac{N_{-r,ir+s} \cdot N_{-r,(i-1)r+s} \cdots N_{-r,(i-(j-1))r+s}}{j!} \\ &= \frac{(q-i+1)(q-i+2) \cdots (q-(i-j+1)+1)}{j!} \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \cdots \varepsilon_{i-j} \\ &= \binom{q-i+j}{j} \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \cdots \varepsilon_{i-j} \end{aligned}$$

■

**למה 6.6** יהיו  $v_i = x^i y^{q-i} \in R_q[x, y]$  ,  $i = 0, 1, \dots, q$  נתונים  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q = \pm 1$  נגדיר

$$u_i = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{i-1} \binom{q}{i} v_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_i = \sum_{j=0}^{q-i} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{i+j-1} \binom{i+j}{j} t^j u_{i+j}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} u_i = \sum_{j=0}^i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \cdots \varepsilon_{i-j} \binom{q-i+j}{j} t^j u_{i-j}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_i &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{i-1} \binom{q}{i} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_i \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{i-1} \binom{q}{i} \sum_{j=0}^{q-i} \binom{q-i}{j} t^j v_{i+j} \\ &= \sum_{j=0}^{q-i} \binom{q}{i} \binom{q-i}{j} \binom{q}{i+j} t^j \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{i+j-1}}{\binom{q}{i+j} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{i+j-1}} v_{i+j} \\ &= \sum_{j=0}^{q-i} \frac{\binom{q}{i} \binom{q-i}{j}}{\binom{q}{i+j}} t^j \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{i+j-1} u_{i+j} \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} \frac{\binom{q}{i} \binom{q-i}{j}}{\binom{q}{i+j}} &= \frac{q!}{i! (q-i)! j! \cdot (q-i-j)!} \cdot \frac{(i+j)! \cdot (q-i-j)!}{q!} \\ &= \frac{(i+j)!}{i! \cdot j!} = \binom{i+j}{j} \end{aligned}$$

וקיבלנו

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_i = \sum_{j=0}^{q-i} \binom{i+j}{j} t^j \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{i+j-1} u_{i+j}$$

■ כנדרש. באופן דומה מקבלים את הזהות השניה.

נשווה עכשיו את פעולת  $x_{\pm r}(t)$  על  $\mathfrak{g}_r + \mathbb{C}h_r + \mathfrak{g}_{-r}$  עם פעולת  $\mathfrak{M}_r^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ , על  $\mathcal{R}_2[x, y]$ .

$$\begin{cases} x_r(t) e_r = e_r \\ x_r(t) h_r = h_r - 2te_r \\ x_r(t) e_{-r} = e_{-r} + th_r - t^2 e_r \end{cases} \quad \begin{cases} x_{-r}(t) e_r = e_r - th_r - t^2 e_{-r} \\ x_{-r}(t) h_r = h_r + 2te_{-r} \\ x_{-r}(t) e_{-r} = e_{-r} \end{cases}$$

לכן ביחס לבסיס  $\{e_r, h_r, e_{-r}\}$

$$[x_r(t)] = \begin{pmatrix} 1 & -2t & -t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[x_{-r}(t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ -t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix}$$

למה 6.7 נשתמש בבסיס  $\{-x^2, 2xy, y^2\}$  של  $R_2[x, y]$ . אז:

$v \setminus g$	$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$
$-x^2$	$-x^2$	$-x^2 - t(2xy) - t^2y^2$
$2xy$	$-2t(-x^2) + 2xy$	$2xy + 2ty^2$
$y^2$	$-t^2(-x^2) + t(2xy) + y^2$	$y^2$

טבלה 4: פעולת  $g$  על איברי הבסיס

הוכחה: חישוב ישיר. למשל

$$(x, y) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, tx + y)$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y^2 = (tx + y)^2 = t^2x^2 + 2txy + y^2 = -t^2(-x^2) + t(2xy) + y^2$$

■

משפט 6.8 קיים הומומורפיזם על  $\langle X_r, X_{-r} \rangle$   $\varphi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \langle X_r, X_{-r} \rangle$ , כך שלכל  $t \in \mathbb{C}$ ,

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_r(t)$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-r}(t)$$

הוכחה: ראינו כי  $\mathfrak{g} = h_r^\perp \oplus \mathfrak{M}_r^{(r)} \oplus \bigoplus_{s \in \Gamma_r} \mathfrak{M}_s^{(r)}$  ל  $s \in \Gamma_r$  נסמן  $q = q_{s,r}$  המתאים לשרשרת  $s, s+r, \dots, s+q_{s,r} \cdot r$ . יהיו  $V_0$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{C}$  בעל מימד  $\dim \mathfrak{h} - 1$ . נגדיר

$$\mathfrak{M} = V_0 \oplus R_2[x, y] \oplus \bigoplus_{s \in \Gamma_r} (R_{q_{s,r}}[x, y])$$

זהו מרחב וקטורי מאותו מימד כמו  $\mathfrak{g}$ . פעולת  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  ב $\mathfrak{M}$ : על כל מחובר  $R_q[x, y]$  כמו קודם (כולל  $q = 2$ ) והותית על  $V_0$ . יהי  $T : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{g}$  איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים שמוגדר כך:  $T(V_0) = h_r^\perp$  ש  $T \upharpoonright_{V_0}$  חד-חד-ערכית.

לכל  $s \in \Gamma_r$ ,  $\mathfrak{M}_s^{(r)}$ ,  $T(R_{q_{r,s}}[x, y]) = \mathfrak{M}_s^{(r)}$  מעביר את הבסיס  $u_0, u_1, \dots, u_{q_{r,s}}$  לבסיס  $f_0, f_1, \dots, f_{q_{r,s}}$  (כך  $T(R_2[x, y]) = \mathfrak{M}_r^{(r)}$  וכן  $f_i = e_{ir+s}$ ) וכך  $T$  מעביר את הבסיס  $\{-x^2, 2xy, y^2\}$  לבסיס  $\{e_r, h_r, e_{-r}\}$ . לפי כל מה שעשינו

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f\right) = x_r(t) T(f)$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} f\right) = x_{-r}(t) T(f)$$

לכל  $f \in \mathfrak{M}$ , ולכל  $t \in \mathbb{C}$   
 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  נוצרת ע"י  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \right\}$   
 נניח כי

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}^{j_1} \cdots \begin{pmatrix} 1 & t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_k & 1 \end{pmatrix}^{j_k} = I_2$$

אז לכל  $f \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} T(f) &= T\left(\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}^{j_1} \cdots \begin{pmatrix} 1 & t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_k & 1 \end{pmatrix}^{j_k} f\right) \\ &= x_r(t_1) T\left(\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_1-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}^{j_1} \cdots \begin{pmatrix} 1 & t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_k & 1 \end{pmatrix}^{j_k} f\right) \\ &= \dots \\ &= x_r(t_1)^{i_1} T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}^{j_1} \cdots \begin{pmatrix} 1 & t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_k & 1 \end{pmatrix}^{j_k} f\right) \\ &= \dots \\ &= x_r(t_1)^{i_1} x_{-r}(s_1)^{j_1} \cdots x_r(t_k)^{i_k} x_{-r}(s_k)^{j_k} T(f) \end{aligned}$$

ולכן  $x_r(t_1)^{i_1} x_{-r}(s_1)^{j_1} \cdots x_r(t_k)^{i_k} x_{-r}(s_k)^{j_k} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$  נגדיר

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \langle X_r, X_{-r} \rangle$$

לפי

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}^{j_1} \cdots \begin{pmatrix} 1 & t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_k & 1 \end{pmatrix}^{j_k}\right) = x_r(t_1)^{i_1} x_{-r}(s_1)^{j_1} \cdots x_r(t_k)^{i_k} x_{-r}(s_k)^{j_k}$$

זאת הגדרה טובה ולכן  $\varphi$  הוא הומומורפיזם על כך ש

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_r(t)$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-r}(t)$$

■

לכל  $t \in \mathbb{C}$ .

### 6.3 ההומומורפיזם מ- $\mathrm{SL}_2(K)$ ל- $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ (מעל $K$ - שדה כלשהו)

**משפט 6.9** יהי  $K$  שדה כלשהו. תהי  $G$  חבורת Chevalley מטיפוס  $\mathfrak{g}$  מעל  $K$ . יהי  $r \in \phi$  ונתבונן בתת-חבורה  $\langle X_r, X_{-r} \rangle \subseteq G$ . קיים הומומורפיזם על

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(K) \rightarrow \langle X_r, X_{-r} \rangle$$

$$\text{כך ש } \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-r}(t), \varphi \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_r(t) \text{ לכל } t \in K$$

**הוכחה:** צריך להראות את פעולת  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  על בסיס שהוא תמונה (ביחס ל- $T^{-1}$ ) של בסיס Chevalley של  $\mathfrak{g}$ .

$T$  הוגדר באמצעות בסיס  $B$  של  $\mathfrak{g}$  ובהתאמה בסיס  $T(B)$  של  $\mathfrak{g}$  כך ש- $T(B)$  הוא כמעט בסיס Chevalley:

$$T(B) = \{e_s \mid s \in \phi\} \cup \{h_r\} \cup \{h'_i\}$$

כאשר  $\{h'_i\}$  בסיס של  $h_r^\perp$ .

