מבוא לתבניות מודולריות

אלעד זלינגר

תקציר

רשימות אלו מבוססות על הרשימות של אוהד ליבנה־בר־און ואור ברוך בקורס "מבוא לתבניות מודולריות" (סימול 0366-5012) שהועבר על ידי פרופסור דוד סודרי בסמסטר א' שנת הלימודים תשע"ה באוניברסיטת תל אביב. אין המרצה, אוהד או אור אחראיים לכל טעות שנפלה ברשימות אלה. לתגובות, תיקונים ועוד, אנא פנו לelad88 בgmail.

תוכן עניינים

1 פונקציות אליפטיות

עבור האליפסה $y^2 = 2px + \left(e^2-1\right)x^2$ ($p>0$, $0<e<1$), אורך הקשת עם פרמטר t מתאים הוא $a\int_t^1 \frac{1-e^2\theta^2}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-e^2\theta^2)}}d\theta$ כאשר $a=\frac{p}{1-e^2}$. עבור פונקציה רציונלית $R(x)$, אינטגרלים מהצורה $\int \frac{R(x)}{\sqrt{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4}}dx$ נקראים אינטגרלים אליפטיים.

אבל (Abel) חקר אינטגרלים מהצורה $f(t)=\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$.

הערה 1.1 במקרה של מעגל $\arcsin t = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ויש לנו את הפונקציה ההפוכה $t = \int_0^{\sin t}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

אבל חיפש פונקציה הפוכה לאינטגרל לעיל: $t=\int_0^{\varphi(t)}\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$. הוא הוכיח כי:

1. $\varphi(t)$ קיימת וניתנת להרחבה למשתנה מרוכב.
2. $\varphi(t)$ מרומורפית.
3. ל$\varphi(t)$ יש שני מחזורים בלתי תלויים מעל $\mathbb{R}$.

פונקציה המקיימת תנאים אלה נקראת פונקציה אליפטית.

הגדרה 1.2 יהיו ω_1,ω_2 בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{R}$. $L=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ הוא סריג ב$\mathbb{C}$. $\{\omega_1,\omega_2\}$ הוא בסיס לL.

$\mathbb{C}/L$ הוא חבורה חיבורית אבלית וקומפקטית.

$$(\mathbb{R}\omega_1+\mathbb{R}\omega_2)/(\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2) \quad\cong\quad \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1\times S^1$$

המקבילית היסודית המתאימה לL ביחס ל$\{\omega_1,\omega_2\}$ היא הקבוצה

$$\Pi \quad=\quad \{a\omega_1+b\omega_2 \mid 0\le a\le 1, 0\le b\le 1\}$$

לכל $z\in\mathbb{C}$ קיימים ויחידים $x,y\in\mathbb{R}$ עבורם

$$\begin{aligned} z &= x\omega_1+y\omega_2 \\ &= (x-[x])\,\omega_1+(y-[y])\,\omega_2+\underbrace{[x]\,\omega_1+[y]\,\omega_2}_{-\lambda\in L} \end{aligned}$$

אז $z+\lambda\in\Pi$. מכאן, $\mathbb{C}=\Pi+L$.

ניתן לכתוב $\omega_1=re^{i\theta}\omega_2$ כאשר $r>0$ ו $0<\theta<\pi$ ואז $\frac{\omega_1}{\omega_2}=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\underbrace{\sin\theta}_{>0}$. לכן נוכל לנרמל את $\{\omega_1,\omega_2\}$ כך ש $\operatorname{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2}>0$.

טענה 1.3 יהי $\{\omega_1',\omega_2'\}$ בסיס מנורמל נוסף של L, אז קיים $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ עבורו $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$. (כאשר $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})=\{\gamma\in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det\gamma=1\}$)

הוכחה: $\{\omega_1',\omega_2'\}$ בסיס, ובפרט בסריג, ולכן קיימים $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ עבורם $\omega_1'=a\omega_1+b\omega_2$, $\omega_2'=c\omega_1+d\omega_2$ ואז $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}}_{\gamma}=\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}$. באופן דומה, קיימת מטריצה שלמה γ' עבורה מתקיים $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}\gamma'=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$. מכאן $\gamma\gamma'=I_2$ (כי מקבלים כי $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}\overline{\omega_1}'\\ \overline{\omega_2}'\end{pmatrix}$ נשארים במקום ע"י $\gamma\gamma'$ ואלה וקטורים בת"ל מעל $\mathbb{C}$ - זה נובע מכך שω_1' וω_2' בת"ל מעל $\mathbb{R}$) ואז $\det\gamma\cdot\det\gamma'=1$ ו $\det\gamma\in\mathbb{Z}$ ולכן שווה ל±1.

נשים לב כי הבסיסים מנורמלים:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\omega_1'}{\omega_2'}}_{\tau'}=\frac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2} &= \frac{a\underbrace{\frac{\omega_1}{\omega_2}}_{\tau}+b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d}\\
&\Longrightarrow\\
\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d} &= \frac{(a\tau+b)(c\overline{\tau}+d)}{|c\tau+d|^2}\\
&= \frac{ac|\tau|^2+ad\tau+bc\overline{\tau}+bd}{|c\tau+d|^2}\\
0<\mathrm{Im}\tau' &= \frac{ad}{|c\tau+d|^2}\mathrm{Im}\tau-\frac{bc}{|c\tau+d|^2}\mathrm{Im}\tau\\
&= \frac{ad-bc}{|c\tau+d|^2}\mathrm{Im}\tau=\det\gamma\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}}_{>0}
\end{aligned}$$

ומכאן $\det\gamma>0$. ■

הערה 1.4 גם הטענה ההפוכה נכונה: תהי $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, אז עבור $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ נקבל כי $\mathbb{Z}\omega_1'+\mathbb{Z}\omega_2'\subseteq\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$. גם $\gamma^{-1}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ולכן שני הסריגים שווים. מהנוסחה $\mathrm{Im}\tau'=\det\gamma\cdot\frac{\mathrm{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$ נקבל כי הבסיס $\{\omega_1',\omega_2'\}$ של L גם הוא מנורמל.

הגדרה 1.5 יהי $L=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ סריג. פונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ תקרא אליפטית ביחס לL אם f מורומורפית ולכל $z\in\mathbb{C}$ ו $\lambda\in L$ מתקיים $f(z+\lambda)=f(z)$. f נקבעת על Π. נסמן ב$\mathcal{E}_L$ את שדה הפונקציות האליפטיות ביחס לL.

משפט 1.6 (ליוביל): תהי $f\in\mathcal{E}_L$ ונניח שלf אין קטבים בΠ. אז f קבועה.

הוכחה: f אנליטית בΠ ולכן ב$\mathbb{C}$. f רציפה בΠ ולכן חסומה בה. f חסומה ב$\mathbb{C}$ ואנליטית, ולכן קבועה. ■

אם טור לורן של f סביב z_0 ידוע, אז לכל $\lambda\in L$ הטור של f סביב $z_0+\lambda$ ניתן למציאה:

נכתוב בעיגול $z \in V_{z_0}$ את הטור

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (a_N \neq 0)$$

אז

$$f(z+\lambda) = f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n ((z+\lambda) - (z_0+\lambda))^n$$

ולכן $f(\xi) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n (\xi - (z_0+\lambda))^n$ בעיגול $\xi \in V_{z_0} + \lambda = V_{z_0+\lambda}$.
משפט ליוביל נכון לכל הזזה $\Pi + \alpha$ כי $\mathbb{C} = (\Pi + \alpha) + L$ באותו אופן כמו L.

משפט 1.7 (ליוביל): תהי $f \in \mathcal{E}_L$ ו $\Pi + \alpha$ הזזה של המקבילית כך שלf אין קטבים על $\partial(\Pi + \alpha)$, אז $\sum_{s \in \Pi+\alpha} \mathrm{Res}_{z=s} f = 0$.

הוכחה: ממשפט השארית

$$\sum_{s \in \Pi+\alpha} \mathrm{Res}_{z=s} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\Pi+\alpha)} f(z)\, dz = 0$$

האינטגרל יוצא 0 כי הפונקציה שווה על צלעות נגדיות של המקבילית, אבל הכיוונים מנוגדים.
■

מסקנה 1.8 לפונקציה $f \in \mathcal{E}_L$ שאינה קבועה יש לפחות שני קטבים (כולל ריבוי) ב$\Pi + \alpha$ כנ"ל.

משפט 1.9 (ליוביל): תהי $f \in \mathcal{E}_L$ ותהי $\Pi + \alpha$ הזזה של המקבילית כך שלf אין קטבים או אפסים על $\partial(\Pi + \alpha)$. יהיו $m_1, \ldots, m_r$ סדרי האפסים של f ב$(\Pi + \alpha)$ ויהיו $n_1, \ldots, n_k$ סדרי הקטבים של f ב$(\Pi + \alpha)$. אז $\sum_{i=1}^{r} m_i = \sum_{j=1}^{k} n_j$. מספר זה אינו תלוי בהזזה.

הערה 1.10 בהמשך נסתכל על המקביליות מודולו L כדי לא לספור נקודות על השפה פעמיים.

הוכחה: נתבונן בנגזרת הלוגריתמית $\frac{f'}{f} \in \mathcal{E}_L$. כל הקטבים של $\frac{f'}{f}$ הם פשוטים ומתקבלים מהאפסים והקטבים של f: אם $z = a$ הוא אפס מסדר m של f אז הוא קוטב פשוט של $\frac{f'}{f}$ ו $\mathrm{Res}_{z=a}\left(\frac{f'}{f}\right) = m$. באופן דומה, אם $z = a$ קוטב מסדר n של f, אז הוא קוטב פשוט של $\frac{f'}{f}$ עם שארית $-n$. מכאן הטענה נובעת מהמשפט הקודם.
תהי $\Pi + \beta$ הזזה של המקבילית ונסמן ב$z'_1, \ldots, z'_{r'}$ את האפסים השונים מודולו L של f, עם ריבויים $m'_1, \ldots, m'_{r'}$ בהתאמה. קיימים $\lambda_j \in L$ עבורם $z'_j + \lambda_j \in \Pi + \alpha$, ואז אלה אפסים של f ב$\Pi + \alpha$. נסמן ב$z_1, \ldots, z_r$ את האפסים של f ב$(\Pi + \alpha)$, אז $r' \leq r$ וניתן לסדר $z'_j + \lambda_j = z_j$ ל $1 \leq j \leq r'$, ו $m'_j = m_j$. באופן דומה, $r' \leq r$ ולכן $z'_j + \lambda_j = z_j$ ו $m'_j = m_j$ לכל j. מכאן

$$\sum_{\substack{s \in \Pi+\alpha \\ f(s)=0}} m_s = \sum_{\substack{s \in (\Pi+\beta)/\sim \\ f(s)=0}} m'_s$$

כנ"ל עבור הקטבים. ∎

הגדרה 1.11 המספר $\sum_{j=1}^{k} n_j = \sum_{i=1}^{r} m_i$ נקרא הסדר של הפונקציה f.

משפט 1.12 תהי $f \in \mathcal{E}_L$ אליפטית מסדר n. לכל $c \in \mathbb{C}$ יש למשוואה $f(z) = c$ בדיוק n פתרונות (כולל ריבוי) ב-$\Pi/\sim$. (או בכל הזזה)

הוכחה: $f(z) - c \in \mathcal{E}_L$ פונקציה עם אותן נקודות קוטב ואותם סדרים כמו f. בפרט, גם הסדר $f(z) - c$ היא n, לכן זה מספר האפסים כולל ריבוי של $f(z) - c$ ב-$\Pi/\sim$, ואלה הפתרונות למשוואה. ∎

1.1 פונקציית p של ויירשטראס

הגדרה 1.13

$$p(z) \quad = \quad p(z; L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \lambda \in L} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

למה 1.14 יהי $\alpha \in \mathbb{R}$, אז הטור $\sum_{0 \neq \lambda \in L} \frac{1}{\lambda^\alpha}$ מתכנס בהחלט $\iff \alpha > 2$.

הוכחה: $\mathbb{C}$ הוא מרחב וקטורי ממימד 2 מעל $\mathbb{R}$. נתבונן בנורמות הבאות:

$$\begin{aligned}
\|x\omega_1 + y\omega_2\|_1 &= \max\{|x|, |y|\} \\
\|x\omega_1 + y\omega_2\|_2 &= |x\omega_1 + y\omega_2|
\end{aligned}$$

שתי הנורמות הנ"ל שקולות (כי הן מעל מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$), ולכן קיימים $r, R > 0$ עבורם

$$r \max\{|x|, |y|\} \quad \leq \quad |x\omega_1 + y\omega_2| \leq R \max\{|x|, |y|\}$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט אם ורק אם הטור הבא מתכנס

$$\sum_{0 \neq (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \frac{1}{(\max\{|m|, |n|\})^\alpha} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\max\{|m|,|n|\}=k} \frac{1}{k^\alpha}$$

מתכנס. נשים לב כי עבור k יש $8k$ אפשרויות לזוגות (m, n) המקיימים $\max\{|m|, |n|\} = k$: $m = \pm k$ ו-$-(k-1) \leq n \leq k-1$ מניב $2(2k-1)$ וכנ"ל עבור החלפת התפקידים. לכן יש $8k - 4$ זוגות כנ"ל בהן $|m| \neq |n|$ ועוד 4 זוגות בהן $|m| = |n| = k$. לכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\max\{|m|,|n|\}=k} \frac{1}{k^\alpha} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^{\alpha-1}}$$

וטור זה מתכנס $\iff \alpha - 1 > 1$ כלומר $\alpha > 2$. ∎

טענה 1.15 הטור המגדיר את $p(z)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל קבוצה קומפקטית $B \subseteq \mathbb{C} \setminus L$.

הוכחה:

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{-z^2 + 2\lambda z}{\lambda^2 (z-\lambda)^2} = (-z) \cdot \frac{z - 2\lambda}{\lambda^2 (z-\lambda)^2}$$

נשווה עם $\frac{1}{\lambda^3}$:

$$\frac{\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda^3}} = -\frac{z\lambda (z-2\lambda)}{(z-\lambda)^2} = -\frac{z\left(\frac{z}{\lambda} - 2\right)}{\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)^2} \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 2z$$

תהי $B \subseteq \mathbb{C} \setminus L$ קומפקטית ויהי $z \in B$

$$\left| \frac{\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda^3}} - 2z \right| = \left| \frac{z\left(2 - \frac{z}{\lambda}\right)}{\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)^2} - 2z \right| = |z| \cdot \left| \frac{2 - \frac{z}{\lambda}}{\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)^2} - 2 \right|$$

כיוון ש $\frac{2-u}{(1-u^2)} - 2 \xrightarrow[u \to 0]{} 0$ ו $z \in B \implies |z| \le M$, $\varepsilon = \frac{1}{M}$ קיים $0 < \delta_0 \le \frac{1}{2}$ עבורו לכל $|u| < \delta_0$ מתקיים $\left| \frac{2-u}{(1-u^2)} - 2 \right| < \frac{1}{M}$. יהי $N_0 > 0$ עבורו $\frac{M}{N_0} < \delta_0$, אז לכל $\lambda \in L$, $|\lambda| > N_0$ מתקיים

$$\left| \frac{z}{\lambda} \right| < \frac{M}{N_0} < \delta_0 \implies |z| \cdot \left| \frac{2 - \frac{z}{\lambda}}{\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)^2} - 2 \right| < |z| \cdot \frac{1}{M} \le 1$$

מכאן הטור $\sum_{0 \ne \lambda \in L} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2z}{\lambda^3} \right)$ מתכנס במידה שווה ובהחלט (כי ל־$n >$ N_0 מתקיים $\left| \frac{\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda^3}} - 2z \right| \le 1$ ולכן $\left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2z}{\lambda^3} \right| \le \frac{1}{\lambda^3}$ ומבוחן M של ויירשטראס נובע שהטור מתכנס במידה שווה). גם הטור $\sum_{0 \ne \lambda \in L} \frac{2z}{\lambda^3}$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בB ולכן גם הטור המגדיר את p. ■

מסקנה 1.16

1. $p(z)$ אנליטית ב$\mathbb{C} \setminus L$.
2. כל נקודות L הן קטבים מסדר 2 של $p(z)$.
3. $p(z)$ פונקציה זוגית.

הוכחה:

1. נובע מהטענה האחרונה ומשפט ויירשטראס.
2. יהי $\lambda \in L$ ונגדיר $f(z) = p(z) - \frac{1}{(z-\lambda)^2}$. מהוכחת הטענה הקודמת, $f(z)$ אנליטית ב $(\mathbb{C} \setminus L) \cup \{\lambda\}$. $p(z) = f(z) + \frac{1}{(z-\lambda)^2}$ ולכן λ קוטב מסדר 2 של $p(z)$.

3. נובע מהגדרת p (ומסימטריות L סביב הראשית).

$\blacksquare$

משפט 1.17 $p\left(z\right)$ אליפטית ביחס לL ומסדר 2.

הוכחה: יש להראות רק מחזוריות (מרומורפיות הוכחה וסדר 2 ינבע מהמסקנה הקודמת).
עבור $j=1,2$ ו$z\in\mathbb{C}$ נסמן

$$\begin{aligned} f_j\left(z\right) &= p\left(z+\omega_j\right)-p\left(z\right) \\ f_j'\left(z\right) &= p'\left(z+\omega_j\right)-p'\left(z\right) \end{aligned}$$

ע"י גזירת איבר־איבר: $p'\left(z\right)=-2\sum_{\lambda\in L}\frac{1}{(z-\lambda)^3}$. זהו טור מתכנס במ"ש בכל $B\subseteq\mathbb{C}\setminus L$ קומפקטית. ברור כי לכל $\lambda_0\in L$, $p'\left(z+\lambda_0\right)=p'\left(z\right)$, ולכן $p'\in\mathcal{E}_L$. בפרט, $p'\left(z+\omega_j\right)=p'\left(z\right) \iff$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus L$ מתקיים $f_j'\left(z\right)=0$. הקבוצה $\mathbb{C}\setminus L$ קשירה ופתוחה ולכן $f_j\left(z\right)\equiv c_j$ קבועה בה. נציב $z=-\frac{\omega_j}{2}\notin L$, אז

$$c_j = p\left(\frac{\omega_j}{2}\right)-p\left(-\frac{\omega_j}{2}\right)=0$$

כי p זוגית.
ב$\Pi/\sim$ ל$p\left(z\right)$ קוטב יחיד והוא מסדר 2.

$\blacksquare$

מסקנה 1.18 לכל $c\in\mathbb{C}$, למשוואה $p\left(z\right)=c$ יש שני שורשים פשוטים במקבילית היסודית או שורש כפול בה.

מתי $z\in\Pi/\sim$ שורש כפול של $p\left(z\right)=c$? התנאים הם $\begin{cases} p\left(z_0\right)=c \\ p'\left(z_0\right)=0 \end{cases}$ וראינו כי $p'\left(z\right)=-2\sum_{\lambda\in L}\frac{1}{(z-\lambda)^3}$. זו פונקציה אליפטית מסדר 3. הקטבים שלה הם בדיוק נקודות L, והם מסדר 3 (כלומר, ב$\Pi/\sim$ הקוטב היחיד הוא $z=0$ והוא מסדר 3). לכן ב $\Pi/\sim$ יש למשוואה $p'\left(z\right)=0$ שלושה שורשים כולל ריבוי. נמצא אותם.
יהי $\lambda\in L$ כך ש $\frac{\lambda}{2}\notin L$.

$$p'\left(\frac{\lambda}{2}\right) = p'\left(\frac{\lambda}{2}-\lambda\right)=p'\left(-\frac{\lambda}{2}\right)=-p\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

ומכאן $p'\left(\frac{\lambda}{2}\right)=0$. יש שלוש נקודות כאלה במקבילית היסודית: $z_0\in\left\{\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2},\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right\}$.
לכן למשוואה $p\left(z\right)=c$ יש שורשים כפולים בדיוק עבור $c\in\left\{p\left(\frac{\omega_1}{2}\right),p\left(\frac{\omega_2}{2}\right),p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right\}$.
נסמן

$$e_1=e_1\left(L\right)=p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \qquad e_2=e_2\left(L\right)=p\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$
$$e_3=e_3\left(L\right)=p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$$

המספרים $\left\{e_i\left(L\right)\right\}_{i=1}^3$ שונים זה מזה: נניח בשלילה כי $e_1=e_2$. אז למשוואה $p\left(z\right)=p\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ יש שני שורשים כפולים ב$\Pi/\sim$ ($z=\frac{\omega_1}{2}$ ו $z=\frac{\omega_2}{2}$), בסתירה לכך שסדר $p\left(z\right)$ הוא 2. באופן דומה, $e_1\neq e_3$ ו $e_2\neq e_3$.