**שלב א** נניח עכשיו כי  $r \in \Pi$ . נבחן את המטריצה המייצגת של  $T$  לפי בסיס Chevalley. יהי  $s \in \Pi$ . נכתוב  $h_s = \lambda h_r + y$  כאשר  $y \in h_r^\perp$ . אז

$$\frac{4(s, r)}{(s, s)(r, r)} = (h_s, h_r) = (\lambda h_r + y, h_r) = \lambda (h_r, h_r) + \underbrace{(y, h_r)}_{=0} = \lambda \frac{4(r, r)}{(r, r)^2}$$

ולכן  $2\lambda = \frac{2(s, r)}{(s, s)} = A_{s, r} \in \mathbb{Z}$ . נניח כי  $\gamma \in \langle X_r, X_{-r} \rangle$ , אז ראינו כי  $\gamma$  פועל זהותית על  $h_r^\perp$  (טענה 6.3).

$$\begin{aligned} \gamma \cdot h_s &= \lambda \gamma h_r + y = \lambda \gamma h_r + (h_s - \lambda h_r) \\ &= h_s + \lambda (\gamma h_r - h_r) \end{aligned}$$

נכתוב  $h_r = T(m_r)$  ו  $h_s = T(m_s)$  ולכן במונחי  $T$ :

$$\gamma T(m_s) = T(m_s) + \lambda (\gamma T(m_r) - T(m_r))$$

$$\text{נניח כי } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \gamma = \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ אז}$$

$$\begin{aligned} T(g \cdot m_s) &= T(m_s) + T(\lambda(g \cdot m_r - m_r)) \\ g \cdot m_s &= m_s + \lambda(g \cdot m_r - m_r) \end{aligned}$$

ב- $R_2[x, y]$  לקחנו את הבסיס  $\{-x^2, 2xy, y^2\}$  והתקיים  $T(2xy) = h_r$  (למה 6.7) ולכן  $m_r = 2xy$  מתקיים

$$\begin{aligned} g \cdot m_r - m_r &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (2xy) - 2xy \\ &= 2(ax + cy)(bx + dy) - 2xy \\ &= 2 \left( (-ab)(-x^2) + \underbrace{(ad + bc)}_{ad - bc + 2bc = 1 + 2bc} xy + cdy^2 - xy \right) \\ &= (-2ab)(-x^2) + (2bc)2xy + (2cd)y^2 \end{aligned}$$

לכן

$$\gamma \cdot h_s = h_s + \lambda(\gamma \cdot h_r - h_r) = h_s + \left( -\underbrace{2\lambda}_{\in \mathbb{Z}} abe_r + \underbrace{2\lambda}_{\in \mathbb{Z}} bch_r + \underbrace{2\lambda}_{\in \mathbb{Z}} cde_{-r} \right)$$

המקדמים הם פולינומים מעל  $\mathbb{Z}$  במשתנים  $a, b, c, d$  והומוגניים ממעלה 2 (כאיברים ב- $\mathbb{Z}[a, b, c, d]$ ), וכנ"ל לגבי פעולת  $g$  על  $m_s$ .

זה גם מראה ש  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_r \oplus \mathfrak{g}_{-r}$  אינווריאנטי ביחס ל- $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ , וכתבנו את המטריצה של פעולת  $\gamma$  מצומצם לתת-מרחב זה ביחס לבסיס  $\{h_s \mid s \in \Pi\} \cup \{e_r, e_{-r}\}$ .

נסמן ל  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = g \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  ב- $F(g)$  את המטריצה של הפעולה של  $g$  ביחס לתמונת בסיס Chevalley:

$$T^{-1}(\{h_s \mid s \in \Pi\} \cup \{e_s \mid s \in \phi\})$$

אז

$$F(g) = F_{\mathfrak{h}}(g) \oplus \left( \bigoplus_{s \in \Gamma_r} F_s(g) \right) = \bigoplus_i F_i(g)$$

כאשר  $F_{\mathfrak{h}}(g)$  היא המטריצה שמצאנו עכשיו (של פעולת  $g$  מצומצמת למרחב

$$T^{-1}(h_r^\perp \oplus \{e_r, h_r, e_{-r}\})$$

ביחס לבסיס  $\{h_s \mid s \in \Pi\} \cup \{e_r, e_{-r}\}$ , ו- $F_s$  היא המטריצה של פעולת  $g$  במרחב  $R_{q_{r,s}}[x, y]$  ביחס ל- $\{u_0, \dots, u_{q_{r,s}}\}$  מטריצה זאת היא מעל החוג  $\mathbb{Z}[a, b, c, d]$  והפולינומים הם הומוגוניים ממעלה  $q_{r,s}$ .

עכשיו אפשר להציב במטריצות האלה  $a, b, c, d \in K$  לכל  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(K)$ . מעל  $\mathbb{C}$  אנו יודעים כי

$$F_i(gg') = F_i(g)F_i(g')$$

נגדיר  $G_i(X, X') = F_i(XX') - F_i(X)F_i(X')$ , כאשר  $X, X'$  מטריצות  $2 \times 2$  וחושבים עליהן כעל זוג של 4 משתנים בלתי תלויים אלגברית, אז ל  $X, X' \in M_2(\mathbb{C})$  כך ש  $1 = \det X = \det X'$  מתקיים  $G_i(X, X') = 0$ .

ניח כי  $\det X = t \neq 0, \det X' = t' \neq 0$ . יהיו  $c, c' \in \mathbb{C}$  כך ש  $t = c^2, t' = c'^2$ , אז

$$\det(c^{-1}X) = \det(c'^{-1}X') = 1$$

כיוון ש  $F_i$  מטריצת פולינומים הומוגניים ממעלה  $n_i$ ,

$$\begin{aligned} G_i(X, X') &= F_i(cc'c^{-1}Xc'^{-1}X') - F_i(cc^{-1}X)F_i(c'c'^{-1}X') \\ &= c^{n_i}c'^{n_i}F_i(c^{-1}Xc'^{-1}X') - c^{n_i}F_i(c^{-1}X)c'^{n_i}F_i(c'^{-1}X') = 0 \end{aligned}$$

לכן  $G_i(X, X') = 0$  לכל  $X, X' \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ . מרציפות, גם  $G_i(X, X') = 0$  לכל  $X, X' \in \text{M}_2(\mathbb{C})$  ולכן נסיק כי גם מעל  $K$

$$F_i(gg') = F_i(g)F_i(g')$$

לכל  $g, g' \in \text{SL}_2(K)$ . מכאן ההעתקה  $g \mapsto F(g)$  היא הומומורפיזם מ  $\text{SL}_2(K)$  אל חבורת מטריצות הפיכות שכל אחת מהן המטריצה המייצגת ביחס לבסיס Chevalley של  $\mathfrak{g}$  של

אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}_K$ . ברור כי  $F\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$  הן המטריצות של  $x_r(t)$

ו  $x_{-r}(t)$  (מעל  $\mathbb{C}$  מתקיים  $\zeta \in \mathbb{C}$  למשל כי  $x_r(\zeta) = \varphi\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ולכן  $F\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  היא

המטריצה המייצגת של  $x_r(\zeta)$  לפי בסיס Chevalley והחלפת  $\zeta$  ב  $t$  נותנת בדיוק את ההגדרה של המטריצה המייצגת של  $x_r(t)$  לפי בסיס Chevalley). לכן  $g \mapsto \varphi(g)$  הוא הומומורפיזם

$$\text{SL}_2(K) \text{ לתוך } G \text{ כך ש } \varphi\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_r(t), \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-r}(t)$$

**שלב ב** אם  $r \notin \Pi$ , יהי  $w \in W$  כך ש  $w(r) = r' \in \Pi$ . נחזור ל  $K = \mathbb{C}$ . יש אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}$  כך ש  $\theta_w(e_s) = e_{w(s)}$  ו  $\theta_w(h_s) = h_{w(s)}$  לכל  $s \in \Pi$  (משפט 3.26). נשים לב כי ביחס לבסיס Chevalley, מטריצה הפיכה עם מקדמים שלמים וטרמיננטה  $\pm 1$ : על איברי  $e_s, (s \in \phi)$ , פועלת כתמורה, ואילו על איברי  $h_s, (s \in \Pi)$ , פועלת כמו  $w$ , שראינו שלפי הבסיס  $\Pi$  היא פועלת כמטריצה עם מקדמים שלמים וטרמיננטה  $\pm 1$  (הערה 2.12). מתקיים

$$\begin{aligned} \theta_w x_{\pm r}(t) \theta_w^{-1} &= \theta_w \exp(tad_{e_{\pm r}}) \theta_w^{-1} \\ &= \exp(tad_{e_{\pm \theta_w(r)}}) = \exp(tad_{e_{\pm r'}}) = x_{\pm r'}(t) \end{aligned}$$

מאחר ו  $\theta_w$  ביחס לבסיס Chevalley היא מטריצה בעלת מקדמים שלמים ובעלת טרמיננטה  $\pm 1$ , ההעתקה  $\theta_w$  מוגדרת גם מעל  $K$  והזהות הנ"ל נכונה גם מעל  $K$  ואז הצמדה ע"י  $\theta_w$  מגדירה איזומורפיזם  $\langle X_r, X_{-r} \rangle \cong \langle X_{r'}, X_{-r'} \rangle$ . יהי  $\varphi' : \text{SL}_2(K) \rightarrow \langle X_r, X_{-r} \rangle$  הומומורפיזם כך ש

$$\begin{aligned} \varphi'\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= x_{r'}(t) \\ \varphi'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} &= x_{-r'}(t) \end{aligned}$$

נגדיר  $\varphi : \text{SL}_2(K) \rightarrow \langle X_r, X_{-r} \rangle$  ע"י הרכבת  $\varphi'$  עם ההצמדה  $\theta_w$ :  $\varphi(g) = \theta_w^{-1} \varphi'(g) \theta_w$

■ 
$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \theta_w^{-1} x_{r'}(t) \theta_w = x_r(t)$$
 למשל

### 6.4 האיברים $n_r, h_r(\lambda)$

יהי  $\phi_r : \text{SL}_2(K) \rightarrow \langle x_r, x_{-r} \rangle$  כמו במשפט. נסמן

$$h_r(\lambda) = \phi_r \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

$$n_r = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**טענה 6.10** 1.  $h_r(\lambda) h_s = h_s$  לכל  $s \in \Pi$  (ולכן גם לכל  $s \in \phi$ ).

2.  $h_r(\lambda) e_s = \lambda^{A_{r,s}} \cdot e_s$  (לכל  $s \in \phi$ ).

**הוכחה:** נוכיח את 2 ועל הדרך גם 1 יצא.

נניח כי  $s \in \phi$  ו- $r \neq \pm s$ . נתבונן בשרשרת- $r$  דרך  $s$ . נסמן  $\bar{s} = -ir + s$  את האיבר הפותח את השרשרת:

$$\bar{s}, r + \bar{s}, \dots, qr + \bar{s}$$

כיוון ש- $s = ir + \bar{s}$ , אפשר לקרוא את פעולת  $h_r(\lambda)$  ע"י בחינת פעולת  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  על איבר הבסיס שסומן

$$u_i = \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{i-1} \binom{q}{i} v_i$$

$$v_i = x^i \cdot y^{q-i}$$

לכן  $\binom{\lambda}{\lambda^{-1}} \cdot v_i = (\lambda x)^i (\lambda^{-1} y)^{q-i} = \lambda^{2i-q} v_i$  ולכן  $\binom{\lambda}{\lambda^{-1}} \cdot u_i = \lambda^{2i-q} \cdot u_i$

$$h_r(\lambda) \cdot e_s = \lambda^{2i-q} \cdot e_s$$

במונחי  $s$ , השרשרת היא:

$$\bar{s} = -ir + s, \dots, s, \dots, \underbrace{(q-i)r + s}_{qr + \bar{s}}$$

כאן  $p_{r,s} = i$ ,  $q_{r,s} = q - i$ . ראינו באופן כללי  $q_{r,s} = 2i - q$  ולכן נקבל  $h_r(\lambda) \cdot e_s = \lambda^{2i-q} \cdot e_s$

נבדוק את הפעולה על  $\{e_r, h_r, e_{-r}\}$ . בצד של  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ :  $\{-x^2, 2xy, y^2\}$

$v$	$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot v$
$-x^2$	$-\lambda^2 x^2$
$2xy$	$2xy$
$y^2$	$\lambda^{-2} y^2$

טבלה 5: הפעולה על איברי הבסיס



ולכן

$v$	$h_r(\lambda) \cdot v$
$e_r$	$\lambda^2 e_r = \lambda^{A_{r,r}} e_r$
$h_r$	$h_r$
$e_{-r}$	$\lambda^{-2} e_{-r} = \lambda^{A_{r,-r}} e_{-r}$

טבלה 6: פעולת  $h_r(\lambda)$  על איברי הבסיס

כיוון ש  $\langle X_r, X_{-r} \rangle$  פועלת כזהות על  $h_r^\perp$ , נקבל כי  $h_s = h_r(\lambda) h_s$  לכל  $s \in \Pi$ , ועכשיו ברור כי כל זה נכון גם מעל  $K$ . ■

**טענה 6.11** 1.  $n_r \cdot h_s = h_{w_r(s)}$  ל  $s \in \Pi$  (ואז זה נכון ל  $s \in \phi$ ).

2.  $n_r \cdot e_s = \eta_{r,s} e_{w_r(s)}$  כאשר  $\eta_{r,s} = \pm 1$  לכל  $s \in \phi$ .