נמצא את פיתוח לורן של $p(z)$ סביב $z=0$. נסמן $r=r_L=\min\{|\lambda| \mid 0\neq\lambda\in L\}$.
נניח כי $0<|z|<r$, אז בעיגול המנוקב הזה יש ל$p(z)$ פיתוח לטור לורן.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2} &= \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)^2}-1\right)\\
\underbrace{}_{\left|\frac{z}{\lambda}\right|<1} &= \frac{1}{\lambda^2}\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^j\right)^2-1\right)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{j+k=n\\ j,k\geq 0}}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{j+k}\right)-1\right)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\lambda}\right)^n-1\right)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\lambda}\right)^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\lambda^{n+2}}\cdot z^n
\end{aligned}$$

לכן

$$p(z) = \frac{1}{z^2}+\sum_{0\neq\lambda\in L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\lambda^{n+2}}\cdot z^n$$

כעת

$$\left|\frac{n+1}{\lambda^{n+2}}\cdot z^n\right| = \frac{n+1}{|\lambda|^{n+2}}|z|^n = \frac{n+1}{|\lambda|^3}|z|\left(\frac{|z|}{|\lambda|}\right)^{n-1} \leq \frac{n+1}{|\lambda|^3}|z|\left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}$$

כפי שראינו, $\sum_{0\neq\lambda\in L}\frac{1}{|\lambda|^3}<\infty$, וממבחן השורש גם $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{r^n}|z|^n<\infty$:

$$\sqrt[n]{\frac{n+2}{r^n}|z|^n} = \frac{|z|}{r}\sqrt[n]{n+2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{|z|}{r}<1$$

לכן ניתן להחליף סדר סכימה:

$$p(z) = \frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\sum_{0\neq\lambda\in L}\frac{1}{\lambda^{n+2}}\right)z^n$$

נסמן ב $G_{k;L}=\sum_{0\neq\lambda\in L}\frac{1}{\lambda^k}$ עבור $k\geq 3$ את טור איזנשטיין ממשקל k, אז מצאנו כי $p(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)G_{n+2;L}z^n$.
$p(z)$ זוגית ולכן לכל k, $G_{2k+1;L}=0$. בסה"כ $p(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2;L}z^{2n}$.

משפט 1.19 פונקציית p מקיימת משוואה דיפרנציאלית:

$$\left(p'\left(z\right)\right)^2 = 4p\left(z\right)^3 - \underbrace{60G_{4;L}}_{g_{2;L}}p\left(z\right) - \underbrace{140G_{6;L}}_{g_{3;L}}$$

כלומר $(y')^2 = 4y^3 - g_2y - g_3$.

הוכחה: נגזור איבר־איבר:

$$\begin{aligned} p'\left(z\right) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_{4;L}z + 20G_{6;L}z^3 + \dots \\ p'\left(z\right)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_{4;L}}{z^2} - 80G_{6;L} + \dots \\ 4\left(p\left(z\right)\right)^3 &= 4\left(\frac{1}{z^6} + \frac{9G_{4;L}}{z^2} + 15G_{6;L}\right) \end{aligned}$$

מכאן $p'\left(z\right)^2 - 4p\left(z\right)^3 = -\frac{60}{z^2}G_4 - 140G_6 - \dots$ ומכאן $p'\left(z\right)^2 - 4p\left(z\right)^3 + \frac{60}{z^2}G_4 + 140G_6$ הולומורפית בעיגול קטן דיו סביב $z = 0$ (וניתנת להרחבה ל$z = 0$). כמו כן, הפונקציה הזאת היא ב$\mathcal{E}_L$ ואין לה אף קוטב מחוץ ל$z = 0$ ב־$\Pi/\sim$, ולכן היא קבועה. הקבוע הזה הוא 0 כי היא שווה ל0 ב$z = 0$. מכאן אנו מקבלים את המשוואה הדיפרנציאלית הדרושה (משוואת ויירשטראס). ■

מסקנה 1.20 e_1, e_2, e_3 הם שלושה שורשים שונים של הפולינום $4x^3 - g_2x - 140g_3$.

הוכחה: למשל, עבור e_1: $0 = p'\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 = 4p\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^3 - g_2p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - g_3$. באופן דומה לשני השורשים האחרים. ■

מסקנה 1.21 $p'\left(z\right)^2 = 4\left(p\left(z\right) - e_1\right)\left(p\left(z\right) - e_2\right)\left(p\left(z\right) - e_3\right)$

יהי $(x - x_1)\cdot\dots\cdot(x - x_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ פולינום מתוקן עם שורשים $x_1, \dots, x_n$ בשדה סגור אלגברית כלשהו. **הדיסקרימיננט** מוגדר ע"י $\prod_{i<j}\left(x_i - x_j\right)^2$. עבור פולינום מהצורה $x^3 + px + q$ הדיסקרימיננט נתון ע"י $-4p^3 - 27q^2$. במקרה שלנו $x^3 - \frac{g_2}{4}x - \frac{g_3}{4}$ נקבל דיסקרימיננט

$$0 \neq \left(e_1 - e_2\right)^2\left(e_2 - e_3\right)^2\left(e_1 - e_3\right)^2 = \frac{1}{16}\left(g_2^3 - 27g_3^2\right)$$

הגדרה 1.22 נסמן את **הדיסקרימיננט שמתאים ל**L $\Delta = \Delta\left(L\right) = \frac{1}{16}\left(g_2^3 - 27g_3^2\right)$.

מסקנה 1.23 $\Delta \neq 0$

משפט 1.24 ההעתקה $E : {}^{\mathbb{C}}/_{L} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $E\left(z + L\right) = \left(p\left(z\right), p'\left(z\right)\right)$ היא חד־חד־ערכית ותמונתה $\mathrm{Im}E = \left\{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\right\}$ (עקום אליפטי).

הוכחה: נניח כי $E\left(z_1+L\right)=E\left(z_2+L\right)$, $z_1\not\equiv z_2\left(\mod L\right)$, $z_1,z_2\notin L$. אז בפרט גם $p\left(z_1\right)=p\left(z_2\right)$. למשוואה $p\left(z\right)=p\left(z_1\right)$ יש לפיכך שני פתרונות פשוטים מודולו L והם z_1,z_2. הפונקציה $p\left(z\right)$ זוגית ולכן גם $-z_1,-z_2$ פתרונות למשוואה. לכן או שמתקיים $-z_2\equiv z_2\left(\mod L\right)$ ואז $z_2\in\frac{1}{2}L\setminus L$ פתרון כפול, בסתירה למה שמצאנו; או ש $z_2\equiv -z_1\left(\mod L\right)$.

בנוסף, $p'\left(z_1\right)=p'\left(z_2\right)$. p' אי־זוגית ולכן $-p'\left(z_1\right)=p'\left(-z_1\right)=p'\left(z_2\right)=p'\left(z_1\right)$ $\Longleftarrow$ $p'\left(z_1\right)=0$ ולכן z_1 פתרון מרובה למשוואה לעיל, בסתירה למה שמצאנו. מכאן נובע שבהכרח E חד־חד־ערכית.

E על העקום האליפטי: יהי $\left(x,y\right)$ על העקום האליפטי ויהי $z\in\mathbb{C}\setminus L$ המקיים $p\left(z\right)=x$, אז $y^2=4p\left(z\right)^2-g_2p\left(z\right)-g_3=p'\left(z\right)^2$ ולכן או $y=p'\left(z\right)$ ואז $E\left(z+L\right)=\left(x,y\right)$ או $y=-p'\left(z\right)=p'\left(-z\right)$ ואז $E\left(-z+L\right)=\left(x,y\right)$. ■

נסמן $e\left(\mathbb{C}\right)=\mathrm{Im}E\subseteq\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. ניתן להרחיב את E להעתקה חד־חד־ערכית ועל $E:^{\mathbb{C}}/_{L}\to e\left(\mathbb{C}\right)\cup\left\{\infty\right\}$ ע"י

$$E\left(z+L\right)=\begin{cases}\left(p\left(z\right),p'\left(z\right)\right) & z\notin L\\ \infty & z\in L\end{cases}$$

1.2 פונקציות ממשקל k על סריגים

נתבונן בפונקציות F מקבוצת הסריגים ל־$\mathbb{C}$. פונקציה המקיימת $F\left(t\cdot L\right)=t^{-k}\cdot f\left(L\right)$ לכל $t\in\mathbb{C}^{\times}$, עבור $k\in\mathbb{Z}$ נתון, נקראת **ממשקל** k.

עבור $L_{\omega_1,\omega_2}=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ עם בסיס מנורמל $\mathrm{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2}>0$ מתקיים $L_{\omega_1,\omega_2}=\omega_2\cdot L_{\frac{\omega_1}{\omega_2},1}$ ואז $F\left(L_{\omega_1,\omega_2}\right)=\omega_2^{-k}F\left(L_{\frac{\omega_1}{\omega_2},1}\right)$. נסמן

$$\mathcal{H}=\left\{x+yi\mid x\in\mathbb{R},y>0\right\}$$

אז $\frac{\omega_1}{\omega_2}\in\mathcal{H}$, כלומר עבור $f\left(\tau\right)=F\left(L_{\tau,1}\right)$, f מוגדרת $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ ומתקיים $F\left(L_{\omega_1,\omega_2}\right)=\omega_2^{-k}f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$.

נניח כי $L_{\omega_1,\omega_2}=L_{\omega_1',\omega_2'}$ כאשר גם $\frac{\omega_1'}{\omega_2'}\in\mathcal{H}$. אז קיימת מטריצה $\gamma\in\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$ המקיימת $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$. אם $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ נקבל

$$\begin{aligned}\omega_2^{-k}f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) &= F\left(L_{\omega_1,\omega_2}\right)=\\ &= F\left(L_{\omega_1',\omega_2'}\right)=\left(c\omega_1+d\omega_2\right)^{-k}f\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)\\ \left(c\omega_1+d\omega_2\right)^{-k}f\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2}+b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d}\right) &= \omega_2^{-k}f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\\ f\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2}+b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d}\right) &= \left(c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d\right)^{k}f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\end{aligned}$$

כלומר f מקיימת **תבנית אוטומורפית ממשקל** k **ביחס ל**$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\forall\tau\in\mathcal{H}\qquad f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^k f(\tau)$$

טענה 1.25 ההתאמה $f\mapsto F$ היא חד־חד־ערכית ועל, מקבוצת הפונקציות ממשקל k על סריגים לקבוצת הפונקציות המקיימות $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^k f(\tau)$ $\forall\tau\in\mathcal{H}$ לכל מטריצה $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

דוגמה יהי $k\geq 4$ זוגי. טור איזנשטיין $G_{k,L}=\sum_{0\neq\lambda\in L}\frac{1}{\lambda^k}$ היא פונקציה ממשקל k על סריגים: $G_{k,t\cdot L}=t^{-k}G_{k,L}$.
הפונקציה המתאימה על $\mathcal{H}$ היא $G_k(\tau)=G_{k,L_{\tau,1}}=\sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^k}$, טור איזנשטיין ממשקל k.
בהתאמה, נגדיר את הפונקציות $g_2(\tau)=60G_4(\tau)$ ו $g_3(\tau)=140G_6(\tau)$, $\Delta(\tau)=g_2(\tau)^3-27g_3(\tau)^2$, ממשקלים 4, 6 ו12 בהתאמה.
הראינו כי לכל $\tau\in\mathcal{H}$, $\Delta(\tau)\neq 0$. **האינווריאנט המודולרי** $j(\tau)=\frac{1728g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$ היא פונקציה ממשקל 0 ולכן משרה העתקה על מרחב המנה $\mathcal{H}\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

משפט 1.26 לכל $k\geq 4$ זוגי, הפונקציה $G_k(\tau)$ אנליטית ב$\mathcal{H}$.

הוכחה: יהי $\alpha>2$. נראה כי הטור $\sum_{(m,n)}\frac{1}{|m\tau+n|^\alpha}$ מתכנס במ"ש בקבוצות מהצורה $\Omega=\Omega_{R,\delta}=\{x+iy\mid -R\leq x\leq R, y\geq\delta\}\subseteq\mathcal{H}$, כאשר $R,\delta>0$.
בפרט, נראה כי קיים קבוע $c=c_{R,\delta}>0$ עבורו $|m\tau+n|^2\geq c|mi+n|^2$ לכל $m,n\in\mathbb{Z}$ ולכל $\tau\in\Omega$. מכאן נקבל כי

$$|m\tau+n|^\alpha \quad=\quad \left(|m\tau+n|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\geq c^{\frac{\alpha}{2}}\left(|mi+n|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}=c^{\frac{\alpha}{2}}|mi+n|^\alpha$$

ולכן

$$\frac{1}{|m\tau+n|^\alpha}\quad\leq\quad\frac{1}{c^{\frac{\alpha}{2}}|mi+n|^\alpha}$$

הטור של האיברים בצד ימין מתכנס, ולכן גם הטור הדרוש.
אכן, נכתוב $\tau=x+iy$ כאשר $|x|\leq R$, $y\geq\delta$ אז צריך למצוא קבוע כך שלכל $m,n\in\mathbb{Z}$ $(mx+n)^2+(my)^2\geq c\left(m^2+n^2\right)$. אם $m=0$, אז צריך להתקיים $n^2\geq cn^2$ כלומר נדרוש $0<c\leq 1$.
כעת נניח כי $m\neq 0$. נחלק בm^2 ונקבל $\left(x+\frac{n}{m}\right)^2+y^2\geq c\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)$. נסמן $t=\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}$, אז צריך למצוא c כך שלכל $t\in\mathbb{Q}$, $|x|\leq R$ ו$y\geq\delta$ מתקיים $(x+t)^2+y^2\geq c\left(1+t^2\right)\iff\frac{(x+t)^2+y^2}{1+t^2}\geq c$. ניקח $c=\frac{\delta^2}{1+(R+\delta)^2}$ ונראה כי הוא מקיים את הדרוש: עבור $|t|\leq R+\delta$, $1+t^2\leq 1+(R+\delta)^2$ ולכן

$$\frac{(x+t)^2+y^2}{1+t^2}\quad\geq\quad\frac{(x+t)^2+y^2}{1+(R+\delta)^2}\geq\frac{y^2}{1+(R+\delta)^2}\geq\frac{\delta^2}{1+(R+\delta)^2}=c$$

כנדרש.

כעת יהי $|t| > R+\delta$. אז

$$\left|\frac{x}{t}\right| \quad \leq \quad \frac{|x|}{R+\delta} \leq \frac{R}{R+\delta}$$

ולכן

$$\left|1+\frac{x}{t}\right| \geq 1-\left|\frac{x}{t}\right| \quad > \quad 1-\frac{R}{R+\delta} = \frac{\delta}{R+\delta}$$

נקבל $\left(x+t\right)^2 > \frac{\delta^2 t^2}{(R+\delta)^2}$ ולכן

$$\frac{\left(x+t\right)^2+y^2}{1+t^2} \geq \frac{\left(x+t\right)^2}{1+t^2} \geq \frac{\delta^2 t^2}{\left(R+\delta\right)^2\left(1+t^2\right)} \quad = \quad \frac{\delta^2}{\left(R+\delta\right)^2}\cdot\frac{t^2}{1+t^2}$$

הפונקציה $\frac{1}{s+1} - 1 = \frac{s}{s+1}$ עולה בתחום $s>0$ ו־$t^2 > \left(R+\delta\right)^2$ ולכן $\frac{t^2}{1+t^2} > \frac{(R+\delta)^2}{1+(R+\delta)^2}$ ובסה"כ נקבל

$$\frac{\left(x+t\right)^2+y^2}{1+t^2} \quad > \quad \frac{\delta^2}{\left(R+\delta\right)^2}\cdot\frac{\left(R+\delta\right)^2}{1+\left(R+\delta\right)^2} = \frac{\delta^2}{1+\left(R+\delta\right)^2} = c$$

לבסוף, הטור $\sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{\left(m\tau+n\right)^k}$ הוא טור פונקציות אנליטיות ב־$\mathcal{H}$ המתכנס במ"ש נקודתית בקבוצות קומפקטיות ב־$\mathcal{H}$, ולכן ממשפט ויירשטראס מגדיר פונקציה אנליטית בחצי־המישור. ∎

1.3 פיתוח פורייה

תהי $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית כך שעבור $k\in\mathbb{Z}$ נתון מתקיים לכל $\tau\in\mathcal{H}$ ולכל $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$ מתקיים $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(c\tau+d\right)^k f\left(\tau\right)$. בפרט, עבור המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $f\left(\tau+1\right)=f\left(\tau\right)$ ולכן f תלויה ב־$e^{2\pi i\tau}$. לכל $z\in\mathcal{H}$ נגדיר $\tilde{f}\left(e^{2\pi iz}\right)=f\left(z\right)$, אז $\tilde{f}$ מוגדרת היטב.

עבור $z=x+yi$, $e^{2\pi iz}=e^{-2\pi y}e^{2\pi ix}$. $0<\left|e^{2\pi iz}\right|=e^{-2\pi y}<1$, ולכן y נקבע באופן יחיד. x נקבע מודולו z.

לכן $z\mapsto e^{2\pi iz}$ מגדירה העתקה $\mathcal{H}\overset{\sim}{\to}D^*=\left\{q\in\mathbb{C}\mid 0<|q|<1\right\}$. $\tilde{f}$ אנליטית ב־D^*, כי בסביבה קטנה של $a\in D^*$ יש ענף אנליטי של $\log q$ ובסביבה זו $\tilde{f}\left(q\right)=f\left(\frac{\log q}{2\pi i}\right)$ היא הרכבה של פונקציות אנליטיות.

ל־$\tilde{f}\left(q\right)$ יש פיתוח לטור לורן סביב $q=0$ בתחום D^*: $\tilde{f}\left(q\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n q^n$, המתכנס במידה שווה בכל תת־קבוצה קומפקטית של D^*. מכאן נקבל את טור פורייה של f: $f\left(z\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{2\pi iz\cdot n}$ ל־$z\in\mathcal{H}$ (טור לורן של $\tilde{f}\left(q\right)$ נקרא פיתוח־q-expansion/q של $f\left(z\right)$).

משפט 1.27 יהי $k \geq 4$ זוגי. פיתוח־q של $G_k(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \cdot \tau}$ מקיים $a_n = 0$ לכל $n < 0$, כלומר $G_k(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$, ומכאן $\tilde{G}_k(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ אנליטית בעיגול היחידה.

הערה 1.28 במקרה זה נאמר כי $G_k(\tau)$ **אנליטית ב**∞.

הוכחה: די להראות שקיים הגבול $\lim_{q \to 0} \tilde{G}_k(q)$. בסימונים הקודמים, $q \to 0$ אם ורק אם $y \to \infty$. נסמן $\Omega = \left\{x + yi \in \mathcal{H} \mid y \geq 1, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$, אז די להראות את קיום הגבול $\lim_{\substack{\tau \to \infty \\ \tau \in \Omega}} G_k(\tau)$. ראינו כי $\sum \frac{1}{(m\tau+n)^k}$ מתכנס במידה שווה בΩ, ולכן $\lim_{\substack{\tau \to \infty \\ \tau \in \Omega}} \sum \frac{1}{(m\tau+n)^k} = \sum \lim_{\substack{\tau \to \infty \\ \tau \in \Omega}} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$. המחוברים שואפים ל0 כאשר $m \neq 0$ ולכן נקבל

$$\lim_{\substack{\tau \to \infty \\ \tau \in \Omega}} \sum \frac{1}{(m\tau+n)^k} = \sum_{n \neq 0} \lim_{\substack{\tau \to \infty \\ \tau \in \Omega}} \frac{1}{n^k} = 2\zeta(k)$$

■

הגדרה 1.29 יהי $k \in \mathbb{Z}$. **תבנית מודולרית ממשקל** k היא פונקציה $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ המקיימת:

1. f אנליטית בכל $\mathcal{H}$.
2. לכל $\tau \in \mathcal{H}$ ולכל $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, מתקיים $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$ (אוטומורפיות).
3. f אנליטית ב∞: לכל $n < 0$, המקדם a_n בפיתוח־q של f הוא $a_n = 0$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$.