**הוכחה:** בסימוני ההוכחה הקודמת, כאשר  $s \neq \pm r$  נמצא את פעולת המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ על } v_i \text{ ועל } u_i.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x^i y^{q-i}) = (-y)^i (x)^{q-i} = (-1)^i v_{q-i}$$

לכן

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u_i &= \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{i-1} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v_i \\ &= (-1)^i \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{i-1} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} v_{q-i} \\ &= (-1)^i \underbrace{\frac{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{q-i-1}}}_{\eta_{r,s}} \frac{\begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} q \\ q-i \end{pmatrix}} v_{q-i} \end{aligned}$$

לכן

$$n_r \cdot e_s = \eta_{r,s} \cdot e_{(q-i)r+s} = \eta_{r,s} \cdot e_{(q-2i)r+s}$$

מתקיים

$$w_r(s) = s - \frac{2(r,s)}{(r,r)} r = s - A_{r,s} r$$

השרשרת היא

$$-ir + s, \dots, s, \dots, (q-i)r + s$$

ולכן  $w_r(s) = s - (2i - q)r =$  ולכן  $A_{r,s} = p_{r,s} - q_{r,s} = 2i - q, q_{r,s} = q - i, p_{r,s} = i$  ולכן  $(q - 2i)r + s$  כאשר  $n_r \cdot e_s = \eta_{r,s} \cdot e_{w_r(s)}$

$$\eta_{r,s} = (-1)^i \frac{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{q-i-1}} = (-1)^{p_{r,s}} \frac{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{p_{r,s}-1}}{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{q_{r,s}-1}}$$

נתאר את הפעולה על  $\{e_r, h_r, e_{-r}\}$  לפי פעולת  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  על  $\{-x^2, 2xy, y^2\}$ :

$v$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$
$-x^2$	$-y^2$
$2xy$	$-2xy$
$y^2$	$-(-x^2)$

טבלה 7: הפעולה על איברי הבסיס

ולכן

$v$	$n_r \cdot v$
$e_r$	$-e_{-r} = -e_{w_r(r)}$
$h_r$	$-h_r = h_{-r} = h_{w_r(r)}$
$e_{-r}$	$-e_r = -e_{w_r(-r)}$

טבלה 8: פעולת  $h_r(\lambda)$  על איברי הבסיס

ולכן  $\eta_{r,\pm r} = -1$ .

נניח כי  $s \in \Pi$ . נכתוב  $h_s = \lambda h_r + y$  ראינו כי  $\lambda = \frac{(s,r)}{(s,s)} = \frac{1}{2} A_{s,r}$

$$\begin{aligned} n_r \cdot h_s &= \lambda n_r h_r + y = \lambda n_r h_r + h_s - \lambda h_r \\ &= h_s + \lambda (n_r h_r - h_r) \\ &= h_s - 2\lambda h_r \\ &= h_s - A_{s,r} h_r \\ &= \frac{2s}{(s,s)} - \frac{2(s,r)}{(s,s)} \frac{2r}{(r,r)} \\ &= \frac{2}{(s,s)} \underbrace{\left( s - \frac{2(s,r)}{(r,r)} r \right)}_{w_r(s)} \\ &= \frac{2w_r(s)}{(w_r(s), w_r(s))} = h_{w_r(s)} \end{aligned}$$

■

**טענה 6.12** 1.  $\eta_{r,r} = \eta_{r,-r} = -1$

2.  $\eta_{r,s} \cdot \eta_{r,w_r(s)} = (-1)^{A_{r,s}}$

3.  $\eta_{r,s} \cdot \eta_{r,-s} = 1$

**הוכחה:**

1. ראינו.

2. נניח  $r \neq \pm s \in \phi$ . נתבונן בשרשרת- $r$  דרך  $w_r(s)$ , אז אותה שרשרת כמו שרשרת- $r$  דרך  $s$ . מתקיים  $w_r(s) = s - A_{s,r}r$  ולכן  $A_{r,s} = 2i - q$  ולכן

$$\bar{s} = -ir + s = -(q-i)r + w_r(s), \dots, w_r(s), \dots, ir + w_r(s)$$

כאן  $p_{r,w_r(s)} = q - i = q_{r,s}$  ולכן  $A_{r,s}$ , אז

$$\eta_{r,s} = (-1)^{p_{r,s}} \frac{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{p_{r,s}-1}}{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{q_{r,s}-1}}$$

$$\eta_{r,w_r(s)} = (-1)^{q_{r,s}} \frac{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{q_{r,s}-1}}{\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{p_{r,s}-1}}$$

ולכן  $\eta_{r,s} \eta_{r,w_r(s)} = (-1)^{p_{r,s}+q_{r,s}} = (-1)^{p_{r,s}-q_{r,s}} = (-1)^{A_{r,s}}$

3. נשאר כתרגיל. נזכיר כי  $N_{r,jr+\bar{s}} = \underbrace{\varepsilon_j}_{\pm 1} (j+1)$  ומתקיים  $N_{r,jr+s} = \varepsilon_j (j+1)$

95. הוכחה מופיעה גם ב-Carter בעמוד

■

נסמן  $n_r(t) = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

**טענה 6.13** 1.  $n_r(1) = n_r$

2.  $n_r(-1) = n_r^{-1}$

3.  $n_r(t) = x_r(t) x_{-r}(-t^{-1}) x_r(t)$

4.  $h_r(t) = n_r(t) n_r(-1)$

**הוכחה:** בודקים את הזהויות ב- $SL_2(K)$  ואז מפעילים את  $\phi_r$ , למשל כדי להוכיח את 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

■

ולכן מקבלים את הזהות.

## 7 תת-החבורות $H$ ו- $N$

### 7.1 תת-החבורה $H$

באותם הסימונים, תהי  $H \leq G$  תת-חבורה הנוצרת ע"י

$$\{h_r(t) \mid t \in K^*, r \in \phi\}$$

ראינו כי  $t \in K^*, r, s \in \phi$  לכל  $h_r(t) \cdot e_s = t^{A_{r,s}} \cdot e_s$ .  
 נקבע  $\lambda \in K^*, r \in \phi$  ונחשוב על הערך העצמי  $\lambda^{A_{r,s}}$  כפונקציה של  $s$ .  
 נגדיר  $P = \text{span}_{\mathbb{Z}} \phi$ . זאת חבורה חילופית חופשית שבסיסה  $\Pi$ . נרחיב את ההעתקה  
 $s \mapsto \lambda^{A_{r,s}}$  לכל  $P$  באופן הבא: נניח כי  $\Pi = \{p_1, \dots, p_l\}$ , אז כל  $a \in P$  ניתן לכתובה  
 בצורה הבאה:  $a = \sum_{i=1}^l x_i p_i$  כאשר  $x_i \in \mathbb{Z}$ . נסמן

$$\chi_{r,\lambda}(a) = \lambda^{\frac{2(r,a)}{(r,r)}}$$

מתקיים  $\frac{2(r,a)}{(r,r)} = \sum_{i=1}^l x_i \frac{2(r,p_i)}{(r,r)} = \sum_{i=1}^l x_i A_{r,p_i}$  ולכן

$$\chi_{r,\lambda}(a) = \lambda^{\sum_{i=1}^l x_i A_{r,p_i}} = \prod_{i=1}^l \lambda^{x_i A_{r,p_i}}$$

ברור כי  $\chi_{r,\lambda} : P \rightarrow K^*$  מקיים  $\chi_{r,\lambda}(a+b) = \chi_{r,\lambda}(a) \chi_{r,\lambda}(b)$ , כלומר  $\chi_{r,\lambda}$  כרקטר של  
 $P$  עם ערכים ב- $K^*$ .  
 נסמן ב- $\hat{P}_K$  את חבורת הכרקטרים  $\chi : P \rightarrow K^*$  ונגדיר אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}_K$  של  
 לפי

$$\begin{aligned} h(\chi) h_s &= h_s & \forall s \in \Pi \\ h(\chi) e_s &= \chi(s) e_s & \forall s \in \phi \end{aligned}$$

(קל לבדוק כי  $h(\chi)$  הוא אכן אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}_K$ )  
 ברור כי  $h(\chi_1) h(\chi_2) = h(\chi_1 \chi_2)$ .  
 נסמן  $\hat{H}$  את חבורת כל האוטומורפיזמים של  $\mathfrak{g}_K$  מהצורה  $h(\chi)$  כאשר  $\chi \in \hat{P}_K$ . ברור  
 כי גם ההתאמה  $\chi \mapsto h(\chi)$  היא איזומורפיזם  $\hat{P}_K \cong \hat{H}$ .  
 $H \subseteq \hat{H}$  היא תת-חבורה. נוצרת ע"י כל ה- $h(\chi_{r,\lambda})$ . בעצם  $h(\chi_{r,\lambda}) = h_r(\lambda)$ .  
 נתבונן ב- $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  ויהי  $Q = \{q_1, \dots, q_l\}$  הבסיס הדואלי ל- $\{h_{p_1}, \dots, h_{p_l}\}$ , כלומר  $(h_{p_i}, q_j) = \delta_{ij}$ .  
 אלה הם המשקלים היסודיים (Fundamental weights) של  $\phi$  (של  $\mathfrak{h}$ , של  $\mathfrak{g}$ ). נכתוב  
 אז  $p_i = \sum_{j=1}^l \mu_{ij} q_j$

$$\mu_{ij} = (p_i, h_{p_j}) = \frac{2(p_i, p_j)}{(p_j, p_j)} = A_{p_j, p_i} \in \mathbb{Z}$$

לכן  $P_i = \sum_{j=1}^l A_{ji} q_j$ . נגדיר  $Q = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{q_1, \dots, q_l\}$ . לכן  $P \subseteq Q$  תת-חבורה.  
 מטריצת המעבר נתונה ע"י  $p_i = \sum_{j=1}^l A_{ji} q_j$  (זאת מטריצת Cartan).