פונקציה המקיימת את תכונות 1 ו2 ול$\tilde{f}$ יש קוטב ב0 (לf יש קוטב ∞), נקראת פונקציה מודולרית ממשקל k.

2 החבורה המודולרית ותת־חבורות קונגרואנציה

2.1 החבורה $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ופעולתה על $\mathcal{H}$

גם $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathcal{H}$ ע"י העתקות מוביוס: $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. ראינו כי עבור $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathcal{H}$,

$$\mathrm{Im}(\gamma \cdot z) = \frac{\mathrm{Im} z}{|cz+d|^2} \cdot \det\gamma > 0$$

ולכן $\gamma \cdot \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$. מכאן ניתן להראות כי לכל $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ מתקיים $g \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H}$ ולמעשה g מגדירה העתקה חד־חד־ערכית ועל $\mathcal{H}$. עבור $g = \pm I_2$, $g \cdot z = z$ היא הזהות. אין איברים אחרים המגדירים זהות: אם לכל $z \in \mathcal{H}$ מתקיים $g \cdot z = z$ אז $az + b = cz^2 + dz$ אז $cz^2 + (d-a)z + b = 0$ לכל $z \in \mathcal{H}$ ומכאן $a = d$ ו$c = b = 0$, כלומר $g = aI_2$ ו $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \iff g = \pm I_2$.

נשים לב כי גם $Z\left(\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)\right)=\left\{\pm I_2\right\}$. נתבונן בחבורת המנה $\mathrm{PSL}_2\left(\mathbb{R}\right)=\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)/\left\{\pm I_2\right\}$, אז $\mathrm{PSL}_2\left(\mathbb{R}\right)$ פועלת בנאמנות על $\mathcal{H}$. בנוסף $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)$ פועלת טרנזיטיבית על $\mathcal{H}$. למעשה, גם התת־חבורה $B=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{R},a\neq0\right\}$ פועלת טרנזיטיבית (אפשר למצוא העתקת מוביוס מתאימה מהצורה הזאת).

$i\in\mathcal{H}$. נמצא את המייצב של i ב$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)$: $g\cdot i=\frac{ai+b}{ci+d}=i\Longrightarrow ai+b=-c+di\Longrightarrow a=d,b=-c$ ולכן $g=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ עם $a^2+b^2=1$. זוהי תת־חבורה של $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)$ האיזומורפית למעגל היחידה ע"י $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\mapsto a+bi$ ומסומנת $\mathrm{SO}\left(2\right)$. היא תת־חבורה קומפקטית של $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)$ (למעשה קומפקטית מקסימלית), נסמן $G=\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)$, $K=\mathrm{SO}\left(2\right)$. יש העתקה חד־חד־ערכית ועל $t:{}^G/_K\to\mathcal{H}$ הנתונה ע"י $t\left(gK\right)=g\cdot i$.

תהי $g\in\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)$, אז מטרנזיטיביות קיים $b\in B$ עבורו $g\cdot i=b\cdot i$, ולכן $b^{-1}g\in K$ כלומר $g\in bK$. מכאן נובע כי $G=B\cdot K$ (זהו פירוק Iwasawa. הוא יחיד עד כדי $B\cap K=\left\{\pm I_2\right\}$).

יש לנו התאמה $t:{}^G/_K\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}$ ע"י $gK\mapsto g\cdot i$.

טענה 2.1 t גם הומיאומורפיזם (כאשר על ${}^G/_K$ ניקח את טופולוגיית המנה).

הוכחה: נסמן ב $\nu:G\to{}^G/_K$ את העתקת המנה, אז היא רציפה, על ופתוחה. תהי $V\subseteq\mathcal{H}$ פתוחה.

$$t^{-1}\left(V\right)=\left\{gK\mid g\cdot i\in V\right\}$$

ההעתקה $\varphi:G\times\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ המוגדרת ע"י $\left(g,z\right)\mapsto g\cdot z$, כלומר $\varphi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},z\right)=\frac{az+b}{cz+d}$ היא רציפה. $t^{-1}\left(V\right)=\left\{gK\mid\left(g,i\right)\in\varphi^{-1}\left(V\right)\right\}$. $\varphi^{-1}\left(V\right)$ פתוחה, ולכן אם $\left(g,i\right)\in\varphi^{-1}\left(V\right)$ אז יש סביבה $g\in U'$ כך ש $U'\times\left\{i\right\}\subseteq\varphi^{-1}\left(V\right)$ ולכן $U=\left\{g\in G\mid\left(g,i\right)\in\varphi^{-1}\left(V\right)\right\}$ פתוחה בG. מכאן $\nu\left(U\right)$ פתוחה וברור כי $t^{-1}\left(V\right)=\nu\left(U\right)$.

כעת נראה כי t^{-1} רציפה: תהי $W\subseteq{}^G/_K$ פתוחה. $t\left(W\right)=W\cdot i=\nu^{-1}\left(W\right)\cdot i$. נסמן $V=\nu^{-1}\left(W\right)$, אז V פתוחה בG, וכן $V\cdot K=V$. יהי $g\cdot i\in V\cdot i$, $g\in V$. כיוון ש$VK=V$, ניתן לקחת $k\in K$ עבורו $gk\in B$ ולכן ניתן להניח כי $g\in B\cap V$. נכתוב $g=\begin{pmatrix}a & x\\ & a^{-1}\end{pmatrix}$ אז $g\cdot i=a^2i+ax$.

נתבונן במטריצות מהצורה $g'=\begin{pmatrix}\sqrt{1+\frac{t}{a^2}} & \frac{y}{a^2\sqrt{1+\frac{t}{a^2}}}\\ & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t}{a^2}}}\end{pmatrix}$, כאשר $\left|t\right|<\varepsilon_0a^2$, $\left|y\right|<$

$\delta_0 a^2$. עבור $\varepsilon_0, \delta_0 > 0$ קטנים דיים, קיים $g \cdot g' \in V$.

$$\begin{aligned}
gg' \cdot i &= g \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{t}{a^2}} & \frac{y}{a^2\sqrt{1+\frac{t}{a^2}}} \\ & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t}{a^2}}} \end{pmatrix} \cdot i \\
&= g \cdot \left(\left(1 + \frac{t}{a^2} \right) i + \frac{y}{a^2} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a & x \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot \left(\left(1 + \frac{t}{a^2} \right) i + \frac{y}{a^2} \right) \\
&= \frac{a\left(\left(1+\frac{t}{a^2}\right) i + \frac{y}{a^2} \right) + x}{a^{-1}} \\
&= \left(a^2 + t\right) i + y + ax \\
&= \left(a^2 i + ax\right) + (y + it) \\
&= g \cdot i + (y + ti)
\end{aligned}$$

כלומר ניתן לקבל סביבה שלמה של $g \cdot i$, המוכלת ב$t(W)$. ■

2.2 תת־חבורות דיסקרטיות

תהי G חבורה קומפקטית־מקומית האוסדורף, ותהי K תת־חבורה קומפקטית. G פועלת ברציפות על מרחב המנה ${}^G/_K$.

טענה 2.2 המרחב ${}^G/_K$ האוסדורף.

הוכחה: יהיו $gK, hK \in {}^G/_K$ שונים, אזי $g^{-1}h \notin K$. נתבונן בפונקציה הרציפה $f : G \times G \to G$, $f(x,y) = x^{-1}y$, אזי $(g,h) \notin f^{-1}(K)$. K סגורה, ולכן $f^{-1}(K)$ סגורה ב$G \times G$. מכאן שקיימות סביבות $g \in U \subseteq G$ ו $h \in V \subseteq G$ עבורן $U \times V$ זרה ל $f^{-1}(K)$. לכן $\nu(U) \cap \nu(V) = \emptyset$. $\nu(U)$ ו$\nu(V)$ סביבות זרות של $\nu(g)$ ו$\nu(h)$. ■

טענה 2.3 תהי $A \subseteq {}^G/_K$ קומפקטית. אז גם $\nu^{-1}(A) \subseteq G$ קומפקטית.

הוכחה: נכתוב $G = \bigcup_\alpha U_\alpha$ כאשר U_α פתוחות ו$\overline{U_\alpha}$ קומפקטיות (הכיסוי קיים כי G קומפקטית מקומית). אז ${}^G/_K = \bigcup_\alpha \nu(U_\alpha)$ כיסוי פתוח ובפרט כיסוי ל A. קיים תת־כיסוי סופי $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \nu(U_{\alpha_i})$ $\Longleftarrow$

$$\nu^{-1}(A) \quad \subseteq \quad \bigcup_{i=1}^n \nu^{-1}\left(\nu\left(U_{\alpha_i}\right)\right) = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{\alpha_i} K$$

הקבוצה $\overline{U}_{\alpha_i} K$ קומפקטית כתמונה רציפה ע"י העתקת הכפל $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$ של הקבוצה הקומפקטית $\overline{U}_{\alpha_i} \times K$.

מכאן $\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}\overline{K}$ קומפקטית. A סגורה (כי ${}^G/_K$ האוסדורף וA קומפקטית) ולכן $\nu^{-1}(A)$ סגורה וחלקית לקומפקטית $\Longleftarrow$ $\nu^{-1}(A)$ קומפקטית. ■

הגדרה 2.4 תת־חבורה $\Gamma \subseteq G$ היא **דיסקרטית** אם הטופולוגיה המושרה על Γ מG היא דיסקרטית (כל נקודה של Γ היא פתוחה בΓ).

דוגמה $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = G$

טענה 2.5 אם $\Gamma \subseteq G$ דיסקרטית, אז Γ סגורה ב־G.

הוכחה: $\Gamma \supseteq \{1\}$ קבוצה פתוחה, אז קיימת סביבה $G \supseteq U \ni 1$, $\Gamma \cap U = \{1\}$. נתבונן בהעתקה $f : G \times G \to G$, $f(x,y) = x^{-1}y$. אז $f(1,1) = 1$ ו־f רציפה, אז $(1,1) \in f^{-1}(U)$ סביבה פתוחה. לכן קיימת סביבה $1 \in V \subseteq G$ עבורה $V^{-1}V \subseteq G$.

אם Γ סופית, הטענה ברורה. אחרת, נניח בשלילה שקיים $g \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$. gV סביבה של g ולכן קיים $g \neq \gamma_1 \in \Gamma \cap gV$. גם $(gV) \setminus \{\gamma_1\}$ סביבה של g ולכן קיים $g \neq \gamma_2 \in \Gamma \cap ((gV) \setminus \{\gamma_1\})$, כלומר מצאנו $g \neq \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \cap gV$ עם $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

$$\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in \left(V^{-1}g^{-1}gV\right) \cap \Gamma \quad = \quad \left(V^{-1}V\right) \cap \Gamma = U \cap \Gamma = \{1\}$$

ולכן $\gamma_1 = \gamma_2$. סתירה. ∎

משפט 2.6 תהי $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה. אז Γ דיסקרטית אם ורק אם לכל שתי תת־קבוצות קומפקטיות $A, B \subseteq {}^{G}/_{K}$, הקבוצה $\{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma \cdot A) \cap B \neq \emptyset\}$ סופית.

הוכחה: תהיינה $A, B \subseteq {}^{G}/_{K}$. נסמן $C = \nu^{-1}(A)$, $D = \nu^{-1}(B)$, אז $C, D \subseteq G$ קומפקטיות. נניח כי $\gamma \in \Gamma$ מקיים $\gamma \cdot A \cap B \neq \emptyset$. אז

$$\gamma \cdot C \cap D \quad = \quad \gamma \cdot \nu^{-1}(A) \cap \nu^{-1}(B) = \nu^{-1}(\gamma \cdot A) \cap \nu^{-1}(B) = \nu^{-1}((\gamma \cdot A) \cap B) \neq \emptyset$$

לכן $\gamma \in ((\gamma C) \cap D)\, C^{-1} \cap \Gamma \subseteq DC^{-1} \cap \Gamma$. מצאנו כי

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma A \cap B \neq \emptyset\} \quad \subseteq \quad \Gamma \cap DC^{-1}$$

נניח כי Γ דיסקרטית, אז היא סגורה. C, D קומפקטיות $\Longleftarrow$ DC^{-1} קומפקטית (תמונה רציפה של $D \times C$ ע"י $(x,y) \mapsto xy^{-1}$). $\Longleftarrow$ $\Gamma \cap \left(DC^{-1}\right)$ סגורה וחלקית לקבוצה הקומפקטית DC^{-1}, ולכן קומפקטית. כמו כן, $\Gamma \cap \left(DC^{-1}\right)$ חלקית לקבוצה הדיסקרטית Γ, ולכן סופית, וגם תת־קבוצה שלה היא סופית.

נניח עתה כי הקבוצה לעיל סופית לכל $A, B \subseteq {}^{G}/_{K}$ קומפקטיות. ניקח $A = \{\nu(1)\} = \{K\}$. תהי $1 \in V \subseteq G$ סביבה עם סגור קומפקטי, וניקח $B = \nu\left(\overline{V}\right)$. מהנתון, $\left\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \in \nu\left(\overline{V}\right)\right\}$ סופית. קבוצה זו מכילה את $\Gamma \cap V$ ולכן $\Gamma \cap V$ סופית. יהי $\gamma \in \Gamma$. γV סביבה של γ ומתקיים כי $\Gamma \cap (\gamma V) = \gamma\Gamma \cap \gamma V = \gamma(\Gamma \cap V)$ קבוצה סופית. כלומר, לכל $\gamma \in \Gamma$ יש סביבה γV עבורה $\gamma V \cap \Gamma$ סופית. זו סביבה של γ ב־Γ. כל נקודה של Γ סגורה ב־Γ, ולכן המשלים של $\{\gamma\}$ ב־$\Gamma \cap \gamma V$ סגור ב־$\Gamma \cap \gamma V$ (כי הוא סופי), ולכן $\{\gamma\}$ קבוצה פתוחה ב־$\Gamma \cap \gamma V$ שפתוחה ב־Γ $\Longleftarrow$ $\{\gamma\}$ פתוחה ב־Γ. ∎

מסקנה 2.7 תהי $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה דיסקרטית, ונתבונן בפעולת Γ על ${}^{G}/_{K}$ משמאל. אז לכל $z \in {}^{G}/_{K}$ המייצב

$$\Gamma_z = \mathrm{stab}_\Gamma z \quad = \quad \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z\}$$

הוא תת־חבורה סופית.

הוכחה: הקבוצה $\{z\} \subseteq {}^{G}/_{K}$ קומפקטית. עבור $A = B = \{z\}$ נקבל מהמשפט כי Γ_z סופית. ■

טענה 2.8 ${}^{G}/_{K}$ קומפקטי מקומית.

הוכחה: יהי $z = \nu(x) \in {}^{G}/_{K}$, ותהי $x \in U \subseteq G$ סביבה בעלת סגור קומפקטי. אז $z \in \nu(U)$ סביבה ב${}^{G}/_{K}$. מרציפות ν, $\nu\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{\nu(U)}$.
$\overline{U}$ קומפקטי $\Longleftarrow$ $\nu\left(\overline{U}\right)$ קומפקטי $\Longleftarrow$ $\nu\left(\overline{U}\right)$ סגור. מכיוון ש $\nu(U) \subseteq \nu\left(\overline{U}\right)$ נקבל כי $\overline{\nu(U)} \subseteq \nu\left(\overline{U}\right)$, כלומר $\nu\left(\overline{U}\right) = \overline{\nu(U)}$, כלומר $z \in \nu(U)$ סביבה בעלת סגור קומפקטי. ■

טענה 2.9 תהי $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה דיסקרטית. אז לכל $z \in {}^{G}/_{K}$ קיימת סביבה $z \in Z$ עבורה $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma Z \cap Z \neq \emptyset\}$.

הוכחה: לכל סביבה $z \in Z$ מתקיים $\Gamma_z \subseteq \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma Z \cap Z \neq \emptyset\}$. נראה את ההכלה השנייה. מהטענה הקודמת, קיימת סביבה $z \in E \subseteq {}^{G}/_{K}$, עם $\overline{E}$ קומפקטי. לפי המשפט, הקבוצה $\left\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot \overline{E} \cap \overline{E} \neq \emptyset\right\}$ סופית, ולכן גם התת־קבוצה $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot E \cap E \neq \emptyset\}$ סופית. נרשום את איבריה

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma E \cap E \neq \emptyset\} \quad = \quad \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$$

ונניח בה"כ כי לכל $1 \leq i \leq j$ מתקיים $\gamma_i \cdot z = z$ ולכל $j < i \leq r$ מתקיים $\gamma_i \cdot z \neq z$.
לכל $j+1 \leq i \leq r$ נבחר סביבות $z \in E_i \subseteq {}^{G}/_{K}$, $\gamma_i \cdot z \in L_i \subseteq {}^{G}/_{K}$ עם $L_i \cap E_i = \emptyset$ (מהאוסדורף). נגדיר $\emptyset \neq Z = E \cap E_{j+1} \cap \cdots \cap E_r \cap \gamma_{j+1}^{-1} L_{j+1} \cap \cdots \cap \gamma_r^{-1} L_r$.
אז $z \in Z$ סביבה. נניח כי $\gamma \in \Gamma$ מקיים $\gamma Z \cap Z \neq \emptyset$ $\Longleftarrow$ בפרט $\gamma E \cap E \neq \emptyset$ $\Longleftarrow$ $\gamma \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$. קיים $1 \leq i \leq r$ עבורו $\gamma = \gamma_i$ ולכן $\gamma_i Z \cap Z \neq \emptyset$. נניח בשלילה כי $j+1 \leq i \leq r$. אז $Z \subseteq \gamma_i^{-1} L_i$, אז $\gamma_i Z \subseteq L_i$. $Z \subseteq E_i$ ולכן $\emptyset \neq \gamma_i Z \cap Z \subseteq L_i \cap E_i = \emptyset$ וזו סתירה. לכן, $1 \leq i \leq j$ ואז $\gamma_i z = z$, כלומר $\gamma = \gamma_i \in \Gamma_z$. ■

טענה 2.10 תהי $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה דיסקרטית. תהיינה $z_1, z_2 \in {}^{G}/_{K}$ עם $z_2 \notin \Gamma \cdot z_1$, אז קיימות סביבות $z_1 \in Z_1 \subseteq {}^{G}/_{K}$ ו $z_2 \in Z_2 \subseteq {}^{G}/_{K}$ כך שלכל $\gamma \in \Gamma$ מתקיים $\gamma Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

הוכחה: תהיינה $z_i \in E_i \subseteq {}^{G}/_{K}$ $(i = 1, 2)$ סביבות בעלות סגור קומפקטי. כמו קודם, $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma E_1 \cap E_2 \neq \emptyset\}$ קבוצה סופית, ונסמן את איבריה $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$. מהנתון, לכל $1 \leq i \leq r$, $\gamma_i \cdot z_1 \neq z_2$. נבחר סביבות $\gamma_i \cdot z_1 \in E_{i,1}$, $z_2 \in E_{i,2}$ עם $E_{i,1} \cap E_{i,2} = \emptyset$. נגדיר

$$\begin{aligned} Z_1 &= E_1 \cap \gamma_1^{-1} E_{1,1} \cap \cdots \cap \gamma_r^{-1} E_{r,1} \\ Z_2 &= E_2 \cap \gamma_1^{-1} E_{1,2} \cap \cdots \cap \gamma_r^{-1} E_{r,2} \end{aligned}$$

אז $z_1 \in Z_1$ ו$z_2 \in Z_2$, וכן Z_1, Z_2 פתוחות. יהי $\gamma \in \Gamma$ ונניח בשלילה כי $\gamma Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, אז $\gamma E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, ולכן קיים $1 \leq i \leq r$ עבורו $\gamma = \gamma_i$. לכן $E_{i,1} \cap E_{i,2} = \emptyset$, אבל $\emptyset \neq \gamma_i Z_1 \cap Z_2 \subseteq \gamma_i \left(\gamma_i^{-1} E_{i,1}\right) \cap E_{i,2}$, וזו סתירה. ■

מסקנה 2.11 תהי $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה דיסקרטית. נסמן $S = {}^{G}/_{K}$ עם פעולה של Γ משמאל. אז ${}_{\Gamma} \setminus {}^{S}$ (עם טופולוגיית המנה) היא האוסדורף.

הוכחה: תהיינה $z_1, z_2 \in {}^{G}/_{K}$, $\Gamma \cdot z_1 \neq \Gamma \cdot z_2$. מהטענה הקודמת, קיימות סביבות $z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_1 \subseteq {}^{G}/_{K}$. נסמן את העתקת המנה $\rho : S \to {}_{\Gamma} \setminus {}^{S}$, אז ρ רציפה, על ופתוחה. בפרט, $\rho(z_1) \in \rho(Z_1)$, $\rho(z_2) \in \rho(Z_2)$ סביבות ב ${}_{\Gamma} \setminus {}^{G}/_{K}$ ו $\rho(Z_1) \cap \rho(Z_2) = \emptyset$: אחרת קיימים $z_1' \in Z_1$, $z_2' \in Z_2$ ו$\gamma \in \Gamma$ עבורם $\gamma \cdot z_1' = z_2'$ $\Leftarrow$ $\gamma Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$. סתירה ל$Z_1, Z_2$ מהטענה הקודמת. ■

נחזור לקבוצות $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $K = \mathrm{SO}(2)$, ${}^{G}/_{K} \cong \mathcal{H}$. תהי $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ תת־חבורה דיסקרטית הפועלת על $\mathcal{H}$, אז $\mathcal{H}$ הוא מרחב האוסדורף. לכל $\tau \in \mathcal{H}$, $\Gamma_\tau = \mathrm{stab}_\Gamma \tau$ היא תת־חבורה סופית. לכל $z \in \mathcal{H}$, יש סביבה $z \in Z \subseteq \mathcal{H}$ עבורה $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma Z \cap Z \neq \emptyset\}$.

טענה 2.12 לכל $z \in \mathcal{H}$, Γ_z חבורה ציקלית סופית.

הוכחה: קיים $g \in G$ עבורו $g \cdot i = z$.

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot z = z \quad &\Longleftrightarrow \quad \gamma \cdot g \cdot i = g \cdot i \\
&\Longleftrightarrow \quad g^{-1}\gamma g \cdot i = i \\
&\Longleftrightarrow \quad g^{-1}\gamma g \in \mathrm{SO}(2) \\
&\Longleftrightarrow \quad \gamma \in g \cdot \mathrm{SO}(2) \cdot g^{-1}
\end{aligned}$$

נקבל כי $\Gamma_z = \Gamma \cap g\mathrm{SO}(2)\,g^{-1}$. $\mathrm{SO}(2)$ איזומורפי לS^1, ולכן גם $g\mathrm{SO}(2)\,g^{-1}$. מכאן Γ_z איזומורפית לתת־חבורה סופית (דיסקרטית) של מעגל היחידה, ולכן ציקלית סופית. ■

נתעניין בתת־החבורות הדיסקרטיות הבאות: עבור $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod N \right\} \\
\Gamma_1(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod N \right\} \\
\Gamma(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(1) \mid b \equiv 0 \pmod N \right\} \\
&= \{ g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid g \equiv I_2 \pmod N \}
\end{aligned}$$

נבחין ב $\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. $\Gamma(N) \lhd \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ כגרעין של ההומומורפיזם $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, $g \mapsto g \pmod N$. כיוון ש $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ חבורה סופית, $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] < \infty$.

הגדרה 2.13 תת־חבורה $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ המכילה תת־חבורה מהצורה $\Gamma(N)$ נקראת **תת־חבורת קונגרואנציה**.

2.3 נקודות אליפטיות ונקודות חוד (cusp) ביחס לתת־חבורה דיסקרטית $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

תהי $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. לg יש אחת מבין שתי צורות ז'ורדן (מעל $\mathbb{C}$), אם נניח $g \neq \pm I$: $g \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$, או $g \sim \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ עבור $\lambda \neq \pm 1$. אם $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, אז גם

$\lambda \neq \overline{\lambda}$ ערך עצמי של g ולכן $\left\{\lambda, \lambda^{-1}\right\} = \left\{\lambda, \overline{\lambda}\right\}$. נקבל כי $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$. (כי $\lambda \neq \pm 1 \Longleftarrow$ $\lambda \neq \lambda^{-1}$), ולכן $|\lambda| = 1$. במקרה זה, g **אליפטית**.

אם $\lambda \in \mathbb{R}$ אז g **היפרבולית**.

אם $g \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ & \varepsilon \end{pmatrix}$ (המקרה הראשון), g **פרבולית**.

דוגמה כל איברי $\pm 1 \neq g \in \mathrm{SO}(2)$ הם אליפטיים, כי הם ניתנים ללכסון ובעלי ערכים עצמיים מערך מוחלט 1.

יהי $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ מייצב של נקודה $z \in \mathcal{H}$, כלומר $g \cdot z = z$. אז

$$g \in \mathrm{stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} z = h\left(\mathrm{stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} i\right) h^{-1} = h \cdot \mathrm{SO}(2) \cdot h^{-1}$$

עבור $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ המקיים $g = h \cdot i$, ולכן גם g אליפטי.

להפך, גם הטענה הבאה נכונה:

טענה 2.14 יהי $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ אליפטי, אז קיימת נקודה יחידה $z \in \mathcal{H}$ עבורה $g \cdot z = z$.

הוכחה: נניח כי לg יש ערכים עצמיים $\lambda = e^{i\theta}$, $\lambda^{-1} = \overline{\lambda} = e^{-i\theta}$, אז $\lambda + \lambda^{-1} = 2\cos\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$, ולכן $|\mathrm{tr} g| = \left|\lambda + \lambda^{-1}\right| < 2$.

נכתוב $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, אז צריך למצוא פתרון למשוואה $z = \frac{az+b}{cz+d}$, השקולה למשוואה

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

נבחין כי אם $c = 0$ אז $ad = 1$ ואז $|\mathrm{tr} g| = \left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$, בסתירה למה שמצאנו. לכן נקבל זוג שורשים

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c} \\ \underbrace{}_{\substack{\det=1 \\ 4bd=4ac-4}} &= \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \\ \underbrace{}_{|a+d|<2} &= \frac{a - d \pm \sqrt{4 - (a+d)^2} \cdot i}{2c} \end{aligned}$$

קיבלנו שני פתרונות צמודים, האחד ב$\mathcal{H}$ והשני ב$-\mathcal{H}$. ■

מסקנה 2.15 מההוכחה, g אליפטי $\iff$ $|\mathrm{tr} g| < 2$.

נרחיב את פעולת $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ גם לשפת $\mathcal{H}$, $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$: $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$, ואם $cx+d = 0$ אז נגדיר $\frac{ax+b}{cx+d} = \infty$. זאת פעולה טרנזיטיבית (על $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$): למשל, ניתן להעתיק $a \mapsto \infty$ ע"י $\begin{pmatrix} a & ad-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \cdot \infty = a$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \infty = \infty$ ולכן $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot \infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

המייצב של ∞ ב־$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ הוא $B=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}\right\}$. לכל $x\in\mathbb{R}$, נקבל כי המייצב של x ב־$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ צמוד ל־B.

הגדרה 2.16 תהי $\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ תת־חבורה דיסקרטית. נקודה $z\in\mathcal{H}$ תקרא **נקודה אליפטית של** Γ אם Γ_z מכיל איבר אליפטי. נקודה $z\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ תקרא **נקודת חוד של** Γ אם Γ_z מכיל איבר פרבולי.

הערה 2.17 עבור נקודה אליפטית של Γ, $z\in\mathcal{H}$, נובע מהטענה הקודמת כי <u>כל</u> איברי Γ_z אליפטיים, פרט ל־$\pm I_2$. (טענה זו נכונה גם לנקודות חוד, נוכיח זאת)
אם z אליפטית ביחס ל־Γ, אז $\gamma\cdot z$ אליפטית ביחס ל־Γ, לכל $\gamma\in\Gamma$, כי $\Gamma_{\gamma\cdot z}=\gamma\Gamma_z\gamma^{-1}$.

טענה 2.18 תהי $\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ תת־חבורה דיסקרטית ותהי $z\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ נקודת חוד של Γ, אז כל איברי Γ_z (פרט ל־$\pm I$) הם פרבולים, ומתקיים

$$\Gamma_z/_{\Gamma_z\cap\{\pm I\}} \quad\cong\quad \mathbb{Z}$$

הוכחה: $\mathrm{stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}z=gBg^{-1}$, כאשר $g\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ מקיים $g\cdot\infty=z$ ו $B=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}\right\}$. נניח כי $g\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}g^{-1}$ פרבולי ומייצב את z, אז בהכרח $a=\pm1$ (משיקולי עקבה). נסמן ב־$P(z)$ את המייצב הפרבולי של z, כולל $\pm I_2$, אז

$$P(z) \quad=\quad \left\{\pm g\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}g^{-1} \mid t\in\mathbb{R}\right\}\cong\mathbb{R}\times\{\pm I_2\}$$

קיימת תת־חבורה $\Gamma_z'\subseteq\mathbb{R}$ עבורה

$$\Gamma\cap P(z) \quad=\quad \left\{\pm g\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}g^{-1} \mid t\in\Gamma_z'\right\}$$

אם $-I\in\Gamma$ אז $\Gamma_z'\cong {}^{\Gamma\cap P(z)}/_{\Gamma_z\cap\{\pm I\}}$ תת־חבורה דיסקרטית של $\mathbb{R}$.
אם $-I\notin\Gamma$, נתבונן ב $\widetilde{\Gamma_z}=g^{-1}\left(\Gamma\cap P(z)\right)g$. איברי חבורה זו הם מהצורה $\pm\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. מתקיים

$$\Gamma_z' \quad=\quad \left\{t\in\mathbb{R}\mid \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\widetilde{\Gamma_z}\text{ or -}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\widetilde{\Gamma_z}}_{\text{only one option is possible}}\right\}\subseteq\mathbb{R}$$

ו־Γ_z' דיסקרטית. לכן קיים $r\in\mathbb{R}^*$ עבורו $\Gamma_z'=r\mathbb{Z}$.

יהי $g\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} g^{-1} \in \Gamma_z$, אז

$$\pm\begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & r \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1}\end{pmatrix}^{-1} = \pm\begin{pmatrix} a & ar+b \\ & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ & a\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 1 & a^2r \\ & 1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\pm g\begin{pmatrix} 1 & a^2r \\ & 1\end{pmatrix} g^{-1}}_{\in\Gamma\cap P(z)} = \pm\left[\underbrace{g\begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1}\end{pmatrix} g^{-1}}_{\in\Gamma_z}\right]\left[\underbrace{g\begin{pmatrix} 1 & r \\ & 1\end{pmatrix} g^{-1}}_{\in\Gamma\cap P(z)}\right]\left[\underbrace{g\begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1}\end{pmatrix}^{-1} g^{-1}}_{\in\Gamma_z}\right]$$

(צד שמאל ב$\Gamma\cap P(z)$ כי בצד ימין יש הצמדה של איבר כנ"ל ע"י איבר מΓ_z)

נסיק כי $a^2\in\mathbb{Z}$, אבל גם $g\begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a\end{pmatrix} g^{-1}\in\Gamma_z$ (ההופכי) ולכן גם $\frac{1}{a^2}\in\mathbb{Z}$, ולכן $a=\pm1$ ומכאן כי $\pm g\begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1}\end{pmatrix} g^{-1} = \pm g\begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1\end{pmatrix} g^{-1}$, כלומר פרבולי. ■

טענה 2.19 בנוסף, לכל $\gamma\in\Gamma$, גם $\gamma\cdot z$ היא נקודת חוד.

הוכחה: $\Gamma_{\gamma\cdot z}=\gamma\Gamma_z\gamma^{-1}$. ■

דוגמה $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

1. <u>נקודות אליפטיות:</u> יהי $z\in\mathcal{H}$ ו $\pm I_2\neq\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, עבורן $\frac{az+b}{cz+d}=\gamma\cdot z=z$ $\Leftarrow$ $cz^2+(d-a)z-b=0$. אם $c=0$ אז $a=d=\pm1$ ואז $z+b=z$ $\Leftarrow$ $b=0$ $\Leftarrow$ $\gamma=\pm I_2$. לכן $c\neq0$. בה"כ $c>0$ כי $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1\end{pmatrix}\cdot z=z$ לכל $z\in\mathcal{H}$. ראינו כי $|a+d|<2$ וכן

$$z = \frac{a-d\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c} \underbrace{=}_{z\in\mathcal{H}} \frac{a-d+\sqrt{4-(a+d)^2}\cdot i}{2c}$$

מכיוון ש $a+d\in\mathbb{Z}$, נבדוק כל מקרה:

(א) $a+d=0$:

$$z = \frac{a-d+\sqrt{4}i}{2c} = \frac{a-d}{2c}+\frac{i}{c} = \frac{a}{c}+\frac{i}{c}$$

$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix}$ ואז $-a^2-bc=1$ והפולינום האופייני של γ הוא $x^2-\mathrm{tr}\gamma\cdot x+1=x^2+1$, ולכן $\gamma^2=-I$, כלומר γ מסדר 4. $\langle\gamma\rangle\cong\mathbb{Z}_4$.

תרגיל: עבור $z=\frac{a}{c}+\frac{i}{c}$ הזה מתקיים $\Gamma_z=\langle\gamma\rangle=\mathbb{Z}_4$.

(ב) $a+d=\pm1$:

$$z = \frac{a-d+\sqrt{3}\cdot i}{2c}=\frac{2a\mp1+\sqrt{3}\cdot i}{2c}$$

לכן $p_\gamma(x)=x^2\mp x+1$ ולכן $\gamma^3=\mp I_2$, אז γ מסדר 3 או 6. גם כאן, Γ_z מסדר 3 או 6.

2. נקודות החוד: יהיו $z\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\pm I_2\neq\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ פרבולי, $\gamma\cdot z=z$. ראינו כי $|a+d|=2$. אם $c=0$ אז $a=d=\pm1$ ואז $z+b=z$ $\Longleftarrow$ $z=\infty$ או $b=0$ - $b=0$ לא ייתכן כי $\gamma\neq\pm I_2$ ולכן $z=\infty$. אם $c\neq0$ אז

$$z = \frac{a-d\pm\underbrace{\sqrt{(a+d)^2-4}}_{0}}{2c}=\frac{a-d}{2c}\in\mathbb{Q}$$

כלומר כל נקודות החוד הן ∞ ו $\in\mathbb{Q}$.

להפך, אם c טבעי ו$a\in\mathbb{Z}$ זר לc, נמצא $b,d\in\mathbb{Z}$ עבורם $ad-bc=1$, כלומר $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. אז

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\infty = \frac{a}{c}$$

ולכן כל $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\infty=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ מסלול יחיד, וכולו נקודות חוד.

מסקנה 2.20 תהי $\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה. היא מאינדקס סופי $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})=\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma\cdot\gamma_i$. אז

$$\mathbb{Q}\cup\{\infty\} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\infty=\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma\cdot(\gamma_i\cdot\infty)$$

ולכן לΓ יש מספר סופי של מסלולים בקבוצת נקודות החוד $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. ל$z\in\mathcal{H}$, Γ_z חבורה ציקלית מסדר $1,2,3,4,6$.

משפט 2.21

1. תהי $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ מסדר 4. אז γ צמודה ל $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ או ל $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ <u>בתוך</u> $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (שתי המטריצות אינן דומות ב$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
2. תהי $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ מסדר 3. אז γ צמודה ל$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ או ל$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ <u>בתוך</u> $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (שתי המטריצות אינן דומות ב$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).

הוכחה:

1. γ מסדר 4, ובפרט לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עם ערכים עצמיים שהם שורשים פרימיטיביים של 1 מסדר 4, שהם $\lambda = i, \overline{\lambda} = -i$. נסיק כי $\gamma \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\gamma^2 = -I_2$.

מכאן $\mathbb{Z}[\gamma] = \{aI_2 + b\gamma \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ הוא איזומורפי ל$\mathbb{Z}[i]$ שהוא תחום שלמות ראשי.

מרחב העמודות $\mathbb{Z}^2$ הוא מודול מעל $\mathbb{Z}[\gamma]$ ביחס לפעולה $(aI + b\gamma)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + b\gamma\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. מודול זה חסר פיתול: יהיו $u, v, x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש $(uI + v\gamma)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

נכפיל ב$uI - v\gamma$ ונקבל $(u^2 + v^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ולכן $u^2 + v^2 = 0 \iff u = v = 0$ או $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

מכאן $\mathbb{Z}^2$ מודול נוצר סופית וחסר פיתול מעל תחום שלמות ראשי $\mathbb{Z}[i]$, ולכן חופשי: כלומר קיים בסיס $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ כך ש $\mathbb{Z}^2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[\gamma] \cdot \xi_i$. $\mathbb{Z}^2$ חבורה אבלית מדרגה 2, ואגף ימין חבורה אבלית חופשית מדרגה $2n$. לכן $n = 1$, כלומר קיים $\xi \in \mathbb{Z}^2$ עבורו $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[\gamma] \cdot \xi$.

נסמן $\eta = \gamma \cdot \xi$, אז $\gamma \cdot \eta = \gamma^2 \cdot \xi = -\xi$, ומכאן $\{\xi, \eta\}$ בת"ל מעל $\mathbb{R}$ (אחרת היה לγ ע"ע ממשי), ובפרט בת"ל מעל $\mathbb{Z}$. $\{\xi, \eta\}$ פורשים את $\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (a + b\gamma)\xi = a\xi + b\eta$$

ומכאן $\det\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} = \pm 1$.

$$\gamma \cdot \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & -\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם $\det\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} = 1$ נסמן $h = \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix}$ ונקבל דמיון $h^{-1}\gamma h = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. אם $\det\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} = -1$ אז נסמן $h = \begin{bmatrix} \eta & \xi \end{bmatrix}$, ומתקיים $\gamma \cdot h = h\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, כלומר $h^{-1}\gamma h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. כמו קודם, $\mathbb{Z}[\gamma] = \mathbb{Z}\left[e^{\frac{2\pi i}{3}}\right]$ תחום שלמות ראשי. מרחב העמודות $\mathbb{Z}^2$ הוא מודול חסר פיתול מעל $\mathbb{Z}[\gamma]$: γ מקיים $\gamma^2 + \gamma + 1 = 0$. אם $(u + v\gamma)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, נכפיל ב $u - (\gamma + I)v$:

$$\begin{aligned}(u - (\gamma + I)v)(u + v\gamma)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left(u^2 - (\gamma + I)uv + \gamma uv - (\gamma + I)\gamma \cdot v^2\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(u^2 - uv + v^2\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ולכן $u^2 - uv + v^2 = 0 \iff u = v = 0$ או $x = y = 0$.

כמו קודם, קיים $\xi \in \mathbb{Z}^2$ עבורו $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[\gamma] \cdot \xi$. נסמן $\eta = \gamma \cdot \xi$, אז $\gamma\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix}\eta & -\xi-\eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi & \eta\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ (כי $\gamma\cdot\eta = \gamma^2\cdot\xi = (-\gamma - I)\,\xi = -\xi-\eta$).
כמו קודם, $\{\xi,\eta\}$ בסיס ל־$\mathbb{Z}^2$ מעל $\mathbb{Z}$ ולכן שוב $\det\begin{bmatrix}\xi & \eta\end{bmatrix} = \pm 1$. אם הוא 1, נקבל כי $h^{-1}\gamma h = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ כאשר $h = \begin{bmatrix}\xi & \eta\end{bmatrix}$. אחרת נבחר $h = \begin{bmatrix}\eta & \xi\end{bmatrix}$ ונקבל $h^{-1}\gamma h = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

■

משפט 2.22 לפעולת $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ על הנקודות האליפטיות שלה יש שני מסלולים: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot i$ ו $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

הוכחה: תהי $z\in\mathcal{H}$ נקודה אליפטית של $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. ראינו כי המייצב $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))_z$ הוא חבורה ציקלית מסדר $3,4,6$. נבדוק את המקרים:

- סדר 4: יהי γ יוצר של המייצב מסדר 4. מהמשפט הקודם, קיים $h\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ עבורו $h^{-1}\gamma h = \pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$z = \gamma\cdot z = h\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}h^{-1}z$ (כי $\pm I_2$ פועלת טריוואלית) $\iff h^{-1}z = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}h^{-1}z = \frac{-1}{h^{-1}z} \iff h^{-1}\cdot z = i \iff z = h\cdot i\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot i$.