**תרגיל**  $[Q : P] = \det(A_{ji})$   
 מחשבים ומקבלים

<b>g</b>	$A_l$	$B_l$	$C_l$	$D_l$	$G_2$	$F_4$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
$[Q : P]$	$l + 1$	2	2	4	1	1	3	2	1

טבלה 9: האינדקס  $[Q : P]$  למערכות שורשים שונות

**דוגמא**  $A_3: e_3 - e_4, e_2 - e_3, e_1 - e_2$ . האינדקס במקרה זה הוא  $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
 (המטריצה הנ"ל היא מטריצת Cartan של  $A_3$ ).

**משפט 7.1** יהי  $\chi \in \hat{P}_K$ . אז  $h(\chi) \in H$  אם ורק אם  $\chi$  הוא צמצום של  $P$  של כרקטר של  $Q$ .

**הוכחה:** ראינו כי  $H$  נוצרת ע"י כל האיברים מהצורה  $h(\chi_{r,\lambda}) = h_r(\lambda)$  כאשר  $\chi_{r,\lambda} \in \hat{P}_K$  המוגדר ע"י  $\chi_{r,\lambda}(s) = \lambda^{A_{r,s}}$ . ניתן להרחבה לכרקטר של  $Q$  באופן הבא: נניח כי  $x_i \in \mathbb{Z}, a = \sum_{i=1}^l x_i q_i, a \in Q$

$$\frac{2(r, a)}{(r, r)} = \left( \frac{2r}{(r, r)}, a \right) = (h_r, a) = \sum_{i=1}^l x_i (h_r, q_i)$$

אנו יודעים כי אפשר לכתוב  $h_r = \sum_{j=1}^l y_j h_{p_j}, y_j \in \mathbb{Z}$ , ולכן

$$(h_r, a) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l x_i y_j (q_i, h_{p_j}) = \sum_{i=1}^l x_i y_j \in \mathbb{Z}$$

$$\chi_{\lambda, r}(a) = \lambda^{\sum_{i=1}^l x_i y_i} = \chi^{\frac{2(r, a)}{(r, r)}} = \chi^{(h_r, a)}$$

בכיוון ההפוך: נניח כי  $\chi \in \hat{Q}_K$ . נסמן  $\chi(q_i) = \lambda_i$ . אז

$$\chi_{p_i, \lambda_i}(q_j) = \lambda_i^{(h_{p_i}, q_j)} = \lambda_i^{\delta_{ij}} = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

אם  $x_i \in \mathbb{Z}$  לכל  $1 \leq i \leq l$  אז מתקיים

$$\begin{aligned} \chi \left( \sum_{i=1}^l x_i q_i \right) &= \prod_{i=1}^l \chi(q_i)^{x_i} = \prod_{i=1}^l \lambda_i^{x_i} = \prod_{i=1}^l \chi_{p_i, \lambda_i}(x_i q_i) \\ &= \prod_{i=1}^l \chi_{p_i, \lambda_i} \left( \sum_{j=1}^l x_j q_j \right) \end{aligned}$$

המעבר האחרון נכון כי  $\chi_{p_i, \lambda_i}$  מעביר חיבור לכפל, וטריוואלי על  $q_j$  ל  $j \neq i$ .  
 לכן  $\chi = \prod_{i=1}^l \chi_{p_i, \lambda_i}$  וכנ"ל כשנצמצם  $p$  ואז  $h(\chi|_P) = \prod_{i=1}^l h(\chi_{p_i, \lambda_i}) = \prod_{i=1}^l h_{p_i}(\lambda_i) \in H$   
 ■

למה 7.2 מנרמלת את  $X_{\pm r}$  לכל  $r \in \phi$ .

הוכחה: יהי  $\chi \in \hat{P}_K$  ונחשב  $h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1}$ . נפעיל על בסיס Chevalley:

$$\begin{aligned} h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} h_s &= h(\chi) x_r(t) h_s & s \in \Pi \\ &= h(\chi) (h_s - A_{s,r} t e_r) \\ &= h_s - A_{s,r} t \chi(r) e_r \\ &= x_r(\chi(r) t) \end{aligned}$$

$$h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} e_s = \chi(-s) h(\chi) x_r(t) e_s$$

נזכר כי

$$x_r(t) e_s = \begin{cases} e_r & s = r \\ e_{-r} + t h_r - t^2 e_r & s = -r \\ \sum_{i=0}^q M_{r,s,i} t^i e_{ir+s} & s \neq \pm r \end{cases}$$

ולכן

$$h(\chi) x_r(t) e_s = \begin{cases} \chi(r) e_r & s = r \\ \chi(-r) e_{-r} + t h_r - \chi(r) t^2 e_r & s = -r \\ \sum_{i=0}^q M_{r,s,i} t^i \chi(ir+s) e_{ir+s} & s \neq \pm r \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{aligned} h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} e_s &= \begin{cases} e_r & s = r \\ e_{-r} + t h_r - (\chi(r) t)^2 e_r & s = -r \\ \sum_{i=0}^q M_{r,s,i} (t \chi(r))^i e_{ir+s} & s \neq \pm r \end{cases} \\ &= x_r(\chi(r) t) e_s \end{aligned}$$

■ הראינו  $h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r) t) \in X_r$

מסקנה 7.3 מנרמלת את  $U$  ואת  $V$  ולכן  $UH, VH \subseteq G$  הן תת-חבורות.

למה 7.4  $UH \cap V = \{1\}$

הוכחה: נניח כי  $b \in UH \cap V$  ונראה כי  $b$  פועל זהותית על בסיס Chevalley. כיוון ש  $b \in V$ , כיוון ש  $b \in UH$  נקבל כי  $b \cdot h_s = h_s + x$  ו  $x \in \sum_{r \in \phi^+} \mathfrak{g}_r$ . מכאן,  $b \cdot h_s = h_s$ ,  $x = 0$ . כיוון ש  $b \in V$ ,  $b \cdot e_s = e_s + x$ , כאשר  $x \in \sum_{r < s} \mathfrak{g}_r$  (משפט 5.11 סעיף 3 ע"י חלוקה למקרים כמו בהוכחה הקודמת). באופן דומה, כיוון ש  $b \in UH$ , נקבל כי  $b \cdot e_s = \alpha e_s + y$ , כאשר  $y \in \sum_{r > s} \mathfrak{g}_r$  ועכשיו אפשר להסיק  $\alpha = 1$ ,  $y = 0$  ולכן  $b \cdot e_s = e_s$  לכל  $s \in \phi$ . ■

באותו אופן מוכיחים

למה 7.5  $VH \cap U = \{1\}$

מסקנה 7.6  $UH \cap VH = H$

## 7.2 תת-החבורה $N$

$$r \in \phi, n_r = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ סימנו}$$

**הגדרה 7.7** נסמן ב- $N$  את התת-חבורה הנוצרת ע"י  $H$  וע"י  $\{n_r \mid r \in \phi\}$ .

**למה 7.8** לכל  $r, s \in \phi$  מתקיים

$$n_r x_s(t) n_r^{-1} = x_{w_r(s)}(\eta_{r,s} \cdot t)$$

**הוכחה:** נוכיח מעל  $K = \mathbb{C}$ .  $x_s(t) = \exp(t \cdot \text{ad}_{e_s})$ .  $n_r x_s(t) n_r^{-1} = \exp(t \cdot \text{ad}_{n_r e_s})$  הוא אוטומורפיזם של  $\mathfrak{g}$ . ראינו לכן (למה 5.3, טענה 6.11):

$$n_r x_s(t) n_r^{-1} = \exp(t \cdot \text{ad}_{n_r e_s}) = \exp(t \cdot \text{ad}_{\eta_{r,s} \cdot e_{w_r(s)}}) = x_{w_r(s)}(\eta_{r,s} \cdot t)$$

■ ואז זה נכון גם מעל  $K$ .

**מסקנה 7.9**  $n_r X_s n_r^{-1} = X_{w_r(s)}$  לכל  $r, s \in \phi$ .

**משפט 7.10** יש הומומורפיזם  $\varphi: N \rightarrow W_\phi$ , גרעינו הוא  $H$ , כך שלכל  $r \in \phi$ ,  $\varphi(n_r) = w_r$ . בפרט  $H \triangleleft N$  וכן  $N/H \cong W$  כך ש- $n_r H \xrightarrow{\sim} w_r$ . יתר על כן, נניח כי  $h(\chi) \in H$ , אז לכל  $n \in N$ ,  $nh(\chi)n^{-1} = h(\chi^n)$ , כאשר  $\chi^n$  הוא הכרקטר כך ש- $\chi^n(s) = \chi(w^{-1}(s))$  כאשר  $s \in \phi$ .  $\varphi(n) = w$ .