- סדר 3: יהי γ יוצר של המייצב. מהמשפט, קיים $h\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ כך ש $\gamma = h\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}h^{-1}$ או $\gamma = h\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}h^{-1}$. כלומר
$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}e^{\frac{2\pi i}{3}} = 1+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = h^{-1}z \iff \left(h^{-1}z\right)^2 - h^{-1}z + 1 = 0 \iff h^{-1}z = \frac{-1}{h^{-1}z-1} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}h^{-1}z \iff \gamma\cdot z = z$ ולכן $\gamma\cdot z = z \iff z = h\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}e^{\frac{2\pi i}{3}}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
באופן דומה מראים עבור $\gamma = h\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}h^{-1}$.

- סדר 6: יהי γ יוצר של המייצב, אז $\gamma^3 = -I$, ולכן $-\gamma$ מסדר 3. פעולת $-I$ היא הזהות, אז $\gamma\cdot z = z \iff (-\gamma)\cdot z = z \iff z\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

■

מסקנה 2.23 תהי $\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה, אז ל־Γ יש מספר סופי של מסלולים של נקודות אליפטיות ביחס אליה.

הוכחה: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma\cdot\gamma_i$. אם $z\in\mathcal{H}$ אליפטית של Γ, אז קיימת $h\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ כך ש $z = h\cdot i$ או $z = h\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$. נסמן $h\in\Gamma\cdot\gamma_j$, $h = \gamma\cdot\gamma_j$. $\gamma\in\Gamma$, אז

$$\begin{aligned} z &= h\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} = \gamma\gamma_j\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\in\Gamma\cdot\left(\gamma_j e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \\ z &= h\cdot i = \gamma\gamma_j(i)\in\Gamma\cdot(\gamma_j i) \end{aligned}$$

■

2.4 תחום יסודי (Fundamental Domain)

הגדרה 2.24 תהי $\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ תת־חבורה דיסקרטית. **תחום יסודי של** ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}}$ (ביחס לΓ) F הוא תת־קבוצה $F\subseteq\mathcal{H}$ המקיימת:

1. לכל $z\in\mathcal{H}$ קיימת $\gamma\in\Gamma$ כך ש $\gamma\cdot z\in\overline{F}$ (הסגור בתוך $\mathcal{H}$).
2. לכל $z_1,z_2\in F$ ו$\gamma\in\Gamma$ עבורם $\gamma\cdot z_1 = z_2$, בהכרח מתקיים $z_1 = z_2$ ו $\gamma = \pm I_2$.

לכל תת־חבורה דיסקרטית קיים תחום יסודי קשיר. לא נוכיח זאת, אבל כן נוכיח מספר מקרים פרטיים. למשל:

משפט 2.25 (תחום יסודי ל$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$): הקבוצה

$$F = \left\{z = x+yi \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, |z| > 1\right\}$$

היא תחום יסודי ל ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}}$.

הוכחה: נניח כי $z = x+yi\in\mathcal{H}$. נראה כי $\left\{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \mid |cz+d|\le 1\right\}$ קבוצה סופית: אכן אם $(cx+d)^2 + (cy)^2 \le 1$ אז בפרט $(cy)^2\le 1$, $y>0$ אז $c^2\le\frac{1}{y^2}$ ולכן $-\frac{1}{y}\le c\le\frac{1}{y}$.
$|d| - |c|\,|z| \le |cz+d| \le 1$ ולכן $|d|\le 1+|c|\,|z|$. לכל c נתון, נקבל מכאן מספר סופי של ערכים אפשריים $d\in\mathbb{Z}$.

מכאן נובע כי לקבוצה $Y = \{|cz+d| \mid c,d\in\mathbb{Z} \mid (c,d)=1\}$ יש מינימום. בפרט עבור $c=0$, $d=1$ נקבל כי המינימום ≤ 1. מבין איברי Y החסומים ע"י 1 (מספר סופי) נמצא את המינימום שהוא מספר חיובי.

עבור $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ראינו כי $\mathrm{Im}(\gamma\cdot z) = \frac{\mathrm{Im}z}{|cz+d|^2}$. למכנה יש ערך מינימלי חיובי, ולכן לקבוצה $\{\mathrm{Im}(\gamma\cdot z) \mid \gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\}$ יש מקסימום, $\mathrm{Im}(\gamma_0\cdot z)$ עבור $\gamma_0\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ כלשהו. $\begin{pmatrix} 1 & m \\ & 1\end{pmatrix}\gamma_0\cdot z = \gamma_0\cdot z + m$ ולכן אפשר ניתן לבחור $m\in\mathbb{Z}$ עבורו $-\frac{1}{2}\le\mathrm{Re}(\gamma_0\cdot z+m)\le\frac{1}{2}$. כמו כן, $\mathrm{Im}(\gamma_0\cdot z+m) = \mathrm{Im}(\gamma_0\cdot z)$. נסמן $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & m \\ & 1\end{pmatrix}\gamma_0\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. כעת $\mathrm{Im}(\gamma_1\cdot z)$ מקסימלי מבין $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ו $-\frac{1}{2}\le\mathrm{Re}(\gamma_1\cdot z)\le\frac{1}{2}$.

נראה כי $|\gamma_1 \cdot z| \geq 1$: נניח בשלילה כי $|\gamma_1 \cdot z| < 1$ ונפעיל את $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: נסמן $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \gamma_1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, אז

$$\begin{aligned} \gamma_2 \cdot z &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma_1 \cdot z = \frac{-1}{\gamma_1 \cdot z} = -\frac{\overline{\gamma_1 \cdot z}}{|\gamma_1 \cdot z|^2} \\ &\Longrightarrow \\ \mathrm{Im}(\gamma_2 \cdot z) &= \mathrm{Im}\left(\frac{\gamma_1 \cdot z}{|\gamma_1 \cdot z|^2}\right) = \frac{\mathrm{Im}(\gamma_1 \cdot z)}{|\gamma_1 \cdot z|^2} \underbrace{>}_{|\gamma_1 \cdot z|<1} \mathrm{Im}(\gamma_1 \cdot z) \end{aligned}$$

סתירה למקסימליות. מכאן, קיבלנו כי $\gamma_1 \cdot z \in \overline{F}$.

יהיו $z, w \in F$, $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ עבורם $w = \gamma \cdot z$. נכתוב $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אם $c = 0$ אז $a = d = \pm 1$ ואז $\gamma \cdot z = z + b$ ולכן $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(z+b) < \frac{1}{2}$ ואז $b = 0$ ולכן $\gamma = \pm I_2$, $z = w$ וסיימנו.

נניח אם כן כי $c \neq 0$. מהגדרת F נובע ש $\mathrm{Im}z, \mathrm{Im}w > \frac{\sqrt{3}}{2}$ אז

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} < \mathrm{Im}w = \mathrm{Im}(\gamma \cdot z) &= \frac{\mathrm{Im}z}{|cz+d|^2} \\ &\underbrace{=}_{z=x+yi} \frac{y}{(cx+d)^2 + (cy)^2} \leq \frac{y}{(cy)^2} = \frac{1}{c^2 y} < \frac{2}{c^2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ולכן $c^2 < \frac{4}{3}$, מצד שני $0 < c^2 \in \mathbb{Z}$ ולכן $c = \pm 1$. $w = \gamma \cdot z = (-\gamma) \cdot z$ ולכן נניח בלי הגבלת הכלליות כי $c = 1$.

קיבלנו $\gamma = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ ולכן $ad - b = 1$ ומכאן $b = ad - 1$.

$$\gamma = \pm \begin{pmatrix} a & ad-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ & 1 \end{pmatrix}$$

כעת

$$\begin{aligned} w = \gamma \cdot z &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ & 1 \end{pmatrix} \cdot z \\ &\Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & -a \\ & 1 \end{pmatrix} \cdot w &= \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ & 1 \end{pmatrix} \cdot z \\ w - a &= \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} (z+d) = \frac{-1}{z+d} \end{aligned}$$

מכיוון ש $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(w) < \frac{1}{2}$ ו $a \in \mathbb{Z}$, $|\mathrm{Re}(w-a)| \geq |\mathrm{Re}(w)|$ ו $\mathrm{Im}w = \mathrm{Im}(w-a)$ ולכן $|w-a| \geq |w| > 1$.

באופן דומה, $|z+d| \geq |z| > 1$, אבל אז $|w-a| = \frac{1}{|z+d|} < 1$, וזו סתירה. ■

באופן דומה להוכחת התכונה השנייה, ניתן להראות גם:

טענה 2.26 יהיו $w, z \in \overline{F}$, $z \neq w$ ו $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ כך ש $w = \gamma \cdot z$. אז $\mathrm{Re}z = \pm\frac{1}{2}$ ו $w = z \mp 1$, $\gamma = \pm\begin{pmatrix}1 & \mp 1\\ & 1\end{pmatrix}$ או $|z| = 1$, $w = -\frac{1}{z}$, $\gamma = \begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}$ או $z = \pm\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w = \mp\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\gamma = \pm\begin{pmatrix}1 & \mp 1\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mp 1\\ & 1\end{pmatrix}$.

טענה 2.27 תהי $z \in \gamma F$, ($\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$), אז $\Gamma_z = \{\pm I_2\}$ פרט למקרים:

1. $z = i$, $\Gamma_z = \left\langle\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}\right\rangle \cong \mathbb{Z}_4$

2. $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\Gamma_z = \left\langle\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\rangle \cong \mathbb{Z}_6$

3. $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\Gamma_z = \left\langle\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & \end{pmatrix}\right\rangle \cong \mathbb{Z}_6$

משפט 2.28 נסמן $T = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}$. אז $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T\rangle$.

הוכחה: נסמן $\Gamma = \langle S, T\rangle \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. ראינו כי לכל $z \in \mathcal{H}$ קיים מינימום בקבוצה $Y = \left\{|cz+d|^2 \mid c, d \in \mathbb{Z}, (c,d) = 1\right\}$. כמו־כן, $1 \in Y$ (עבור $c = 0$, $d = 1$), וכן קיים מספר סופי של איברים ≤ 1. בפרט טענות אלה מתקיימות כאשר (c, d) השורה השנייה של מטריצה $\gamma \in \Gamma$ ולכן $\mathcal{H}$ תחום יסודי של Γ. (בהוכחת התחום היסודי השתמשנו רק ב$\{S, T\}$, מתכונות התחום היסודי, כל $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ נוצרת ע"י מטריצות אלה) ■

טענה 2.29 תהי $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה. נכתוב $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \dot\bigcup_{i=1}^n \gamma_i\Gamma$, אז $D = \dot\bigcup_{i=1}^n \gamma_i^{-1}F$ הוא תחום יסודי עבור Γ. (נניח כי $\pm I_2 \in \Gamma$)

הוכחה: יהי $z \in \mathcal{H}$, אז קיים $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ עבורו $g \cdot z \in \overline{F}$. קיים i עבורו $g \in \gamma_i\Gamma$, אז נכתוב $g = \gamma_i\gamma$. אז $\gamma_i\gamma \cdot z \in \overline{F} \impliedby \gamma \cdot z \in \gamma_i^{-1} \cdot \overline{F} \subseteq D$.

יהיו $z_1, z_2 \in D$, $\gamma \in \Gamma$ כך ש $z_2 = \gamma \cdot z_1$. נכתוב $z_2 = \gamma_j^{-1}u_2$ ו $z_1 = \gamma_i^{-1}u_1$ עבור $u_1, u_2 \in F$, אז $u_2 = \gamma_j\gamma\gamma_i^{-1} \cdot u_1$ ו $\gamma_j\gamma\gamma_i^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. אז מתכונות F, $u_1 = u_2$ ו $\gamma_j\gamma\gamma_i^{-1} = \pm I_2$ ולכן $\gamma = \gamma_j^{-1}\gamma_i \in \Gamma$. מכאן $i = j$ ואז $\gamma = \pm I_2$. בפרט $z_1 = z_2$. ■

הערה 2.30 נניח כי $-I_2 \notin \Gamma$, אז לכל $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $(-g)\Gamma \neq g\Gamma$. כעת $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left(\dot\bigcup_{i=1}^n (-\alpha_i)\Gamma\right) \dot\cup \left(\dot\bigcup_{i=1}^n \alpha_i\Gamma\right)$, וניתן לסמן את הנציגים $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$. בהוכחה, ייתכן שנקבל $-\gamma_j^{-1}\gamma_i = \gamma \in \Gamma$, ואז בהכרח $\gamma_i = -\gamma_j$, ואז $\gamma = I_2$ ו $z_1 = \gamma \cdot z_2 = z_2$, כלומר D עדיין תחום יסודי של Γ.

דוגמה $\Gamma = \Gamma_0(2) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod 2\right\}$. לפי דף התרגיל, $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(2)] = 3$. יש נציגים $\Gamma, S\cdot\Gamma, TS\cdot\Gamma$: $S \notin \Gamma$ ולכן $\Gamma \neq S\cdot\Gamma$.
$TS = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & \end{pmatrix} \notin \Gamma$ ולכן $\Gamma \neq TS\cdot\Gamma$.

$S^{-1}TS = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma$ ולכן $TS \notin S\Gamma$ ולכן $T \cdot S\Gamma \neq S \cdot \Gamma$.
מכאן $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma \dot\cup S \cdot \Gamma \dot\cup TS \cdot \Gamma$ ולכן $D = F \cup S^{-1}F \cup S^{-1}T^{-1}F$ תחום יסודי של Γ.

2.5 המרחב ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ כמרחב טופולוגי ומשטח רימן

תהי $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה. ראינו כי ל־Γ יש מספר סופי של מסלולים של נקודות חוד $(\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$. נגדיר $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, אז Γ פועלת על $\mathcal{H}^*$.

$${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*} \quad = \quad {}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}} \cup \underbrace{\{\Gamma \cdot x \mid x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\}}_{\text{finite set}}$$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \dot\bigcup_{j=1}^{k} \Gamma\gamma_j$. מסלולי נקודות החוד של Γ הם $\Gamma\gamma_j(\infty)$ ($1 \leq j \leq k$). מתקיים $\Gamma\gamma_i(\infty) = \Gamma\gamma_j(\infty) \iff$ קיים $\gamma \in \Gamma$ עבורו $\gamma_j^{-1}\gamma\gamma_i(\infty) = \infty$. נסמן

$$U \quad = \quad \left\{\pm \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$$

אז קיים $\gamma \in \Gamma$ עבורו $\gamma_j^{-1}\gamma\gamma_i \in U \iff$ קיים $\gamma \in \Gamma$ עבורו $\gamma_i \in \gamma^{-1}\gamma_j U \iff$ $\Gamma\gamma_i U = \Gamma\gamma_j U$.

טענה 2.31 קבוצת מסלולי נקודות החוד של Γ מתאימה באופן חח"ע ועל עם הקבוצה ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}/_{U}$ (קבוצה סופית).

טופולוגיה

1. נשרה על $\mathcal{H}$ את הטופולוגיה מ־$\mathbb{C}$.
2. ניתן בסיס סביבות ל־∞ ע"י $N_M = \{z \in \mathcal{H} \mid \mathrm{Im} z > M\}$ ($M > 0$).
3. ניתן בסיס סביבות ל־$x_0 \in \mathbb{Q}$ ע"י $\{x_0\} \cup \{z \in \mathcal{H} \mid |z - (x_0 + ib)| < b\}$ ($b > 0$).

הערה 2.32 3 מגיע מהכתיבה $x_0 = \frac{a}{c}$ כשבר מצומצם: $\gamma_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\gamma_0 \cdot \infty = x_0$. עבור $x \in \mathbb{R}$ ו־$T > 0$ קבוע, $\gamma_0(x + iT)$ מעגל המשיק ל־$\mathbb{R}$ ב־x_0 ומרכז $x_0 + \frac{i}{2c^2T}$. לכן יש התאמה בין הסביבות של x_0 ב־3 והסביבות של ∞ ב־2.

טענה 2.33 בטופולוגיה שהגדרנו, $\mathcal{H}^*$ מרחב האוסדורף קשיר. כל $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ פועלת על $\mathcal{H}^*$ כהומיאומורפיזם. (קשירות: $\mathcal{H}$ קשיר וצפוף ב־$\mathcal{H}^*$)

טענה 2.34 תהי $x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, אז קיימת סביבה $x \in W \subseteq \mathcal{H}^*$ המקיימת $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(W) \cap W \neq \emptyset\} = \Gamma_x$. יתר על כן, אם $\gamma_0 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ מקיימת $x = \gamma_0 \cdot \infty$ אז אפשר לקחת $W = \gamma_0(N_1)$.

הוכחה: יהיו $z_1, z_2 \in N_1$ נקודות המקיימות $\gamma\gamma_0(z_1) = \gamma_0(z_2)$, אז $\underbrace{\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0}_{\gamma'}(z_1) = z_2$.

אם $z_1 = \infty$ אז

$$z_2 = \gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0(\infty) = \gamma_0^{-1}\gamma(x) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

מאידך $z_2 \in N_1$, ולכן בהכרח $z_2 = \infty = z_1$. מסימטריה $z_1 = \infty \iff z_2 = \infty$.
במקרה זה $\gamma \cdot x = x$, כלומר $\gamma \in \Gamma_x$.

אם $z_1 \neq \infty$ אז $\mathrm{Im}z_1, \mathrm{Im}z_2 > \infty$.

$$1 < \mathrm{Im}z_2 = \mathrm{Im}\gamma' z_1 = \frac{\mathrm{Im}z_1}{|cz_1 + d|^2} = \frac{\mathrm{Im}z_1}{(c\mathrm{Re}z_1 + d)^2 + (c\mathrm{Im}z_1)^2}$$

אם $c = 0$ אז $\gamma' \cdot \infty = \infty \Longleftarrow \gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0(\infty) = \infty \Longleftarrow = \gamma x = \gamma\gamma_0(\infty) = \gamma_0(\infty)$
x, אז $\gamma \in \Gamma_x$. אם $c \neq 0$ אז

$$1 < \mathrm{Im}z_2 = \frac{\mathrm{Im}z_1}{(c\mathrm{Re}z_1 + d)^2 + (c\mathrm{Im}z_1)^2} \le \frac{\mathrm{Im}z_1}{c^2(\mathrm{Im}z_1)^2} < \frac{1}{c^2} \le 1$$

וזו סתירה. מכאן $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(W) \cap W \neq \emptyset\} \subseteq \Gamma_x$. ההכלה בכיוון ההפוך ברורה. ■

טענה 2.35 תהיינה $x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ נקודה ו $A \subseteq \mathcal{H}$ קבוצה קומפקטית. אז קיימת סביבה $x \in W \subseteq \mathcal{H}^*$ עבורה לכל $\gamma \in \Gamma$, $W \cap \gamma(A) = \emptyset$.

הוכחה: יהיו $r, R > 0$ מספרים המקיימים $r < \mathrm{Im}z < R$ לכל $z \in A$. נכתוב $x = \gamma_0 \cdot \infty$, $\gamma_0 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ונגדיר

$$W = \gamma_0\left(\left\{z \in \mathcal{H} \mid \mathrm{Im}z > \max\left\{R, \frac{1}{r}\right\}\right\} \cup \{\infty\}\right)$$

(נסמן $M = \max\left\{R, \frac{1}{r}\right\}$).

לכל $z \in \mathcal{H}$ ולכל $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\mathrm{Im}(\gamma \cdot z) = \frac{\mathrm{Im}z}{(c\mathrm{Re}z + d)^2 + (c\mathrm{Im}z)^2} \begin{cases} = \mathrm{Im}z & (c = 0, a = d = \pm 1) \\ \le \frac{\mathrm{Im}z}{c^2(\mathrm{Im}z)^2} \le \frac{1}{\mathrm{Im}z} & (c \neq 0) \end{cases}$$

ובכל מקרה $\mathrm{Im}(\gamma \cdot z) \le \max\left\{\mathrm{Im}z, \frac{1}{\mathrm{Im}z}\right\}$.

יהי $\gamma \in \Gamma$. איבר ב $W \cap \gamma(A)$ הוא $w = \gamma_0(\xi) = \gamma(z)$, עבור $z \in A$, $\xi \in N_M$.

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma_0^{-1}(\gamma(z)) \in \mathcal{H} \\ \mathrm{Im}\xi &\le \max\left\{\mathrm{Im}z, \frac{1}{\mathrm{Im}z}\right\} \le \max\left\{R, \frac{1}{r}\right\} = M \end{aligned}$$

בסתירה ל$\xi \in N_M$. לכן $W \cap \gamma(A) = \emptyset$. ■

נתבונן ב ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ עם טופולוגיית המנה. נסמן את העתקת המנה ע"י $\pi : \mathcal{H}^* \to {}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*}$. π רציפה, על ופתוחה. ההעתקה $\pi\restriction_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \to {}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}}$ היא גם כן העתקת מנה המתאימה לטופולוגיית המנה על ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}}$. לכן ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}} \subseteq {}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ קבוצה פתוחה (וכן האוסדורף וקשירה - האוסדורף הוכחנו. קשירה כהעתקה רציפה של $\mathcal{H}$).