**הוכחה:** איבר כללי ב- $N$  הוא מהצורה  $h_1 n_{r_1} h_2 n_{r_2} \cdots h_k n_{r_k} h_{k+1}$  כאשר  $h_i \in H$  ו- $r_i \in \phi$ . נגדיר העתקה  $\varphi: N \rightarrow W$  לפי

$$\varphi(h_1 n_{r_1} \cdots h_k n_{r_k} h_{k+1}) = w_{r_1} \cdots w_{r_k}$$

ההגדרה טובה: נניח כי

$$h_1 n_{r_1} \cdots h_k n_{r_k} h_{k+1} = h'_1 n_{r'_1} \cdots h'_{k'} n_{r'_{k'}} h_{k'+1}$$

נפעיל על  $e_s$  ונקבל

$$\underbrace{\alpha(h_1, \dots, h_{k+1}; r_1, \dots, r_k)}_{\in K^*} e_{w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_k}(s)} = \underbrace{\alpha(h'_1, \dots, h'_{k'+1}; r'_1, \dots, r'_{k'})}_{\in K^*} e_{w_{r'_1} w_{r'_2} \dots w_{r'_{k'}}(s)}$$

ולכן  $w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_k}(s) = w_{r'_1} w_{r'_2} \dots w_{r'_{k'}}(s)$  לכל  $s \in \phi$  ולכן  $w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_k} = w_{r'_1} w_{r'_2} \dots w_{r'_{k'}}$ . עכשיו ברור כי  $\varphi$  הומומורפיזם על שגרעינו מכיל את  $H$ . נראה כי  $H \triangleleft N$ . ראינו כי

$n \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ ,  $n \in N$  מכאן נסיק כי לכל  $n \in N$ ,  $n \cdot h_s = h_{w_r(s)}$ . יהי  $n \in N$ ,  $h(\chi) \in H$ , אז  $n^{-1} \cdot h_s \in \mathfrak{h}$  ולכן  $h(\chi)(n^{-1} h_s) = n^{-1} h_s$  מכאן  $nh(\chi)n^{-1} h_s = h_s$  ולכן  $nh(\chi)n^{-1} e_s = \chi(w^{-1}(s)) e_s$ . נראה כי  $\varphi(n) = w$  כאשר  $s \in \phi$ . מאחר ו

$\varphi(n) = w$  וכאשר  $\eta \in K^*$  כאשר  $n^{-1} \cdot e_s = \eta \cdot e_{w^{-1}(s)}$  נסיק כי  $n_r \cdot e_s = \eta_{r,s} e_{w_r(s)}$  מכאן

$$\begin{aligned} h(\chi)(n^{-1} \cdot e_s) &= \eta \chi(w^{-1}(s)) e_{w^{-1}(s)} \\ nh(\chi)n^{-1} \cdot e_s &= \eta \chi(w^{-1}(s)) \underbrace{ne_{w^{-1}(s)}}_{\eta^{-1}e_s} = \chi(w^{-1}(s)) e_s = \chi^n(s) e_s \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו  $nh(\chi)n^{-1} = h(\chi^n)$ . נקבל הומומורפיזם על  $N/H \rightarrow W$  ע"י  $\bar{\varphi} : N/H \rightarrow W$ . נראה כי  $\bar{\varphi}$  איזומורפיזם. נזכר בנוסחאות מטענה 6.13. מנוסחאות אלה

$$n_s = x_s(1) x_s(-1) x_s(1) \quad s \in \phi$$

נצמיד ב  $n_r$ :

$$\begin{aligned} n_r n_s n_r^{-1} &= (n_r x_s(1) n_r^{-1}) (n_r x_s(-1) n_r^{-1}) (n_r x_s(1) n_r^{-1}) \\ &= x_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) x_{-w_r(s)}(-\eta_{r,-s}) x_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) \\ &= n_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) \\ &\underbrace{\eta_{r,s} \cdot \eta_{r,-s}}_{=1} \\ &= h_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) n_{w_r(s)}(-1)^{-1} \\ &= h_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) n_{w_r(s)} \end{aligned}$$

ניקח מודולו  $H$ :

$$\begin{aligned} (Hn_r)(Hn_s)(Hn_r^{-1}) &= n_{w_r(s)} \\ \bar{\varphi}(n_r) \bar{\varphi}(n_s) \bar{\varphi}(n_r)^{-1} &= \bar{\varphi}(n_{w_r(s)}) \end{aligned}$$

כיוון ש  $n_r^2 = h_r(-1) \in H$  כי  $n_r = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $h_r(-1) = \phi_r \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , אז  $\bar{\varphi}(n_r^2) = 1$

הוכחנו (משפט 2.28) כי  $W$  נוצרת כתבורה אבסטרקטית ע"י  $w_r$  עם היחסים

$$\begin{cases} w_r w_s w_r^{-1} = w_{w_r(s)} \\ w_r^2 = 1 \end{cases}$$

ולכן יש הומומורפיזם  $\xi : W \rightarrow N/H$  כך ש  $\xi(w_r) = Hn_r$  לכל  $r \in \phi$  מכאן,  $\xi$  הוא הפכי של  $\bar{\varphi}$  ובפרט  $\bar{\varphi}$  איזומורפיזם. ■

**מסקנה 7.11**  $N \cap \hat{H} = H$

**הוכחה:** ההכלה  $\supseteq$  ברורה. נניח כי  $n \in N \cap \hat{H}$ . לכל  $s \in \phi$  כיוון ש  $n = h(\chi) \in \hat{H}$  נקבל  $n \cdot \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_s$  כיוון ש  $n \in N$ ,  $n \cdot \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_{w(s)}$  כאשר  $n \cdot \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_s$  מכאן,  $w(s) = s$  מכאן,  $n \in \ker \varphi = H$  ולכן  $s \in \phi$  לכל  $s \in \phi$ . ■

**מסקנה 7.12** 1.  $U \cap N = \{1\}$



$$UH \cap N = H \quad 2.$$

הוכחה:

1. נניח כי  $n \in U \cap N$  ויהי  $s \in \phi$ . כיוון ש  $n \in N$ ,  $n \cdot e_s = \eta e_{w(s)}$ , כאשר  $w = \varphi(n)$ ,  $\eta \in K^*$ . כיוון ש  $n \in U$ , נקבל  $n \cdot e_s = e_s + x$ , כאשר  $x \in \mathfrak{h} + \sum_{r > s} \mathfrak{g}_r$ . מכאן  $e_s + x = \eta e_{w(s)}$  ולכן  $x = 0$ ,  $\eta = 1$ ,  $w(s) = s$  ולכן  $w = \text{id}$ .

2.  $UH \cap N = (U \cap N)H = H$  והמעבר מתבצע מכך ש  $N$  מכילה את  $H$  (אפילו כתת־חבורה נורמלית).

■

## 8 פירוק Bruhat

### 8.1 הלמה של Bruhat

יהי  $r \in \Pi$ . נגדיר להיות תת־חבורה של  $U$  הנוצרת ע"י  $\{X_s \mid r \neq s \in \phi^+\}$ . מתקיים

$$U_r = \prod_{r \neq s \in \phi^+} X_s$$

(בדומה להוכחה של משפט 5.11 סעיף 3)

למה 8.1  $X_{-r}, X_r$  מנרמלות את  $U_r$ .

הוכחה: מנוסחת הקומוטטור של Chevalley,  $[U_r, X_r] \subseteq U_r$ . בנוגע ל  $[X_{-r}, U_r]$  ל  $X_{-r}$   $x_{-r}(t) \in X_{-r}$ ,  $x_s(u) \in U_r$  השורשים המופיעים בנוסחת הקומוטטור הם  $-ir + js$ ,  $i, j \geq 1$ . אם זהו שורש, אז הוא חיובי:  $r \neq s \in \phi^+$ , נרשום  $s = \sum_{i=1}^l \alpha_i p_i$  (כאשר  $\Pi = \{p_1, \dots, p_l\}$ ), אז יש  $p_{i_0} \neq r$  עם  $\alpha_{i_0} > 0$ , ואז המקדם של  $i_0$  ב  $-ir + js$  הוא  $j\alpha_{i_0} > 0$  ולכן שאר המקדמים  $0 \leq$ , וכמובן  $-ir + js \neq r$ . נסיק כי  $[X_{-r}, U_r] \subseteq U_r$ .

■

מסקנה 8.2  $\langle X_r, X_{-r} \rangle$  חלקית לנורמליזטור של  $U_r$ , ובפרט  $n_r$  מנרמל את  $U_r$ .

מסקנה 8.3 1.  $X_r U_r = U_r X_r = U$

2.  $U_r X_{-r} = X_{-r} U_r$  תת־חבורה.

הוכחה:

1.  $U_r X_r$  היא תת־חבורה של  $U$ , אשר מכילה את  $\bigcup_{s \in \phi^+} X_s$ . קבוצה זאת יוצרת את  $U$  ולכן  $U_r X_r = U$ .

2. כי  $X_{-r}$  מנרמלת את  $U_r$ .

■

הגדרה 8.4  $B = UH$  זאת תת־חבורת בורל של  $G$  (מסקנה 7.3).

**טענה 8.5** יהי  $\Pi$  איז  $B \cup Bn_rB$  היא תת-חבורה.

**הוכחה:** כיוון ש  $n_r^2 \in H \subseteq B$  הסגירות ביחס ללקיחת הופכי היא ברורה:

$$(Bn_rB)^{-1} = Bn_r^{-1}B = Bn_rB$$

**סגירות ביחס לכפל** נותר לבדוק עבור איברים מהצורה  $(Bn_rB) \cdot \left( \underbrace{Bn_rB}_{Bn_r^{-1}B} \right)$  לכן די להראות כי  $B \cup Bn_rB \supseteq n_rBn_r^{-1}$ .

$$\begin{aligned} n_rBn_r^{-1} &= n_rUHn_r^{-1} = n_rX_rU_rHn_r^{-1} \\ &= \left( \underbrace{n_rX_rn_r^{-1}}_{X_{w_r(r)}=X_{-r}} \right) \left( \underbrace{n_rU_rn_r^{-1}}_{U_r} \right) \left( \underbrace{n_rHn_r^{-1}}_H \right) \\ &= X_{-r}U_rH \subseteq X_{-r}B \end{aligned}$$

לכן די להראות כי  $X_{-r} \subseteq B \cup Bn_rB$ .

יהי  $t \in K$ , נתבונן ב  $x_{-r}(t)$ . אם  $t = 0$  אז  $x_{-r}(t) = \text{id} \in B$  ונניח כי  $t \neq 0$ . נשתמש בזהות  $x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$  ונקבל

$$x_{-r}(t) = x_r(t^{-1}) \underbrace{n_r(-t^{-1})}_{h_r(-t^{-1})n_r} x_r(t^{-1}) \in Bn_rB$$

■

**משפט 8.6** יהי  $\Pi$  איז  $w$  ש  $n \in N$  יהי  $\varphi(n) = w$  אז

$$(BnB)(Bn_rB) \subseteq BnB \cup Bnn_rB$$

**בפירוט:** אם  $w(r) \in \phi^+$  אז  $(BnB)(Bn_rB) = Bnn_rB$  אם  $w(r) \in \phi^-$  אז  $(BnB)(Bn_rB) = BnB \cup Bnn_rB$ .

**הוכחה:** נניח כי  $w(r) \in \phi^+$ .

$$\begin{aligned} BnB \cdot Bn_rB &= BnBn_rB = BnUHn_rB \\ &= BnX_rU_rHn_rB \\ &= B(nX_rn^{-1})nU_rHn_rB \\ &= B \left( \underbrace{nX_rn^{-1}}_{X_{w(r)} \subseteq B} \right) nn_r \left( \underbrace{n_r^{-1}U_rn_r}_{U_r} \right) \left( \underbrace{n_r^{-1}Hn_r}_H \right) B \\ &= Bnn_rB \end{aligned}$$

נניח כי  $w(r) \in \phi^-$ . נגדיר  $w' = w \cdot w_r$ . אז  $w'(r) = w(-r) = -w(r) \in \phi^+$ .  
 נניח כי  $w' = w'$ , אז  $\varphi(n') = \varphi(nn_r)$  וכן  $\varphi(n'n_r) = \varphi(n)$ .  
 $Bn'B = Bnn_rB$  ובנוסף  $Bn'n_rB = BnB \iff n'n_rH = nH$ .  
 מהחלק הראשון, כיוון ש  $w'(r) \in \phi^+$ ,  $Bn'B \cdot Bn_rB = Bn'n_rB = BnB$ . כעת

$$\begin{aligned} (BnB)(Bn_rB) &= (Bn'n_rB)(Bn_rB) \\ &= (Bn'B \cdot Bn_rB)(Bn_rB) \\ &= (Bn'B)(Bn_rB \cdot Bn_rB) \end{aligned}$$

מהטענה הקודמת  $Bn_rB \cdot Bn_rB \subseteq B \cup Bn_rB$  ולכן

$$\begin{aligned} (BnB)(Bn_rB) &\subseteq (Bn'B)(B \cup Bn_rB) \\ &= Bn'B \cup (Bn'B \cdot Bn_rB) \\ &= Bnn_rB \cup BnB \end{aligned}$$

זה מראה ש  $(BnB)(Bn_rB) \subseteq Bnn_rB \cup BnB$ .  
 נעבור להראות את ההכלה ההפוכה. כיוון ש  $nn_r \in BnB \cdot Bn_rB$ , נקבל  $Bnn_rB \subseteq BnB \cdot Bn_rB$ .  
 לכן די להראות כי  $BnB \subseteq (BnB)(Bn_rB)$  נשים לב כי

$$\begin{aligned} nx_r(1)n_r &= nn_r(n_r^{-1}x_r(1)n_r) \\ &= nn_r x_{w_r(r)} \left( \underbrace{\eta_{r,-r}}_{-1} \right) \\ &= nn_r x_{-r}(-1) \\ &= nn_r \underbrace{x_r(-1)}_{\in B} n_r x_r(-1) \in Bnn_rBn_rB \end{aligned}$$

כעת

$$\begin{aligned} Bnn_rBn_rB &= (Bnn_rB)(Bn_rB) = Bn'Bn_rB \\ &= Bn'n_rB \\ &= BnB \end{aligned}$$

■ ולכן  $(BnB)(Bn_rB) \supseteq Bnx_r(1)n_rB = BnB$ . כנדרש.  
 ע"י לקיחת הופכי נקבל:

### מסקנה 8.7

$$(Bn_rB) \cdot (BnB) = \begin{cases} Bn_rnB & w^{-1}(r) \in \phi^+ \\ Bn_rnB \cup BnB & w^{-1}(r) \in \phi^- \end{cases}$$

## 8.2 זוגות $(B, N)$ ( $(B, N)$ Pairs)

**הגדרה 8.8** תהי  $G$  חבורה ותהיינה  $B, N$  תת-חבורות. נאמר שחבורות אלה הן זוג  $(B, N)$  עבור  $G$  אם:

1.  $G$  נוצרת ע"י  $B \cup N$ .
2.  $B \cap N \triangleleft N$ .
3. נסמן  $W = N / B \cap N$ . אז  $W$  נוצרת ע"י קבוצת איברים  $\{w_i\}_{i \in I}$ , כולם מסדר 2.
4. נניח כי  $w_i = n_i + B \cap N$ . אז  $(Bn_i B) (Bn B) \subseteq Bn_i n B \cup Bn B$  לכל  $n \in N$ .
5.  $n_i B n_i \neq B$  לכל  $i \in I$ .

**טענה 8.9** כאשר  $G$  חבורת Chevalley, אז בסימונים הנ"ל,  $G$  היא חבורה עם זוג  $(B, N)$ .

**הוכחה:** ראינו כי  $B \cap N = H \triangleleft N$  (מסקנה 7.12) - זה 2. ראינו כי  $N / B \cap N = N / H \cong W$  (משפט 7.10) וראינו כי  $W$  נוצרת ע"י  $\{w_r \mid r \in \Pi\}$  - זה 3.

4 זאת מסקנה 8.7.

5: נניח כי  $r \in \Pi$ . אז  $n_r X_r n_r^{-1} = X_{-r} \not\subseteq B$  כעת

$$n_r B n_r = n_r B n_r^{-1} \supseteq n_r X_r n_r^{-1} = X_{-r}$$

ולכן  $n_r B n_r \neq B$

1: יהי  $s \in \phi$ . יש  $r \in \Pi$  ו  $w \in W$  כך ש  $s = w(r)$ . נניח כי  $w(n) = \varphi(n)$  ואז

■  $n X_r n^{-1} = X_s$  מכאן  $X_s \subseteq \langle N \cup B \rangle \iff s \in \phi$  לכל שורש  $s \in \phi$ .

**טענה 8.10** תהי  $G$  חבורה עם זוג  $(B, N)$

$$1. G = BNB$$

2. תהי  $J \subseteq I$  תת-קבוצה. תהי  $W_J \subseteq W$  תת-החבורה של  $W$  הנוצרת ע"י  $\{w_i\}_{i \in J}$ .

נסמן  $N_J = \varphi^{-1}(W_J)$ , כאשר  $N \rightarrow N / B \cap N = W$   $\varphi$ : הומומורפיזם המנה. אז  $P_J = BN_J B$  היא תת-חבורה.

**הוכחה:** נתחיל ב2. ברור כי  $P_J$  סגורה ביחס ללקיחת הופכי.

**סגירות ביחס לכפל** נשים לב כי מ4 ל  $n' \in N_J$  מתקיים

$$n' B N_J B = n' \bigcup_{n \in \varphi^{-1}(W_J)} B n B \subseteq \bigcup_{n \in \varphi^{-1}(W_J)} B n' n B \cup B n B = B N_J B$$

נניח כי  $j_1, \dots, j_k \in J$  אז

$$\begin{aligned} n_{j_k} B N_J B &\subseteq B N_J B \\ n_{j_{k-1}} n_{j_k} B N_J B &\subseteq n_{j_{k-1}} B N_J B \subseteq B N_J B \\ &\vdots \\ n_{j_1} n_{j_k} B N_J B &\subseteq n_{j_1} B N_J B \subseteq B N_J B \end{aligned}$$

(כאשר  $(\varphi(n_{j_i}) = w_{j_i})$ . מזה נובע  $(BN_J B)(BN_J B) = BN_J B$ . כיוון שהיא 1 נובע מכך שנקח  $J = I$  ואז  $N_J = N$  ולכן  $BNB \subseteq G$  תת־חבורה. כיוון שהיא מכילה את  $B \cup N$ , זאת כל  $G$ . ■

**משפט 8.11** תהי  $G$  חבורה בעלת זוג  $(B, N)$ . אז  $BnB = Bn'B$  כאשר  $n, n' \in N$  אם ורק אם  $\varphi(n) = \varphi(n')$  (כאשר  $\varphi$  הוא ההומומורפיזם על  $N \rightarrow W$  שגרעינו  $B \cap N$ ).

**הוכחה:** נניח כי  $\varphi(n) = \varphi(n')$ , אז  $n \in (B \cap N)n'$  ובפרט נקבל  $Bn'B = BnB$ . נעבור להוכחת הכיוון ההפוך. כזכור,  $W$  נוצרת ע"י קבוצה של איברים מסדר 2,  $\{w_i\}_{i \in I}$ . תהי  $l$  פונקציית האורך על  $W$  לפי יוצרים אלה. נסמן  $w = \varphi(n)$ ,  $w' = \varphi(n')$ . נניח כי  $BnB = Bn'B$  ונניח כי  $l(w) \leq l(w')$ . נוכיח את הטענה באינדוקציה על  $l(w)$ . אם  $l(w) = 0$ , אז  $w = 1$ , כלומר  $n \in B \cap N$  ואז  $BnB = B$  ולכן  $Bn'B = B$  ואז  $n' \in B \cap N$  ולכן  $w' = 1$ .

נניח כי  $l(w) \geq 1$ . נכתוב  $w = w_i w''$  כאשר  $w = w_i w''$  ונכתוב  $w' = w'_i w'''$  כאשר  $w' = w'_i w'''$ . נניח כי  $n_i \in N$ ,  $n'_i \in N$  כך ש  $\varphi(n_i) = w_i$ ,  $\varphi(n'_i) = w'_i$  ואז  $\varphi(n_i n''_i) = \varphi(n)$  ולכן

$$Bn_i n''_i B = BnB = Bn'_i B$$

מכאן

$$n_i n''_i B \subseteq Bn'_i B$$

מאחר ו  $n_i^{-1} \in n_i(B \cap N) \subseteq n_i B$ ,  $n_i^2 \in B \cap N$

$$n''_i B \subseteq n_i Bn'_i B \subseteq (Bn_i B)(Bn'_i B)$$

מסעיף 4 בהגדרת זוג  $(B, N)$ , נקבל  $Bn''_i B \subseteq Bn_i n'_i B \cup Bn'_i B$ .

לכן  $Bn''_i B = Bn'_i B$  או  $Bn''_i B = Bn_i n'_i B$ .

במקרה הראשון בו  $Bn''_i B = Bn'_i B$ , נקבל  $l(w'') - 1 \leq l(w'_i) - 1 < l(w') - 1$ . באופן כללי מתקיים  $l(w'') - 1 \leq l(w'_i w''')$  ולכן במקרה זה  $l(w'') \leq l(w_i w')$ . מאינדוקציה נקבל  $w'' = w'$  ולכן  $w = w_i w' = w_i w'$ .

במקרה השני בו  $Bn''_i B = Bn_i n'_i B$ , נקבל באינדוקציה כי  $w'' = w'$  אבל אז

$$l(w'') = l(w'') = l(w) - 1 < l(w')$$

■

סתירה.

**מסקנה 8.12** הקבוצה  $B \setminus G / B$  נמצאת בהתאמה חד־חד־ערכית ועל עם  $W$ .

**טענה 8.13** בסימונים הקודמים, נניח כי  $l(w_i w) \geq l(w)$  אז  $Bn_i B \cdot BnB = Bn_i nB$  (כאשר  $\varphi(n_i) = w_i$ ,  $\varphi(n) = w$ )

**הוכחה:** באינדוקציה על  $l(w)$ . אם  $l(w) = 0$  אז  $w = 1$  ואז  $BnB = B$  וכן  $Bn_i nB = Bn_i B$ .

נניח כי  $l(w) \geq 1$ . נכתוב  $w = w_j \cdot w'$  כאשר  $j \in I$  וכן  $l(w') = l(w) - 1$ . נניח כי  $n'_j \in N$ ,  $n_j \in N$  כך ש  $\varphi(n'_j) = w_j$ ,  $\varphi(n_j) = w'$ . כמו קודם,  $BnB = Bn'_j n_j B$ .