משפט 2.36 המרחב ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ הוא האוסדורף, קשיר וקומפקטי.

הוכחה: ידוע כי ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}}$ תת־קבוצה פתוחה וכן האוסדורף. תהיינה $z \in \mathcal{H}$ ו $x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ נקודת חוד. נפריד אותן: יהי V עיגול פתוח קטן סביב z עם סגור חלקי ל$\mathcal{H}$. נשתמש בטענה האחרונה עבור $A = \overline{V}$, אז קיימת סביבה $x \in W \subseteq \mathcal{H}^*$ עבורה לכל $\gamma \in \Gamma$, $W \cap \gamma(A) = \emptyset \implies W \cap \gamma(V) = \emptyset \implies \pi(W) \cap \pi(V) = \emptyset$ סביבות של $\pi(x) = \Gamma \cdot x$ ושל $\pi(z) = \Gamma \cdot z$.

יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ נקודות חוד, כך ש $\pi(x_1) = \Gamma \cdot x_1 \neq \Gamma \cdot x_2 = \pi(x_2)$. נפריד אותן: נכתוב $x_i = \gamma_i \cdot \infty$ עבור $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. נגדיר סביבות $x_j \in W_j = \gamma_j(N_1) \subseteq \mathcal{H}^*$. כעת $\pi(W_1) \cap \pi(W_2) = \emptyset$: אם קיים איבר בחיתוך, אז קיימים $z_1, z_2 \in N_1$ ו $\gamma \in \Gamma$ עבורם $\gamma_2 \cdot z_2 = \gamma \cdot \gamma_1 \cdot z_1$. ואז $z_2 = \gamma_2^{-1}\gamma\gamma_1 \cdot z_1$. כמו קודם, $z_1 = \infty \iff z_2 = \infty$ ובמקרה זה $\gamma \cdot x_1 = x_2$ בסתירה לבחירה $\Gamma \cdot x_1 \neq \Gamma \cdot x_2$.

נניח כי $\mathrm{Im} z_i > 1$. נרשום $\gamma' = \gamma_2^{-1}\gamma\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז

$$\mathrm{Im} z_2 = \mathrm{Im}\left(\gamma' z_1\right) \leq \max\left\{\mathrm{Im} z_1, \frac{1}{\mathrm{Im} z_1}\right\} \leq \mathrm{Im} z_1$$

מסימטריה גם $\mathrm{Im} z_1 \leq \mathrm{Im} z_2$, ולכן אם $c \neq 0$

$$1 < \mathrm{Im} z_1 = \mathrm{Im} z_2 = \mathrm{Im}\left(\gamma' z_1\right) = \frac{\mathrm{Im} z_1}{\left(c\mathrm{Re} z_1 + d\right)^2 + \left(c\mathrm{Im} z_1\right)^2} \leq \frac{\mathrm{Im} z_1}{c^2\left(\mathrm{Im} z_1\right)^2} \leq 1$$

וזו סתירה. אם $c = 0$ אז $\gamma' \cdot \infty = \infty$, ואז $\gamma \cdot x_1 = x_2$, בסתירה לבחירתם.

מצאנו כי ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ האוסדורף. קשירות ברורה. נותר להראות קומפקטיות: נכתוב $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \Gamma\gamma_j$, אז

$$\mathcal{H} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \overline{F} = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma\gamma_j \overline{F}$$

$$\mathcal{H}^* = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \underbrace{\left(\overline{F} \cup \{\infty\}\right)}_{F^*} = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma\gamma_j F^*$$
$$\implies$$
$${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*} = \pi\left(\mathcal{H}^*\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \pi\left(\gamma_j F^*\right)$$

הקבוצה $F^* \subseteq \mathcal{H}^*$ קומפקטית, ולכן $\gamma_j(F^*) \subseteq \mathcal{H}^*$ קומפקטי לכל j. מרציפות π, $\pi(\gamma_j F^*)$ קומפקטי ב ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ לכל j, ולכן ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ קומפקטי כאיחוד סופי של קבוצות קומפקטיות. ■

משטח רימן מרחב טופולוגי האוסדורף קשיר M הוא **משטח רימן** אם מציידים אותו במבנה אנליטי S: קבוצת זוגות $S = \{(U_\alpha, p_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ המקיימת:

1. לכל $\alpha \in A$ קיימת קבוצה $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה כך ש $p_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ הומיאומורפיזם.
2. אם $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, ההעתקות $p_\beta p_\alpha^{-1} : p_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to p_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, $p_\alpha p_\beta^{-1} : p_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to p_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ הולומורפיות.

3. S היא הקבוצה המקסימלית המקיימת את התכונות לעיל. (בהנתן S' המקיימת רק את התכונות הקודמות, ניתן להפוך אותה למקסימלית (באופן יחיד!) ע"י הוספת כל הזוגות (U,p) המתאימים.

אם $a \in U_\alpha \subseteq M$, אומרים כי p_α **(פרמטר אנליטי)** בסביבת a.

מבנה אנליטי על ${}_\Gamma\backslash^{\mathcal{H}^*}$ ראינו כי לכל $z \in \mathcal{H}^*$ יש סביבה $z \in W \subseteq \mathcal{H}^*$ כך ש

$$\{\gamma \in \Gamma \mid W \cap \gamma(W) \neq \emptyset\} = \Gamma_z$$

1. תהי $z \in \mathcal{H}$ נקודה לא אליפטית ביחס ל־Γ, אז $\Gamma_z \subseteq \{\pm I_2\}$. ניקח $\left(\pi(W), (\pi\restriction_W)^{-1} : \pi(W) \to W\right) \in S$. $\pi\restriction_W$ חד־חד־ערכית כי $\pi(w_1) = \pi(w_2) \Longleftarrow$ קיים $\gamma \in \Gamma$ עבורו $w_2 = \gamma w_1$, ולכן $\gamma \in \Gamma_z \Longleftarrow \gamma = \pm I_2 \Longleftarrow w_2 = w_1$. π רציפה ופתוחה ולכן $\pi\restriction_W$ הומיאומורפיזם על תמונתו $\pi(W)$.

2. תהי $v \in \mathcal{H}$ אליפטית ביחס ל־Γ ו־W כנ"ל. תהי λ העתקת מוביוס $z \mapsto \frac{z-v}{z+\overline{v}}$ ($\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 1 & -\overline{v} \end{pmatrix}$). λ מעתיקה את $\mathcal{H}$ לעיגול היחידה הפתוח D וכן $\lambda(v) = 0$. λ חד־חד־ערכית, על רציפה ופתוחה (כי היא הולומורפית).
Γ_v חבורה ציקלית סופית, ולכן $\overline{\Gamma}_v = {}^{\Gamma_v \cdot \{\pm I_2\}}/_{\{\pm I_2\}}$ גם ציקלית סופית. נסמן $n_v = \left|\overline{\Gamma}_v\right|$. $\lambda \overline{\Gamma}_v \lambda^{-1}$ חבורה ציקלית סופית של העתקות מוביוס מרוכבות המעבירות את D ל־D ושומרות על הראשית. איברי חבורה זו הם מהצורה $u \mapsto \zeta_{n_v}^k u$ $(u \in D)$ כאשר ζ_{n_v} שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n_v.
נגדיר העתקה $p : \pi(W) \to \mathbb{C}$ ע"י $p(\pi(w)) = \lambda(w)^{n_v}$. p מוגדרת היטב: אם $\pi(w_1) = \pi(w_2)$ אז קיים $\gamma \in \Gamma$, $w_2 = \gamma \cdot w_1$, אז $W \cap \gamma(W) \neq \emptyset \Longleftarrow \gamma \in \Gamma_v$.
מכאן

$$\begin{aligned} \lambda(w_2) = \lambda(\gamma \cdot w_1) = \lambda\gamma\lambda^{-1} \cdot \lambda(w_1) &= \zeta_{n_v}^k \lambda(w_1) \\ (p(\pi(w_2)) =)\, \lambda(w_2)^{n_v} &= \lambda(w_1)^{n_v}\, (= p(\pi(w_1))) \end{aligned}$$

p חד־חד־ערכית: אם $\lambda(w_2)^{n_v} = \lambda(w_1)^{n_v}$ אז $\lambda(w_2) = \xi_{n_v}^k \lambda(w_1) = \lambda(\gamma \cdot w_1)$. λ חד־חד־ערכית ולכן $w_2 = \gamma \cdot w_1$.
מחילופיות הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi(w)=\lambda(w)^{n_v}"'] & & \pi(W) \arrow[dl, "p"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

נקבל כי p רציפה ופתוחה. נקח $(\pi(W), p) \in S$.

3. תהי $v \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. קיימת $p \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ עבורה $p \cdot v = \infty$.

$$p\Gamma_v p^{-1} \cdot \{\pm I_2\} \subseteq \left\{\pm \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{Z}\right\}$$

וליתר דיוק

$$p\Gamma_v p^{-1}\cdot\{\pm I_2\} \quad = \quad \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & mh\\ & 1\end{pmatrix} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}$$

עבור $h\in\mathbb{Z}$ כלשהו. כלומר

$$p\Gamma_v p^{-1}\cdot\{\pm I_2\} \quad = \quad \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & n\\ & 1\end{pmatrix}^h \mid m\in\mathbb{Z}\right\}$$

תהי W סביבה כנ"ל, אז $p(W)$ סביבה של ∞. נגדיר $\rho(\pi(w))=e^{\frac{2\pi ip(w)}{h}}$ (אז $\rho(v)=0$ - [זהו הגבול - כי הסביבות של ∞ הן חצי מישורים עליונים]). p מוגדרת היטב: יהיו $w_1,w_2\in W$ כך ש $w_2=\gamma\cdot w_1$ עבור $\gamma\in\Gamma$, אז $\gamma\in\Gamma_v$ (כי $W\cap\gamma(W)\neq\emptyset$)

$$p(w_2)=p(\gamma\cdot w_1) \quad = \quad p\gamma p^{-1}\cdot p(w_1) \quad \underbrace{=}_{p\gamma p^{-1}=\pm\begin{pmatrix}1 & mh\\ & 1\end{pmatrix}} \quad p(w_1)+mh$$

ולכן $e^{\frac{2\pi ip(w_2)}{h}}=e^{\frac{2\pi ip(w_1)}{h}}$.

ρ חד־חד־ערכית: נניח כי $e^{\frac{2\pi ip(w_2)}{h}}=e^{\frac{2\pi ip(w_1)}{h}}$, אז $p(w_2)=p(w_1)+mh$ עבור $m\in\mathbb{Z}$ כלשהו. ניתן למצוא $\gamma\in\Gamma_v$ עבורו $p\gamma p^{-1}=\pm\begin{pmatrix}1 & mh\\ & 1\end{pmatrix}$, אז $w_2=\gamma w_1$ $\Longleftarrow$ $\pi(w_1)=\pi(w_2)$.

כמו קודם, ρ רציפה ופתוחה, ולכן הומיאומורפיזם מ $\pi(W)$ על קבוצה פתוחה ב$\mathbb{C}$. נוסיף $(\pi(W),\rho)\in S$.

תרגיל פונקציות המעבר אנליטיות.
כלומר, $\Gamma\backslash\mathcal{H}^*$ משטח רימן קומפקטי.

סקירה בנושא משטחי רימן קומפקטיים יהי M משטח רימן. לM קיימת טריאנגולציה: **משולש ב**M הוא תמונה הומיאומורפית של משולש ב$\mathbb{C}$. **טריאנגולציה** היא אוסף משולשים המכסה את M ומקיים:

1. אם $x\in M$ שייכת לפנים של משולש $\Delta_\alpha\subseteq M$ אז Δ_α המשולש <u>היחיד</u> שמכיל את x.
2. אם $x\in M$ שייכת לצלע $x\in E\subseteq\Delta\subseteq M$ אך אינה קודקוד, אז קיים משולש נוסף יחיד Δ' המכיל את x. לΔ' יש צלע משותפת עם Δ, והיא E.
3. אם x קודקוד של משולש, אז יש מספר סופי של משולשים $\Delta_1,\dots,\Delta_m$ המכילים את x. x קודקוד משותף של כולם, וניתן לסדרם כך שלΔ_i יש צלע משותפת עם Δ_{i+1} לכל i (מודולו m).

M **אוריינטבילי: כיוון (אוריינטציה) קוהרנטי על שרשרת משולשים** $S_1,\dots,S_n$ כך שלS_i יש צלע משותפת עם S_{i+1} לכל i (מודולו n) היא בחירת כיוונים על כל משולש S_i כך שכל צלע משותפת מקבלת כיוונים הפוכים משני משולשיה.

M **אוריינטבילי:** אם לכל שרשרת משולשים כנ"ל קיימת אוריינטציה קוהרנטית.

חבורות ההומולוגיה של M: נבחר לM טריאנגולציה סופית. נסמן בΔ את אוסף המשולשים, כאשר על כל משולש נגדיר את שני הכיוונים (שנסמנם $\pm S$ למשולש $S \in \Delta$). נסמן ב$C_i(\Delta)$ $(i = 0,1,2)$ את החבורות החילופיות החופשיות על קודקודים $(i = 0)$, צלעות $(i = 1)$ ומשולשים $(i = 2)$, תחת הזיהויים $(-1) \cdot s = -s$ (עבור s צלע או משולש).
נגדיר את אופרטור השפה ∂: עבור קודקוד p, $\partial p = 0$ ואז $\partial(C_0(\Delta)) = 0$. עבור קטע $\langle A, B \rangle \in C_1(\Delta)$, $\partial(\langle A, B \rangle) = B - A$ ומרחיבים לינארית לכל $C_1(\Delta)$. עבור משולש $\langle A, B, C \rangle \in C_2(\Delta)$

$$\partial(\langle A, B, C \rangle) = \langle A, B \rangle - \langle B, C \rangle + \langle C, A \rangle$$

ומרחיבים לינארית לכל $C_2(\Delta)$. מתקיים $\partial \circ \partial = 0$ (די לבדוק על משולשים: כל השאר טריוואלי או נובע מההרחבה).
נסמן $B_i(\Delta) = \operatorname{Im}(\partial : C_{i+1}(\Delta) \to C_i(\Delta))$ ו $Z_i(\Delta) = \operatorname{Ker}(\partial : C_i(\Delta) \to C_{i-1}(\Delta))$ כאשר $Z_0(\Delta) = C_0(\Delta)$ ו $B_2(\Delta) = 0$. מתקיים $B_i(\Delta) \subseteq Z_i(\Delta)$, אז ניתן להגדיר $H_i(\Delta) = {}^{Z_i(\Delta)}/_{B_i(\Delta)}$.
<u>עבור $i = 0$:</u> מקשירות M, ניתן להגיע ניתן להגיע מכל קודקוד בΔ לכל קודקוד אחר בΔ באמצעות שרשראות צלעות בΔ. לכן $Q - P \in B_0(\Delta)$ לכל $P, Q \in \Delta$ קודקודים. בסה"כ $H_0(\Delta) = {}^{Z_0(\Delta)}/_{B_0(\Delta)} = \langle P \rangle \cong \mathbb{Z}$ (נוצרת ע"י כל אחד מהקודקודים)
<u>עבור $i = 2$:</u> לפי הגדרה מתקיים $H_2(\Delta) = Z_2(\Delta) = \left\{ c = \sum_{i=1}^{n} a_i S_2^{(i)} \mid \partial c = 0 \right\}$.
נניח כי $S_2^{(1)}, \ldots, S_2^{(n)}$ שרשרת משולשים מכוונים הנותנת אוריינטציה קוהרנטית של הטריאנגולציה. נתבונן במחובר $a_{j_0} S_2^{(j_0)}$, $a_{j_0} \neq 0$, ונניח כי $S_1^{(j_0)}$ צלע מכוונת ב$S_2^{(j_0)}$. היא מופיעה ב $\partial S_2^{(j_0)}$ ולכן חייבת להצטמצם עם משולש שכן $-S_2^{(j_0)}$ או $S_2^{(j_1)}$ ולמשולש יש אותו מקדם a_{j_0}. מכאן נקבל ששלושת המשולשים השכנים ל$S_2^{(j_0)}$ באים עם אותו מקדם. בהכרח מתקיים לכן $c = b \cdot \sum_{j=1}^{n} S_2^{(j)}$ עבור $b \in \mathbb{Z}$ כלשהו. מכאן $H_2 \cong \mathbb{Z}$.

משפט 2.37 קיים g עבורו $H_1(\Delta) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. g אינו תלוי בטריאנגולציה של M. $H_1(\Delta) = \pi_1(M) / [\pi_1(M), \pi_1(M)]$ עבור החבורה היסודית $\pi_1(M)$.

g נקרא **הגנוס של M**.

דוגמאות

- <u>$g = 0$</u> - פני השטח של כדור $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.
- <u>$g = 1$</u> - הטורוס ${}^{\mathbb{C}}/_{\Lambda}$ עבור סריג Λ.

משפט 2.38 בהנתן טריאנגולציה, ניתן לחשב את **כרקטריסטיקת אוילר** $\chi(M) = a_0 - a_1 + a_2$. מתקיים $\chi(M) = 2 - 2g$.

באמצעות המבנה האנליטי על משטחי רימן, ניתן להגדיר פונקציות הולומורפיות (מרומורפיות) ביניהם.

משפט 2.39 תהי $f : X \to Y$ פונקציה הולומורפית לא קבועה בין משטחי רימן קומפקטיים. אז f על, ולכל $y \in Y$, הקבוצה $f^{-1}(y)$ סופית.

הוכחה: X קשיר, קומפקטי $\Longleftarrow$ $f\left(X\right)$ קבוצה קשירה קומפקטית, ולכן סגורה. $f\left(X\right)$ פתוחה כי f הולומורפית לא־קבועה. Y קשיר, ולכן $f\left(X\right)=Y$.

תהי $y\in Y$ ויהי $a\in f^{-1}\left(y\right)$. ניתן להגדיר את **הסדר** של f בa: אם $\varphi:U_{a}\to D$, $\psi:U_{y}\to D$ פרמטרים מקומיים לעיגול פתוח D סביב הראשית, $\varphi\left(a\right)=\psi\left(y\right)=0$, אז $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:D\to D$ פונקציה הולומורפית המעתיקה את 0 ל0. יש לה פיתוח טיילור $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=bz^{e_{a}}$ עבור $e_{a}\geq1$. e_{a} אינו תלוי בבחירת φ,ψ והוא הסדר של f בa.

המקורות של y מבודדים (אפסים של פונקציה הולומורפית לא קבועה), לכן $f^{-1}\left(y\right)$ קבוצה דיסקרטית בX ולכן סופית (היא סגורה כתמונה הפוכה של נקודה ולכן קומפקטית. קבוצה קומפקטית ודיסקרטית היא סופית). ■

הגדרה 2.40 f מסועפת בx אם $e_{x}>1$. e_{x} נקרא **דרגת הסיעוף** של f בx.

טענה 2.41 ל $f:X\to Y$, קבוצת הנקודות המסועפות עבור f היא סופית.

הוכחה: כל נקודה מסועפת היא מבודדת. (כי אחרת הנגזרת מתאפסת על סדרה מתכנסת ולכן הנגזרת זהותית 0) ■

משפט 2.42 ל$f:X\to Y$ הולומורפית, קיים מספר טבעי d כך שלכל $y\in Y$ מתקיים $\sum\limits_{x\in f^{-1}\left(y\right)}e_{x}=d$.