ההוכחה תהיה בדרך השלילה. כזכור, מ4 בהגדרת זוג  $(B, N)$ , מתקיים

$$Bn_iB \cdot BnB \subseteq Bn_inB \cup BnB$$

נניח בשלילה כי  $Bn_iB \cdot BnB$  חותכת את  $BnB$ . זה קורה אם ורק אם

$$(n_iBn) \cap (BnB) \neq \emptyset$$

כיוון ש  $n = b_1n'b_2$ , זה שקול לכך ש

$$(n_iBn'n_j) \cap (BnB) \neq \emptyset$$

$$\iff$$

$$(n_iBn') \cap (BnBn_j) \neq \emptyset$$

באינדוקציה  $Bn_iB \cdot Bn'B = Bn_in'B$  כי

$$l(w') = l(w) - 1 \leq l(w_iw) - 1 = l(w_iw'w_j) - 1 \leq l(w_iw')$$

לכן מתקיימת ההנחה  $l(w') \leq l(w_iw')$  ו  $l(w') < l(w)$  ולכן

$$n_iBn' \subseteq Bn_in'B$$

מכאן  $(Bn_in'B) \cap (BnB \cdot Bn_jB) \neq \emptyset$ . מתקיים  $BnB \cdot Bn_jB \subseteq Bnn_jB \cup BnB$  מסעיף 4 בהגדרת זוג  $(B, N)$  ע"י לקיחת הופכי. לכן

$$(Bn_in'B) \cap (Bnn_jB \cup BnB) \neq \emptyset$$

נסיק כי  $Bn_in'B = BnB$  או  $Bn_in'B = Bnn_jB$ . ממשפט 8.11 נסיק  $w_iw' = ww_j$  במקרה הראשון  $w_iw' = w$  או  $w' = w_iw$  במקרה השני  $w_i = 1 \iff w_iw' = w'$  סתירה. במקרה השני ואז

$$l(w) - 1 = l(w') = l(w_iw) \geq l(w)$$

■

סתירה.

**טענה 8.14** נניח כי  $l(w_iw) \leq l(w)$  אז  $Bn_iB \cdot BnB$  חותך את  $BnB$ .

**הוכחה:** מסעיף 4 בהגדרת זוג  $(B, N)$

$$n_iBn_i \subseteq B \cup Bn_iB$$

מסעיף 5 בהגדרה,  $n_iBn_i \neq B$  ולכן  $(n_iBn_i) \cap (Bn_iB) \neq \emptyset$ . נכפיל ב  $n_i$ :  $(n_iB) \cap (Bn_iBn_i) \neq \emptyset$  ולכן  $(n_iBn) \cap (Bn_iBn_i) \neq \emptyset$ .

נשים לב כי  $l(w_iw_iw) = l(w) \geq l(w_iw)$  ולכן מטענה 8.13,  $Bn_iB \cdot Bn_iB = BnB$  ולכן  $Bn_iBn_i \subseteq BnB$  ומכאן  $(n_iBn) \cap (BnB) \neq \emptyset$ . לכן  $Bn_iB \cdot BnB = BnB$  חותך את  $BnB$ . ■

**הערה 8.15** אם  $l(w_i w) \leq l(w)$  אז  $Bn_i B \cdot BnB = Bn_i nB \cup BnB$  ההכלה  $\subseteq$  היא סעיף 4 בהגדרת זוג  $(B, N)$ . ההכלה  $Bn_i B \cdot BnB \supseteq Bn_i nB$  תמיד נכונה וההכלה  $Bn_i B \cdot BnB \supseteq BnB$  נובעת מהטענה האחרונה.

**מסקנה 8.16** לכל  $w \in W, i \in I, l(w_i w) \neq l(w)$

**הוכחה:** אחרת שתי הטענות האחרונות נכונות, ונקבל  $Bn_i nB = Bn_i B \cdot BnB = BnB \subseteq Bn_i nB$  מכאן  $BnB \subseteq Bn_i nB$  ולכן  $BnB = Bn_i nB$ . ממשפט 8.11 נקבל  $w = w_i w$  ואז  $w_i = 1$  סתירה. ■

**מסקנה 8.17** נניח כי  $l(w_i w) < l(w)$ , אז  $n_i \in B(nBn^{-1})B$

**הוכחה:** ראינו כי  $(n_i Bn) \cap (BnB) \neq \emptyset$ . מכאן  $n_i B \cap BnBn^{-1} \neq \emptyset$  ומכאן  $n_i \in B(nBn^{-1})B$  ■

### 8.3 תת-חבורות פרבוליות

תהי  $J \subseteq I$  (כאשר  $\{w_i\}_{i \in I}$  קבוצת יוצרים של  $W$ ). תהי  $W_J \subseteq W$  תת-החבורה הנוצרת ע"י  $\{w_j\}_{j \in J}$ . סימנו  $\varphi^{-1}(W_J) = N$ . הגדרנו  $P_J = BN_J B$  וראינו שזאת תת-חבורה (טענה 8.10 סעיף 2).

**טענה 8.18** יהי  $n \in N$  ונסמן  $\varphi(n) = w$ . נכתוב  $w = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$  כאשר  $l(w) = k$ . יהיו  $n_{i_1}, \dots, n_{i_k}$  מקורות תחת  $\varphi$  של  $w_{i_1}, \dots, w_{i_k}$ , ונסמן  $J = \{i_1, \dots, i_k\}$ . אז שלוש תת-החבורות הבאות שוות:

$$\langle B, nBn^{-1} \rangle = \langle B, n \rangle = P_J$$

**הוכחה:** ההכלה  $\langle B, nBn^{-1} \rangle \subseteq \langle B, n \rangle$  ברורה. ההכלה  $P_J \subseteq \langle B, n \rangle$  נכונה כי  $n = hn_{i_1} \cdots n_{i_k}$  כאשר  $h \in B \cap N$  ואז  $n \in P_J$ . מתקיים  $l(w_{i_1} w) = l(w) - 1 < l(w)$  ולכן ממסקנה 8.17,

$$n_{i_1} \in BnBn^{-1}B \subseteq \langle B, nBn^{-1} \rangle$$

מתקיים  $l(w_{i_2}(w_{i_1} w)) < l(w_{i_1} w)$  ולכן מאותה מסקנה  $n_{i_2} \in \langle B, n_{i_1} nBn^{-1} n_{i_1}^{-1} \rangle \subseteq \langle B, nBn^{-1} \rangle$  וכו'. בסה"כ נקבל כי  $n_{i_1}, \dots, n_{i_k} \in \langle B, nBn^{-1} \rangle$ . כיוון ש  $P_J$  נוצרת ע"י  $B$  ו  $\{n_{i_k}, \dots, n_{i_1}\}$  נקבל כי  $P_J \subseteq \langle B, nBn^{-1} \rangle$ . ■

**משפט 8.19** קבוצת כל התת-חבורות הפרבוליות של  $G$  היא בדיוק קבוצת כל התת-חבורות של  $G$  אשר מכילות את  $B$ .

**הוכחה:** תהי  $R \subseteq G$  תת-חבורה המכילה את  $B$ . נכתוב  $R = \bigcup_{x \in X_R} BxB$ . כמובן, אפשר לקחת את הנציגים מתוך  $N$ ; נניח  $X_R \subseteq N$ . לכן  $R$  נוצרת ע"י  $B \cup X_R$ .

$$R = \langle B, X_R \rangle = \left\langle \bigcup_{n \in X_R} \langle B, n \rangle \right\rangle = \left\langle \bigcup_{n \in X_R} P_{J_n} \right\rangle$$

כאשר, כשנכתוב  $\varphi(n) = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ,  $k = l(\varphi(n))$ , אז  $J_n = \{i_1, \dots, i_k\}$ . לכן  $R = P_{\bigcup_{n \in X_R} J_n}$  וזאת תת-חבורה פרבולית. ■

**משפט 8.20**  $P_{J_1} \neq P_{J_2}$  לתת-קבוצות  $J_1, J_2 \subseteq I$ , אם ורק אם  $J_1 \neq J_2$ . בנוסף, מתקיים  $P_{J_1 \cap J_2} = P_{J_1} \cap P_{J_2}$ .

**הוכחה:** ראשית נראה כי קבוצת היוצרים  $\{w_i\}_{i \in I}$  היא מינימלית (אנחנו מניחים, כמובן, כי  $w_i \neq w_j, i \neq j$ ).

נניח בשלילה, כי יש  $j \in I$  כך ש  $w_j \in \langle w_i \mid i \neq j \rangle$ . נכתוב  $w_j = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ . ייצוג מינימלי כאשר  $i_1, \dots, i_k \neq j$ . נשתמש בטענה 8.18 ל  $\varphi(n_j) = w_j$  וקבוצת היוצרים  $\{w_i\}_{j \neq i \in I}$ . ראינו ל  $J = \{i_1, \dots, i_k\}$  כי  $P_J = \langle B, n \rangle = \langle B, n_{i_1}, \dots, n_{i_k} \rangle$  כאשר  $\varphi(n_{i_k}) = w_{i_k}, \dots, \varphi(n_{i_1}) = w_{i_1}$ .

לפי אותה טענה, כאשר נסתכל על הייצוג המינימלי של  $w_j = w_j$  (הפעם לוקחים בתור היוצרים את כל  $\{w_i\}_{i \in I}$ ), נקבל  $P_{\{j\}} = \langle B, n_j \rangle = B \cup Bn_jB$ . נסיק

$$B \cup Bn_jB = \langle B, n_j \rangle = \langle B, n_{i_1}, \dots, n_{i_k} \rangle \supseteq Bn_{i_1}B, \dots, Bn_{i_k}B$$

ולכן  $Bn_{i_1}B, \dots, Bn_{i_k}B = Bn_jB$ . ממשפט 8.11 נובע כי  $w_{i_1} = \dots = w_{i_k} = w_j$  סתירה.