הוכחה: נסמן $\mathcal{E}=\left\{ x\in X\mid e_{x}>1\right\}$. זו קבוצה סופית, ונסמן $Y'=Y\setminus f\left(\mathcal{E}\right)$. נתבונן בפונקציה $Y'\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $y\mapsto\left|f^{-1}\left(y\right)\right|$. זו פונקציה רציפה: לכל $y\in Y'$, ולכל $x\in f^{-1}\left(y\right)$, f אינה מסועפת בx, אז קיימת סביבה U_{x}' של x בה f חד־חד־ערכית. נניח כי $f^{-1}\left(y\right)=\left\{ x_{1},\ldots,x_{n}\right\}$, אז ניתן להניח כי $U_{x_{i}}'$ זרות בזוגות. נסמן $V=\bigcap_{i=1}^{n}f\left(U_{x_{i}}'\right)$. f פתוחה ולכן V סביבה של y. נסמן $U_{x_{i}}=U_{x_{i}}'\cap f^{-1}\left(V\right)$, אז $f\restriction_{U_{x_{i}}}:U_{x_{i}}\to V$ חד־חד־ערכית ועל. קיבלנו כי ל$y'\in V$ יש n מקורות שונים ב $\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_{i}}$. נסמן $C=X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_{i}}$. זו קבוצה סגורה ולכן קומפקטית. $y\notin f\left(C\right)$, אז ניתן לקחת $V_{0}\subseteq V$ סביבה של y הזרה ל$f\left(C\right)$. לכל $y'\in V_{0}$ יש בדיוק n ממקורות שונים.

Y' עדיין קשירה ולכן הפונקציה $y\mapsto\left|f^{-1}\left(y\right)\right|$ קבועה בה. נותר להראות עבור $f\left(\mathcal{E}\right)$: (מראים שגם $y\mapsto\sum_{x\in f^{-1}\left(y\right)}e_{x}$ רציפה). ■

d נקרא **דרגת** f או **דרגת הסיעוף** של f.

נוסחת רימן־הורביץ תהי $f:X\to Y$ פונקציה הולומורפית לא קבועה בין משטחי רימן מגנוסים g_{X},g_{Y}. נניח כי f מדרגה d. אז

$$2g_{X}-1\quad=\quad d\left(2g_{Y}-2\right)+\sum_{x\in X}\left(e_{x}-1\right)$$

דוגמה

1. תהי $\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_{2}\left(\mathbb{Z}\right)$ תת־חבורת קונגרואנציה. נתבונן בהעתקה הטבעית $f:_{\Gamma}\backslash^{\mathcal{H}^{*}}\to{}_{\mathrm{SL}_{2}\left(\mathbb{Z}\right)}\backslash^{\mathcal{H}^{*}}$, המוגדרת ע"י $f\left(\Gamma\cdot v\right)=\mathrm{SL}_{2}\left(\mathbb{Z}\right)\cdot v$. קל לבדוק כי f הולומורפית.

התמונה ההפוכה בנקודה היא

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\cdot v\right) &= \left\{\Gamma\cdot x \mid \mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\cdot x=\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\cdot v\right\} \\ &= \left\{\Gamma\eta\cdot v \mid \eta\in\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\right\} \end{aligned}$$

נבחין כי $\Gamma\eta\cdot v$ אינו משתנה אם מחליפים את η באיבר כלשהו של $\Gamma\eta\cdot\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)_v$ ולכן

$$\left|f^{-1}\left(\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\cdot v\right)\right| = \left|{}_{\Gamma}\backslash^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}/_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_v}\right|$$

נניח כי v אינה אליפטית או נקודת חוד של $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$, אז $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)_v=\left\{\pm I_2\right\}$. מכאן

$$\left|f^{-1}\left(\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\cdot v\right)\right| = \left|{}_{\Gamma\cdot\{\pm I_2\}}\backslash^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\right| = \begin{cases}\left[\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right):\Gamma\right] & -I_2\in\Gamma \\ \frac{1}{2}\left[\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right):\Gamma\right] & -I_2\notin\Gamma\end{cases}$$

2. באופן דומה, אם $\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$ תת־חבורת קונגרואנציה, אז קיימת העתקה $f:{}_{\Gamma_1}\backslash^{\mathcal{H}^*}\to{}_{\Gamma_2}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ ע"י $f\left(\Gamma_1\cdot v\right)=\Gamma_2\cdot v$ ודרגתה $\left[\overline{\Gamma}_2:\overline{\Gamma}_1\right]$.

טענה 2.43 עבור f (מהדוגמה השנייה), אינדקס הסיעוף של f ב$\Gamma_1\cdot v$ הוא $e_{\Gamma_1\cdot v}=\left[\overline{\Gamma}_{2,v},\overline{\Gamma}_{1,v}\right]$.

הוכחה: לפי מקרים:

1. תהי $v\in\mathcal{H}$ נקודה לא־אליפטית ביחס לΓ_2 , אז היא אינה אליפטית ביחס לΓ_1. תהי $v\in W\subseteq\mathcal{H}$ עבורה $\Gamma_{2,v}=\left\{\gamma\in\Gamma_2\mid\gamma\left(W\right)\cap W\neq\emptyset\right\}$. נסמן את העתקות המנה $\pi_i:\mathcal{H}^*\to{}_{\Gamma_i}\backslash^{\mathcal{H}^*}$. ראינו כי $\left(W,\left(\pi_i\restriction_W\right)^{-1}\right)$ פרמטר בv (נדאג שW סביבה עם אותה תכונה ביחס לΓ_1). מתקיים לכל $w\in W$, $\left(\pi_2\restriction_W\right)^{-1}\circ f\circ\left(\pi_1\restriction_W\right)\left(w\right)=w$, ולכן $e_{\Gamma_1\cdot v}=1=\left[\overline{\Gamma}_{2,v}:\overline{\Gamma}_{1,v}\right]$. (כי $\Gamma_{1,v},\Gamma_{2,v}\subseteq\left\{\pm1\right\}$)
2. תהי $v\in\mathcal{H}$ אליפטית ביחס לΓ_2, אך לא ביחס לΓ_1. $p_2\left(\pi_2\left(w\right)\right)=\lambda\left(w\right)^{\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|}$ עבור $\lambda\left(z\right)=\frac{z-v}{z-\overline{v}}$, וכן $p_1\left(\pi_1\left(w\right)\right)=w$. מכיוון ש $p_2\left(\pi_2\left(w\right)\right)=\frac{\left(w-v\right)^{\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|}}{\left(w-\overline{v}\right)^{\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|}}$, אינדקס הסיעוף ב$v$ הוא $\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|$. כמו כן, $\overline{\Gamma}_{1,v}=\left\{1\right\}$ ולכן $e_{\Gamma_1\cdot v}=\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|=\left[\overline{\Gamma}_{2,v}:\overline{\Gamma}_{1,v}\right]$.
3. תהי $v\in\mathcal{H}$ אליפטית ביחס לΓ_1. $z=p_1\left(\pi_1\left(w\right)\right)=\lambda\left(w\right)^{\left|\overline{\Gamma}_{1,v}\right|}$, $p_2\left(\pi_2\left(w\right)\right)=\lambda\left(w\right)^{\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|}$, ולכן

$$\begin{aligned} \left(p_2\circ f\circ p_1^{-1}\right)\left(z\right)=p_2\left(f\left(\pi_1\left(w\right)\right)\right) &= p_2\left(\pi_2\left(w\right)\right)=\lambda\left(w\right)^{\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|} \\ &= \left(\lambda\left(w\right)^{\left|\overline{\Gamma}_{1,v}\right|}\right)^{\frac{\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|}{\left|\overline{\Gamma}_{1,v}\right|}} \\ &= z^{\frac{\left|\overline{\Gamma}_{2,v}\right|}{\left|\overline{\Gamma}_{1,v}\right|}}=z^{\left[\overline{\Gamma}_{2,v}:\overline{\Gamma}_{1,v}\right]} \end{aligned}$$

4. תהי $v \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ותהי $p \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ עבורה $p \cdot v = \infty$.
אז $p\Gamma_{j,v}p^{-1} \cdot \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h_j \\ & 1 \end{pmatrix}^m \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$ עבור $h_j \in \mathbb{N}$,
והגדרנו $\rho_j(\pi_j(w)) = e^{\frac{2\pi i p(w)}{h_j}}$ ו $p_j(\pi_j(v)) = 0$). נסמן $z = \rho_1(\pi_1(w)) = e^{\frac{2\pi i \cdot p(w)}{h_1}}$, אז

$$\begin{aligned} \rho_2 \circ f \circ \rho_1^{-1}(z) = \rho_2(f(\pi_1(w))) &= \rho_2(\pi_2(w)) \\ &= e^{\frac{2\pi i \cdot p(w)}{h_2}} = \left(e^{\frac{2\pi i \cdot p(w)}{h_1}}\right)^{\frac{h_1}{h_2}} = z^{\frac{h_1}{h_2}} \end{aligned}$$

נבחין כי

$$\begin{aligned} \left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_v : \overline{\Gamma}_{j,v}\right] &= \left[p\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_v p^{-1} : p\overline{\Gamma}_{j,v}p^{-1}\right] \\ &= \left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty : \overline{\Gamma}_{j,\infty}\right] = h_j \end{aligned}$$

ולכן אינדקס הסיעוף הוא

$$e_{\Gamma_1 \cdot v} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_v : \overline{\Gamma}_{1,v}\right]}{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_v : \overline{\Gamma}_{2,v}\right]} = \left[\overline{\Gamma}_{2,v} : \overline{\Gamma}_{1,v}\right]$$

■

תהי $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורה דיסקרטית (קונגרואנציה?). נסמן $n = \left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}\right]$ דרגת הסיעוף של $f : {}_\Gamma\backslash^{\mathcal{H}^*} \to {}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}^*}$. נבחין כי הגנוס של ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ הוא 0 (למשל מבחינת התחום היסודי וההדבקות). מנוסחת רימן הורביץ, נקבל כי הגנוס של ${}_\Gamma\backslash^{\mathcal{H}^*}$ הוא

$$\begin{aligned} 2g_\Gamma - 2 &= n(2 \cdot 0 - 2) + \sum_{x \in {}_\Gamma\backslash^{\mathcal{H}^*}} (e_x - 1) \\ 2g_\Gamma &= 2 - 2n + \sum_{\Gamma x \in {}_\Gamma\backslash^{\mathcal{H}^*}} (e_{\Gamma x} - 1) \end{aligned}$$

והמחובר בסכום מתאפס, פרט למקרים

$$f(\Gamma_x) \in \left\{ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot i, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \right\}$$

1. $f^{-1}\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \{\Gamma v_1, \dots \Gamma v_t\}$.
אנו יודעים כי $e_j = e_{\Gamma v_j} = \left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_{v_j} : \overline{\Gamma}_{v_j}\right]$ וכי $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_{v_j}$ חבורה ציקלית מסדר $\frac{6}{2} = 3$, ולכן $e_j = 1, 3$. נסמן ב־ν_3 את מספר המסלולים האליפטיים של Γ עבורם

המייצב הוא מסדר 3 (אז אינדקס הסיעוף הוא 1).

$$\begin{aligned}\sum_{x\in f^{-1}(y)} e_x &= e_1+\cdots+e_t=n\\ &= 3\left|\{1\le j\le t \mid e_j=3\}\right|+\nu_3\\ \sum_{x\in f^{-1}(y)}(e_x-1) &= 3\left|\{1\le j\le t \mid e_j=3\}\right|+\nu_3-t\\ &= 2\left|\{1\le j\le t \mid e_j=3\}\right|\\ &= \frac{2}{3}(n-\nu_3)\end{aligned}$$

המעבר האחד לפני האחרון הוא כי $t=\left|\{1\le j\le t \mid e_j=3\}\right|+\nu_3$.

2. באופן דומה $f^{-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot i)=\{\Gamma v_1',\dots,\Gamma v_s'\}$ ו $e_j'=e_{\Gamma v_j'}=1,2$. נסמן בν_2 את מספר המסלולים עבורם $\left|\overline{\Gamma}_{v_j}\right|=2$, אז נקבל $\sum_{j=1}^{s}\left(e_j'-1\right)=\frac{n-\nu_2}{2}$.

3. לבסוף, עבור ν_∞ מספר מסלולי החוד של Γ, $\tilde{e}_j=e_{\Gamma x_j}$, נקבל $\tilde{e}_1+\cdots+\tilde{e}_r=n$ ואז $\sum_{j=1}^{r}(\tilde{e}_j-1)=n-\nu_\infty$. נציב בנוסחת רימן הורביץ ונקבל

$$2g_\Gamma-2 = n\left(2g_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}-2\right)+\sum_{x\in\Gamma\backslash\mathcal{H}^*}(e_x-1)$$

ולכן נקבל $g_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}=0$

$$\begin{aligned}2g_\Gamma-2 &= -2n+\sum_{x\in\Gamma\backslash\mathcal{H}^*}(e_x-1)\\ &= -2n+\left(\frac{2}{3}(n-\nu_3)\right)+\left(\frac{n-\nu_2}{2}\right)+(n-\nu_\infty)\\ g_\Gamma &= 1+\frac{n}{12}-\frac{\nu_2}{4}-\frac{\nu_3}{3}-\frac{\nu_\infty}{2}\end{aligned}$$

3 תבניות מודולריות

3.1 פונקציות ותבניות מודולריות ביחס לΓ

תהי $\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה. למטריצה $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ (מטריצות מעל $\mathbb{Q}$ בעלות דטרמיננטה חיובית) ו $z\in\mathcal{H}$, נסמן $j(\gamma,z)=cz+d$.

למה 3.1 $j(\gamma_1\gamma_2,z)=j(\gamma_1,\gamma_2\cdot z)\cdot j(\gamma_2,z)$.

הוכחה: חישוב:

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\qquad \gamma_1\cdot\gamma_2=\begin{pmatrix}\dots&\dots\\a'c+c'd&b'c+d'd\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
j\left(\gamma_1\cdot\gamma_2,z\right)&=\left(a'c+c'd\right)z+\left(b'c+d'd\right)\\
j\left(\gamma_1,\gamma_2\cdot z\right)&=c\left(\gamma_2\cdot z\right)+d=c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+d\\
j\left(\gamma_2,z\right)&=c'z+d'\\
j\left(\gamma_1,\gamma_2\cdot z\right)j\left(\gamma_2,z\right)&=c\left(a'z+b'\right)+d\left(c'z+d'\right)\\
&=\left(a'c+c'd\right)z+\left(b'c+d'd\right)
\end{aligned}$$

■

הגדרה 3.2 יהיו $\gamma\in\mathrm{GL}_2\left(\mathbb{Q}\right)^+$, $k\in\mathbb{Z}$ ו־f פונקציה מרומורפית על $\mathcal{H}$. נגדיר אופרטור ע"י

$$f\mid_{[\gamma]_k}(z)\;=\;\left(\det\gamma\right)^{\frac{k}{2}}j\left(\gamma,z\right)^{-k}f\left(\gamma\cdot z\right)$$

מהלמה נובע כי $f\mid_{[\gamma_1]_k}\mid_{[\gamma_2]_k}=f\mid_{[\gamma_1\cdot\gamma_2]_k}$:

הוכחה: חישוב:

$$\begin{aligned}
f\mid_{[\gamma_1]_k}\mid_{[\gamma_2]_k}&=\left(\det\gamma_2\right)^{\frac{k}{2}}j\left(\gamma_2,z\right)^{-k}f\mid_{[\gamma_1]}\left(\gamma_2\cdot z\right)\\
&=\left(\det\gamma_2\right)^{\frac{k}{2}}j\left(\gamma_2,z\right)^{-k}\left(\det\gamma_1\right)^{\frac{k}{2}}j\left(\gamma_1,\gamma_2\cdot z\right)^{-k}f\left(\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot z\right)\\
&=\det\left(\gamma_1\cdot\gamma_2\right)^{\frac{k}{2}}\left(\underbrace{j\left(\gamma_1,\gamma_2\cdot z\right)\cdot j\left(\gamma_2,z\right)}_{j\left(\gamma_1\cdot\gamma_2,z\right)}\right)^{-k}f\left(\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot z\right)\\
&=f\mid_{[\gamma_1\cdot\gamma_2]_k}
\end{aligned}$$

■

הגדרה 3.3 תהי f פונקציה <u>מרומורפית</u> על $\mathcal{H}$, תהי $\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$ תת־חבורת קונגרואנציה, ויהי $k\in\mathbb{Z}$. f היא **פונקציה מרומורפית ממשקל** k **ביחס ל**Γ אם

1. לכל $\gamma\in\Gamma$, $f\mid_{[\gamma]_k}=f$
2. לכל $\alpha\in\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$, $f\mid_{[\alpha]_k}$ "מרומורפית ב־∞". נסביר זאת:

מהתנאי הראשון $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\left(cz+d\right)^kf\left(z\right)$ לכל $\gamma\in\Gamma$. יהי N טבעי עבורו $\Gamma\supseteq\Gamma\left(N\right)=\left\{\gamma\in\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\mid\gamma\equiv I_2\left(\mod N\right)\right\}$. אז בפרט $\begin{pmatrix}1&N\\&1\end{pmatrix}\in\Gamma$, ולכן $f\left(z+N\right)=f\left(z\right)$. נסמן $q_N=q_{N,z}=\exp\left(\frac{1}{N}\cdot2\pi zi\right)$ ונגדיר $\tilde{f}\left(q_N\right)=f\left(z\right)$, אז עבור $0<\left|q_N\right|<1$, $\tilde{f}\left(q_N\right)=f\left(\frac{N}{2\pi i}\log q_N\right)$ (הענף של $\log$ בסביבת a

כלשהו ל $0 < |a| < 1$), כלומר $\tilde{f}$ מרומורפית בעיגול הנקוב $0 < |q_N| < 1$ ויש לה פיתוח לטור

$$\tilde{f}(q_N) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q_N^n \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i z n}{N}} \, (= f(z))$$

(תקף עבור $\mathrm{Im} z > M$ עבור M כלשהו). סדרת קטבים של $\tilde{f}$ ששואפת ל$q_N = 0$ כחלק מתנאי 2: $q_N = 0$ היא נקודה סינגולרית מבודדת של $\tilde{f}$, והיא לכל היותר קוטב (כלומר קיים $n_0 \in \mathbb{Z}$ כך שלכל $n < n_0$, $a_n = 0$). בנוסף, לכל $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\Gamma(N) = \alpha^{-1}\Gamma(N)\alpha \subseteq \alpha^{-1}\Gamma\alpha$ ומתקיים

$$\left(f\,|_{[\alpha]_k}\right)|_{[\alpha^{-1}\gamma\alpha]_k} \quad = \quad f\,|_{[\gamma\alpha]_k} = f\,|_{[\gamma]_k}|_{[\alpha]_k} = f\,|_{[\alpha]_k}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהתנאי הראשון.

כלומר, $f\,|_{[\alpha]_k}$ מקיימת את התנאי הראשון ביחס ל $\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ (זאת גם תת־חבורת קונגרואנציה). לכן קיים $M_\alpha > 0$ כך הפיתוח $f\,|_{[\alpha]_k}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,\alpha} e^{\frac{2\pi i z}{N}}$ תקף ב$\{\mathrm{Im} z > M_\alpha\}$, והדרישה השנייה היא שהסינגולריות ב$q_N = 0$ היא מבודדת, וכן לכל היותר קוטב. (תנאי זה אינו תלוי בבחירת N!)

הערה 3.4 התנאי השני מטיל רק מספר סופי של אילוצים: נכתוב $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \dot{\bigcup}_{j=1}^{r} \Gamma \cdot \gamma_j$ אז לכל $\alpha = \gamma \cdot \gamma_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} f\,|_{[\alpha]_k} = f\,|_{[\gamma]_k}|_{[\gamma_j]_k} &= f\,|_{[\gamma_j]_k} \\ f\,|_{[\gamma_j]_k}(z) &= j(\gamma_j, z)^{-k} f(\gamma_j \cdot z) \end{aligned}$$

הערה 3.5 נכתוב $f\,|_{[\alpha]_k}(z) = \sum_{n=r_\alpha}^{\infty} a_{n,\alpha} e^{\frac{2\pi i z}{N}}$ כאשר $a_{r_\alpha,\alpha} \neq 0$. פיתוח זה תלוי רק במסלול $\Gamma \cdot \alpha(\infty)$: אם $\Gamma \cdot \alpha(\infty) = \Gamma \cdot \beta(\infty)$ אז $r_\alpha = r_\beta$, $a_{n,\alpha} \neq 0 \iff a_{n,\beta} \neq 0$ ואם $r_\alpha = r_\beta = 0$, אז $a_{0,\alpha} = \pm a_{0,\beta}$. נראה זאת:

קיים $\gamma \in \Gamma$ עבורו $\beta^{-1}\gamma\alpha(\infty) = \infty$ אז $\beta^{-1}\gamma\alpha = \pm \begin{pmatrix} 1 & j \\ & 1 \end{pmatrix}$, כלומר $\alpha = \pm\gamma^{-1}\beta\tau^j$ (כאשר $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$), $f\,|_{[\pm I_2]_k}(z) = (\pm 1)^k f(z)$, ולכן

$$\begin{aligned} f\,|_{[\alpha]_k} = f\,|_{[\gamma^{-1}(\pm I_2)\beta\tau^j]_k} &= f\,|_{[\pm I_2]_k}|_{[\beta]_k}|_{[\alpha^j]_k} \\ &= (\pm 1)^k f\,|_{[\beta]_k}|_{[\alpha^j]_k} \\ f\,|_{[\alpha]_k} &= (\pm 1)^k f\,|_{[\beta]_k}(z + j) \\ &= (\pm 1)^k \sum_{n=r_\beta}^{\infty} a_{n,\beta} e^{\frac{2\pi i n (z+j)}{N}} \\ &= (\pm 1)^k \sum_{n=r_\beta}^{\infty} a_{n,\beta} e^{\frac{2\pi i n z}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i n j}{N}} \end{aligned}$$

ומהשוואת מקדמים $a_{n,\alpha} = (\pm 1)^k a_{n,\beta} e^{\frac{2\pi i n j}{N}}$ והטענות נובעות מכאן.