נניח כי  $P_{J_1} = P_{J_2}$ , כלומר  $BN_{J_1}B = BN_{J_2}B$ . מכאן, לכל  $n \in N_J$

$$BnB \subseteq BN_{J_2}B$$

ולכן יש  $n' \in N_{J_2}$  כך ש  $BnB = Bn'B$  ולכן  $\varphi(n) = \varphi(n')$ . זה מראה ש  $W_{J_1} \subseteq W_{J_2}$  ובפרט  $w_j \in W_{J_2}$  לכל  $j \in J_1$ . ממה שהראנו עכשיו, נסיק כי  $J_1 \subseteq J_2$  (כי לא ניתן לייצג את  $w_j$  ל  $J_1$  בלי שימוש ביוצר זה). באותו אופן  $J_2 \subseteq J_1$  ולכן  $J_1 = J_2$ . באופן כללי  $P_{J_1} \cap P_{J_2}$  היא תת-חבורה שמכילה את  $B$ , ולכן יש  $J_3 \subseteq I$  כך ש

$$P_{J_1} \cap P_{J_2} = P_{J_3}$$

ממה שהראנו עכשיו, נובע ש  $J_3 \subseteq J_1, J_2$  ולכן  $J_3 \subseteq J_1 \cap J_2$ . ברור ש  $P_{J_1 \cap J_2} \subseteq P_{J_1} \cap P_{J_2}$  ולכן  $P_{J_1 \cap J_2} \subseteq P_{J_3}$ . ■

**משפט 8.21** תהי  $J \subseteq I$ . אז  $N_G(P_J) = P_J$ . כמו כן, לכל  $J_1 \neq J_2 \subseteq I$  אינה צמודה ל  $P_{J_2}$ .

**הוכחה:** כיוון ש  $B \subseteq P_J \subseteq N_G(P_J)$ , יש  $J' \subseteq I$  כך ש  $P_{J'} = N_G(P_J)$ . כיוון ש  $P_J \subseteq N_G(P_J)$ , נקבל ש  $P_J \subseteq P_{J'}$  ולכן  $J \subseteq J'$ . נניח כי  $J' \neq J$ , אז  $n_{j'} \in N_G(P_J)$  ולכן  $n_{j'}P_Jn_{j'}^{-1} = P_J$ . ראינו כי  $n_{j'}P_Jn_{j'}^{-1} \subseteq \langle B, n_{j'} \rangle = \langle B, n_{j'}Bn_{j'}^{-1} \rangle$ . נסיק כי  $n_{j'} \in P_J$ . מכאן נסיק כי  $J' \subseteq J$ .

נניח כי  $P_{J_2} = gP_{J_1}g^{-1}$ . נכתוב  $g = b_1nb_2$  כאשר  $b_1, b_2 \in B, n \in N$ . כיוון ש  $B \subseteq P_{J_2}$  נקבל  $B \subseteq nP_{J_1}n^{-1} \supseteq nBn^{-1}$ . נסיק כי  $P_{J_2} = \langle B, nBn^{-1} \rangle = \langle B, n \rangle$ . לכן  $n \in P_{J_2}$  ונקבל  $P_{J_1} = P_{J_2}$  (ולכן  $J_1 = J_2$ ). ■



#### 8.4 פירוק לוי של חבורה פרבולית

נחזור לחבורת Chevalley  $G$  ( $\phi$  מערכת השורשים המתאימה ל  $G$ ,  $\Pi \subseteq \phi^+ \subseteq \phi$ ).

**טענה 8.22** תהי  $J \subseteq \Pi$ , אז החבורה הפרבולית  $P_J$  נוצרת ע"י  $X_r$   $r \in \phi^+ \cup \phi_J$ ,  $H \cup \bigcup_{r \in \phi^+ \cup \phi_J} X_r$ , כאשר  $\phi_J$  היא תת-קבוצה של השורשים שהם צירופים לינאריים של איברי  $J$ .

**הוכחה:**  $P_J = BN_J B$  נוצרת ע"י  $B$  וע"י  $\{n_r \mid r \in J\}$ . אנו יודעים כי לכל  $r \in \phi$ ,  $n_r \in \langle X_r, X_{-r} \rangle$  (כאשר  $n_r = \phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ), לכן לכל  $r \in J$ ,

$$n_r \in \left\langle H \cup \bigcup_{r' \in \phi^+ \cup \phi_J} X_{r'} \right\rangle$$

מכאן  $P_J \subseteq \left\langle H \cup \bigcup_{r' \in \phi^+ \cup \phi_J} X_{r'} \right\rangle$ .

להפך, כמובן  $H \subseteq B \subseteq P_J$  ולכל  $r \in \phi^+$ ,  $X_r \subseteq B \subseteq P_J$ . נניח כי  $r \in \phi^- \cap \phi_J$ . ראינו כי יש  $w \in W_J$  ו  $s \in J$  כך ש  $w(s) = r$  (בגלל ש  $r \in \phi_J$ , ראו טענה 2.33). נכתוב  $w = w_{r_1} \cdots w_{r_k}$ , כאשר  $r_1, \dots, r_k \in J$ . ראינו כי (מסקנה 7.9)

$$n_{r_1} \cdots n_{r_k} X_s n_{r_k}^{-1} \cdots n_{r_1}^{-1} = X_{w(s)} = X_r$$

כיוון ש  $n_{r_1}, \dots, n_{r_k} \in N_J$ , נסיק כי  $X_r \subseteq P_J$  לכל  $r \in \phi_J$ . זה מראה את ההכלה השנייה. ■

תהי  $U_J \subseteq P_J$  תת-החבורה הנוצרת ע"י  $\bigcup_{r \in \phi^+ \setminus \phi_J} X_r$ . נשים כי הקבוצה  $\phi^+ \setminus \phi_J$  סגורה במובן שאם  $r, s \in \phi^+ \setminus \phi_J$  ו  $i, j \geq 1$  כך ש  $ir + js \in \phi^+ \setminus \phi_J$  אז  $ir + js \in \phi^+ \setminus \phi_J$ . מכאן, ומנוסחת הקומוטטור מקבלים כי  $U_J = \prod_{r \in \phi^+ \setminus \phi_J} X_r$  (דומה למשפט 5.11 סעיף 3).

נגדיר את  $L_J$  להיות תת-החבורה של  $G$  הנוצרת ע"י  $H \cup \left( \bigcup_{r \in \phi_J} X_r \right)$ . ברור כי  $L_J, U_J \subseteq P_J$ . לפי הטענה הקודמת,  $P_J = \langle L_J, U_J \rangle$ .

**משפט 8.23 (פירוק לוי):**

1.  $U_J \triangleleft P_J$

2.  $P_J = L_J U_J$  - פירוק לוי של  $P_J$

3.  $L_J \cap U_J = \{1\}$

4.  $P_J = N_G(U_J)$

$U_J$  נקרא הרדיקל היוניפוטנטי של  $P_J$  ו  $L_J$  נקרא חלק לוי (Levi part) של  $P_J$ .

**הערה 8.24** כאשר  $J = \emptyset$ , אז  $P_J = B$ ,  $U_J = U$ ,  $L_J = H$ .

**הוכחה:**

1. נראה כי  $H$  וכל  $X_r$  כאשר  $r \in \phi^+ \cup \phi_J$  מנרמלים את  $U_J$ .  
 $H$  מנרמלת את  $U_J$  כי  $H$  מנרמלת כל חבורת שורש (למה 7.2).  
 נניח כי  $r \in \phi^+$ . נראה כי  $X_r$  מנרמלת את  $U_J$ . יהי  $s \in \phi^+ \setminus \phi_J$  ונתבונן ב

$$x_r(t) x_s(u) x_r(t)^{-1} = x_s(u) \prod_{\substack{i,j \geq 1 \\ ir+js \in \phi}} x_{ir+js} (C_{i,j,r,s} t^i u^j) \quad (7)$$

- אם  $i, j \geq 1$  ו  $ir + js \in \phi$  אז  $ir + js \in \phi^+ \setminus \phi_J$  (קל לבדוק) ולכן (7) שייך ל  $U_J$ .  
 מכאן,  $x_r(t) X_s x_r(t)^{-1} \subseteq U_J$ .  
 נניח כי  $r \in \phi_J$ . יהי  $s \in \phi^+ \setminus \phi_J$ . נכתוב  $x_r(t) x_s(u) x_r(t)^{-1}$  כמו קודם. שוב,  
 $ir + sj \in \phi^+ \setminus \phi_J$  (קל לבדוק) ונקבל כי  $X_r$  מנרמלת את  $U_J$ .

2. נובע מ1 אוטומטית.

3. יהי  $m \in L \cap U_J$ . נפעיל את  $m$  על בסיס Chevalley של  $\mathfrak{g}_K$ . (בהמשך הכל נובע מנוסחאות הפעולה של  $x_r(t)$  על בסיס Chevalley)

- נניח כי  $s \in \Pi$ . כיוון ש  $m \in U_J$ ,  $m \cdot h_s = h_s + x$ , כאשר  $x \in \sum_{r \in \phi^+ \setminus \phi_J} \mathfrak{g}_r$ , וכיוון ש  $m \in L_J$  נקבל  $m \cdot h_s \in \mathfrak{h} + \sum_{r \in \phi_J} \mathfrak{g}_r$  ונסיק כי  $x = 0$  ולכן  $m \cdot h_s = h_s$ .  
 יהי  $s \in \phi_J$ . כיוון ש  $m \in U_J$ ,

$$m \cdot e_s = e_s + x \quad x \in \sum_{r \in \phi \setminus \phi_J} \mathfrak{g}_r$$

- (תרגיל), וכיוון ש  $m \in L_J$ ,  $m \cdot e_s \in \mathfrak{h} + \sum_{r \in \phi_J} \mathfrak{g}_r$ , נסיק כי  $x = 0$  ו  $m \cdot e_s = e_s$ .  
 יהי  $s \in \phi \setminus \phi_J$ . כיוון ש  $m \in U_J$

$$m \cdot e_s = e_s + x \quad x \in \mathfrak{h} + \sum_{r \in s + (\phi \setminus \phi_J)} \mathfrak{g}_r$$

- וכיוון ש  $m \in L_J$ ,  $m \cdot e_s = \alpha \cdot e_s + x'$ , כאשר  $x' \in \sum_{r \in s + \phi_J} \mathfrak{g}_r$ . נסיק כי  $x = 0$  וכי  $m \cdot e_s = e_s$ .

4. כיוון ש  $U_J \triangleleft P_J$ ,  $N_G(U_J) \triangleleft P_J$  ולכן  $N_G(U_J)$  תת-חבורה פרבולית, ולכן יש  $J' \subseteq \Pi$  כך ש  $N_G(U_J) = P_{J'}$ . נסיק כי  $P_J \subseteq P_{J'}$  ולכן  $J \subseteq J'$ .

- אם  $J \subsetneq J'$ , יהי  $r \in J' \setminus J$  ולכן  $n_r U_J n_r^{-1} = U_J$  (כי  $n_r \in N_G(U_J)$ ).  
 כיוון ש  $r \in \phi^+ \setminus \phi_J$ ,  $X_r \subseteq U_J$  ולכן  $X_r \subseteq U_J$  ולכן  $X_{-r} = X_{w_r(r)} = n_r X_r n_r^{-1} \subseteq U_J$ . קיבלנו כי  $X_{-r} \subseteq U_J$ . סתירה. ■