הגדרה 3.6 הסדר של f בנקודת חוד $x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ הוא $\nu_x(f) = \nu_\infty\left(f \mid_{[\alpha]_k}\right)$ = הסדר של $\widetilde{f \mid_{[\alpha]_k}}$ ב-$q_N = 0$, עבור $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ המקיים $\alpha \cdot \infty = x$. $\nu_x(f)$ תלוי רק במסלול $\Gamma \cdot x$.

בהגדרת פונקציה מודולרית, נאמר במקום הסעיף השני כי f **מרומורפית בנקודות החוד של** Γ.

הגדרה 3.7 פונקציה מודולרית f שהיא הולומורפית ב-$\mathcal{H}$ ובכל נקודות החוד של Γ (כלומר $r_\alpha \geq 0$ לכל $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) נקראת **תבנית מודולרית ממשקל** k **ביחס ל-**Γ.

3.2 תבניות מודולריות ביחס ל-$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

טורי איזנשטיין ממשקל k $\quad f \mid_{[-I_2]_k} = (-1)^k f = f$ ($-I_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) ל-$k$ זוגי בלבד לכן עבור

$$G_k(z) \quad = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

$k \geq 4$ זוגי, $G_k(z)$ תבנית מודולרית ממשקל k ביחס ל-$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. באופן דומה, עבור $g_2(z) = 60G_4(z)$, $g_3(z) = 140G_6(z)$, $\Delta(z) = g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2$ היא תבנית מודולרית ממשקל 12 ביחס ל-$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. יתר על כן $\Delta(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathcal{H}$. לכן האינווריאנט המודולרי $j(z) = \frac{1728 g_2(z)^3}{\Delta(z)}$ היא פונקציה הולומורפית על $\mathcal{H}$, המקיימת לכל $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$, $j(\gamma \cdot z) = j(z)$.

הגדרה 3.8 תבנית מודולרית ממשקל k ביחס ל-Γ המתאפסת בכל נקודת חוד (כלומר $\nu_x(f) > 0$ לכל נקודת חוד x) נקראת **תבנית חוד (cusp form)**.

לתבנית חוד יש פיתוח q_N: $f \mid_{[\alpha]_k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\alpha} e^{\frac{2\pi i n z}{N}}$ לכל $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

ל-$G_k(z)$ יש פיתוח-q_N ע"י $G_k(z) = 2\zeta(k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \cdot z}{N}}$ ($a_0 = 2\zeta(k)$ עבור k זוגי). נמצא את שאר המקדמים. נתחיל בפיתוח הבא (ידוע מקורסים אחרים):

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \quad = \quad \prod_{r=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

כאשר הגבול מפורש כך שלכל $|z| \leq M$ קיים $\prod_{r=M+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) = \lim_{k\to\infty} \prod_{r=M+1}^{k}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$ ונגדיר

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \quad = \prod_{r=1}^{M}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \cdot \quad \prod_{r=M+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

עבור $|z|<M$, $\prod_{r=M+1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)=\exp\left(-\sum_{r=M+1}^{\infty}f_r\left(z\right)\right)$ עבור $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{l-1}z^{2l}}{l\cdot r^{2l}}=\mathrm{Log}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)=-f_r\left(z\right)$. הטור $\sum_{r=M+1}^{\infty}f_r\left(z\right)$ מתכנס במידה שווה ב $\left\{z\mid |z|<M+\frac{1}{2}\right\}$ ולכן מגדיר פונקציה אנליטית. מתקיים

$$\frac{\sin\left(\pi z\right)}{\pi z} = \prod_{r=1}^{M}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\cdot\exp\left(-\sum_{r=M+1}^{\infty}f_r\left(z\right)\right)$$

נקח נגזרת לוגריתמית

$$\begin{aligned}\pi\cot\left(\pi z\right)-\frac{1}{z} &= \sum_{r=1}^{M}\frac{\frac{-2z}{r^2}}{1-\frac{z^2}{r^2}}+\sum_{r=M+1}^{\infty}\frac{\frac{-2z}{r^2}}{1-\frac{z^2}{r^2}}=-2z\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2-z^2}\\ \pi\cot\left(\pi z\right) &= \frac{1}{z}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+r}+\frac{1}{z-r}\right)\end{aligned}$$

הטור הזה מתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל קבוצה קומפקטית ב$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, ובפרט ב$\mathcal{H}$. מצד שני

$$\begin{aligned}\pi\cot\left(\pi z\right)=\pi\cdot\frac{\cos\left(\pi z\right)}{\sin\left(\pi z\right)} &= \pi\frac{\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{2}}{\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}}=i\pi\frac{e^{i2\pi z}+1}{e^{i2\pi z}-1}\\ &= i\pi\left(1+\frac{2}{e^{i2\pi z}-1}\right)=i\pi\left(1-\frac{2}{1-e^{i2\pi z}}\right)\\ &= \pi i-2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}e^{i2\pi kz}\end{aligned}$$

השוויון האחרון נכון ב$\mathcal{H}$ כי $\mathrm{Re}\left(iz\right)<0$ ואז $\left|e^{i2\pi z}\right|<1$.
נגזור את שני הביטויים ל$\pi\cot\left(\pi z\right)$:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{z^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(-\left(\frac{1}{z+r}\right)^2-\left(\frac{1}{z-r}\right)^2\right) &= -\left(2\pi i\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}ne^{i2\pi nz}\\ \sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z+r}\right)^2 &= \left(2\pi i\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}ne^{i2\pi nz}\end{aligned}$$

נגזור $k-2$ פעמים נוספות:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\left(k-1\right)!}{\left(z+r\right)^k} = \left(2\pi i\right)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{i2\pi nz}$$

ולכן

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(z+r\right)^k} = \frac{\left(-2\pi i\right)^k}{\left(k-1\right)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{i2\pi nz}$$

כעת ניתן לכתוב (k זוגי)

$$\begin{aligned} G_k(z) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k} &= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^k} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k} \\ &= 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}e^{i2\pi nmz} \end{aligned}$$

הטור הכפול מתכנס בהחלט ובמידה שווה על קבוצות קומפקטיות, ולכן ניתן להחליף סדר סכימה:

$$\begin{aligned} G_k(z) &= 2\zeta(k) + 2\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}e^{i2\pi nmz} \\ \underbrace{}_{\substack{nm=l \\ r|l}} &= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r|l}\left(r^{k-1}\right)e^{i2\pi lz} \\ &= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(l)\,e^{i2\pi lz} \end{aligned}$$

כאשר $\sigma_k(n) = \sum_{r|n} r^k$. זהו פיתוח q של $G_k(z)$.

הגדרה 3.9 פיתוח איזנשטיין המנורמל

$$\begin{aligned} E_k(z) &= \frac{1}{2\zeta(k)}G_k(z) \\ &= 1 + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!\cdot\zeta(k)}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)\,e^{i2\pi nz} \end{aligned}$$

הגדרה 3.10 מספרי ברנולי $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\cdot z^k$.

מספרי ברנולי מקיימים נוסחת נסיגה: $B_0 = 1$ ו $\sum_{k=0}^{l}\frac{B_k}{k!\,(l-k)!} = 0$ לכל $l \geq 2$.

$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_{2m+1} = 0$ לכל $m \geq 1$ (קל לבדוק את ההתאפסות מזוגיות הפונקציה $\frac{z}{2} + 1 - \frac{z}{e^z-1}$). כל מספרי ברנולי רציונליים.

משפט 3.11 לכל $k \geq 2$ זוגי, $\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2}\cdot\frac{B_k}{k!}$. באופן שקול,

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)\,e^{i2\pi nz}$$

(למשל, $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$)

טענה 3.12 $\Delta(z)$ היא תבנית חוד ביחס ל-$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ממשקל 12).

הוכחה: $\Delta(z)=g_2(z)^3-27g_3(z)^2$. צריך להוכיח שהאיבר החופשי בפיתוח q הוא 0:

$$\begin{aligned} g_2(z) &= 60G_4(z)=60(2\zeta(4)+\dots)=\frac{4}{3}\pi^4+\dots \\ g_3(z) &= 140G_6(z)=140(2\zeta(6)+\dots)=\frac{8}{27}\pi^6+\dots \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} \Delta(z)=g_2(z)^3-27g_3(z)^2 &= \left(\frac{64}{27}\pi^{12}+\dots\right)-\left(27\cdot\left(\frac{8}{27}\pi^6\right)^2+\dots\right) \\ &=0+\dots \end{aligned}$$

■

טענה 3.13 האינווריאנט המודולרי הוא בעל קוטב פשוט ב-∞ עם שארית 1.

הוכחה: לפי הגדרה, $j(z)=1728\cdot\frac{g_2(z)^3}{\Delta(z)}$, אז יש ל-$j$ קוטב ב-∞ (כי האיבר החופשי של $g_2(z)$ הוא $\frac{4}{3}\pi^4\neq 0$). נמצא את המקדם של q בפיתוח של $\Delta(z)$:

$$\begin{aligned} g_2(z) &= 60G_4(z)=\frac{4}{3}\pi^4+60\cdot\frac{2\cdot(2\pi i)^4}{3!}q+\dots=\frac{4}{3}\pi^4+20\cdot(2\pi)^4q+\dots \\ g_3(z) &= 140G_6(z)=140\left(2\zeta(6)+\frac{2\cdot(2\pi i)^6}{5!}q\right)=\frac{8}{27}\pi^6-\frac{7}{3}(2\pi)^6q \end{aligned}$$

כעת

$$\begin{aligned} \Delta(z)=&g_2(z)^3-27g_3(z)^2 \\ =&0+\left(3\left(\frac{4}{3}\pi^4\right)^2 20\cdot(2\pi)^4-27\cdot 2\left(\frac{8}{27}\pi^6\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(2\pi)^6\right)q+\dots \\ =&\pi^{12}\cdot 2^{10}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 5+\frac{7}{3}\right)q+\dots \\ =&(2\pi)^{12}q+\dots \end{aligned}$$

וגם

$$1728g_2(z)^3=1728\left(\frac{4}{3}\pi^4\right)^3+\dots$$

ולכן המקדם של q^{-1} ב$j\left(z\right)$ הוא

$$\frac{1728\left(\frac{4}{3}\pi^{4}\right)^{3}}{\left(2\pi\right)^{12}}=\frac{\frac{12^{3}4^{3}}{3^{3}}}{2^{12}}=1$$

אכן, j מגדירה פונקציה מרומורפית על משטח רימן הקומפקטי ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}^*}$. היא אינה קבועה, ולכן חייב להיות לה קוטב. ■

3.3 מרחב התבניות המודולריות ממשקל k ביחס ל$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$

תהי f פונקציה מודולרית ממשקל k ביחס ל$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$. לכל $p\in\mathcal{H}$ נסמן ב $\nu_p\left(f\right)$ את הסדר של f כפונקציה מרומורפית בנקודה p. $\nu_p\left(f\right)$ תלוי רק ב$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\cdot p$: נכתוב $f\left(z\right)=\left(z-p\right)^{n}\cdot g\left(z\right)$ כאשר $n\in\mathbb{Z}$, $g\left(z\right)$ אנליטית ולא מתאפסת בסביבה $p\in V\subseteq\mathcal{H}$.
תהי $\gamma\in\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$, אז $f\mid_{[\gamma]_k}=f$, כלומר $f\left(\gamma^{-1}z\right)=j\left(\gamma^{-1},z\right)^{k}f\left(z\right)$. נניח כי $z\in\gamma V$, אז $\gamma^{-1}z\in V$ ולכן $f\left(\gamma^{-1}z\right)=\left(\gamma^{-1}z-p\right)^{n}g\left(\gamma^{-1}z\right)$, כלומר

$$\begin{aligned}\left(z-\gamma p\right)^{-n}f\left(z\right)&=j\left(\gamma^{-1},z\right)^{-k}\cdot\left(z-\gamma p\right)^{-n}\cdot f\left(\gamma^{-1}z\right)\\&=j\left(\gamma^{-1},z\right)^{-k}\left(\frac{\gamma^{-1}z-p}{z-\gamma p}\right)^{n}g\left(\gamma^{-1}z\right)\end{aligned}$$

פונקציה הולומורפית שאינה מתאפסת ב$\gamma\cdot V$ (כי ל$\gamma^{-1}\cdot z-p$ יש אפס פשוט ב$\gamma\cdot p$ וזהו האפס היחיד של פונקציה זו ולכן המנה $\frac{\gamma^{-1}z-p}{z-\gamma p}$ הולומורפית ב $\gamma\cdot V$. בנוסף, $j\left(\gamma^{-1},z\right)$ אינה מתאפסת ב$\mathcal{H}$ (היא מתאפסת על מספר רציונלי)). נסמנה $\varphi\left(z\right)$.
מתקיים $f\left(z\right)=\left(z-\gamma p\right)^{n}\varphi\left(z\right)$ ולכן $\nu_{\gamma\cdot p}\left(f\right)=n=\nu_p\left(f\right)$.

הערה 3.14 מספר המסלולים $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\cdot p$, $p\in\mathcal{H}$ עבורם $\nu_p\left(f\right)\neq0$ הוא סופי: האפסים והקטבים הן קבוצות מבודדות. בתחום היסודי, עבור תת־הקבוצה $\{\mathrm{Im}z>M\}$, קיים M גדול דיו כך שאין נקודות אפס או קוטב. המשלים קומפקטי, ולכן מכיל מספר סופי של נקודות אפס וקטבים.

משפט 3.15 תהי $f\neq0$ פונקציה מודולרית ממשקל k (שלם וזוגי). למסלול $t\in{}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}^*}$ נסמן את הסדר של $f\left(z\right)$ בt ע"י $\nu_t\left(f\right)$, וכן נסמן $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$. אז מתקיים

$$\nu_\infty\left(f\right)+\frac{1}{2}\nu_i\left(f\right)+\frac{1}{3}\nu_\omega\left(f\right)+\sum_{i,\omega\neq p\in{}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}}}\nu_p\left(f\right)=\frac{k}{12}$$

(מההערה הקודמת, הסכום הנ"ל סופי)

הוכחה: נחשב את $\int_R\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ לאורך המסילה R שתתואר להלן: יהי $M>0$ עבורו לf אין קטבים או אפסים בתחום היסודי עבורם $\mathrm{Im}z\geq0$. נסמן $A=-\frac{1}{2}+iM$, $H=\frac{1}{2}+iM$. המסילה R הולכת מH לA ואז לאורך ∂F מתחת לקטע AH בשינויים הבאים:

- אם p אפס או קוטב של f, כך ש $\mathrm{Re}p=\frac{1}{2}$, אז גם $T^{-1}\left(p\right)$ אפס/קוטב. נעקוף את p, $T^{-1}\left(p\right)$ באמצעות חצאי־מעגלים τ_p ו $T^{-1}\left(\tau_p\right)$.

- אם i אפס או קוטב, נעקוף אותו באמצעות מעגל קטן מעליו.
- אם ω אפס או קוטב, אז כך גם $-\overline{\omega}$. נעקוף אותן באמצעות קשתות בתוך התחום.
- אם $q \neq i, \omega$ אפס או קוטב, אז כך גם $S(q)$ ו$(|q|=1)$. נעקוף את q ע"י מעגל מתחתיו M_q, ואת $S(q)$ ע"י מעגל מעליו $S(M_q)$ ו$(S: z \mapsto -\frac{1}{z})$.

אם $\omega, -\overline{\omega}$ אפסים או קטבים של f, נבחר G קרובה ל$(-\overline{\omega})$ כך ש $\mathrm{Re}G = \frac{1}{2}$, וכן F כך ש$|F|=1$ ו $|F-(-\overline{\omega})| = |G-(-\overline{\omega})|$. נקח $B = T^{-1}(G)$ ו $C = S(F)$.

כעת לR יש את התכונה שלכל מסלול של אפסים/קטבים של f, פרט ל $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot i$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \omega$, יש נציג יחיד במסילה. ממשפט השארית,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{p\in R}\nu_p(f)$$

מצד שני $f(z+1) = f(z) \Longleftarrow f'(z+1) = f'(z)$ ולכן $\int_H^G \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$. נשתמש בפיתוח q של f, אז

$$\begin{aligned}\int_H^A \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{f'(x+iM)}{f(x+iM)}dx = 2\pi i\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{\sum_{n=n_0}^{\infty} n a_n e^{2\pi i(n(x+iM))}}{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n e^{2\pi i(n(x+iM))}}dx \\ \begin{bmatrix} \xi = e^{2\pi i(x+iM)} \\ d\xi = e^{2\pi i(x+iM)} 2\pi i dx \\ 2\pi i dx = \frac{d\xi}{\xi}\end{bmatrix} &= \oint_{|\xi| = e^{-2\pi M}} \frac{\sum_{n=n_0}^{\infty} n a_n \xi^{n-1}}{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \xi^n}d\xi \\ &= -\oint_{|\xi|=e^{-2\pi M}} \frac{\tilde{f}'(\xi)}{\tilde{f}(\xi)}d\xi\end{aligned}$$

כעת ל$\tilde{f}(\xi) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \xi^n$ אין קטבים בתוך העיגול $|\xi| \leq e^{-2\pi M}$ (פרט אולי ל$\xi = 0$) כי לf אין ב$\{\mathrm{Im} z > M\}$. ולכן

$$\begin{aligned}\int_H^A \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= -\oint_{|\xi|=e^{-2\pi M}} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi \\ &= -2\pi i \nu_{\xi=0}\left(\tilde{f}\right) = -2\pi i \nu_{\infty}(f)\end{aligned}$$

תרומת ω וi: עבור $a = i, \omega$ נכתוב $f(z) = (z-a)^m g(z)$ עבור g הולומורפית ושונה מ0 בסביבות a, אז $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$.

$$\int_{\substack{|z-a|=\varepsilon \\ \theta_1 \leq \mathrm{Arg}(z-a) \leq \theta_2}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{\substack{|z-a|=\varepsilon \\ \theta_1 \leq \mathrm{Arg}(z-a) \leq \theta_2}} \frac{m}{z-a}dz + \int_{\substack{|z-a|=\varepsilon \\ \theta_1 \leq \mathrm{Arg}(z-a) \leq \theta_2}} \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

מתקיים כי $\int_{\substack{|z-a|=\varepsilon \\ \theta_1 \leq \mathrm{Arg}(z-a) \leq \theta_2}} \frac{g'(z)}{g(z)}dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ ולכן

$$\int_{\substack{|z-a|=\varepsilon \\ \theta_1 \leq \mathrm{Arg}(z-a) \leq \theta_2}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \lim_{\varepsilon \to 0} im(\theta_2 - \theta_1)$$

ו $\theta_2-\theta_1\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\begin{cases}-\pi & a=i\\ -\frac{\pi}{3} & a=\omega\end{cases}$. מכאן שהתרומה ל $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'}{f}dz$ היא

$$\frac{1}{2\pi i}\left(-\pi i\nu_i\left(f\right)-\frac{\pi}{3}i\nu_\omega\left(f\right)\right)=-\frac{\nu_i\left(f\right)}{2}-\frac{\nu_\omega\left(f\right)}{3}$$

קיבלנו כי

$$\sum_{i,\omega\neq p\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}}\nu_p\left(f\right)=-\nu_\infty\left(f\right)-\frac{1}{2}\nu_i\left(f\right)-\frac{1}{3}\nu_\omega\left(f\right)+\int_L\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz$$

עבור L חלק הקשת שנותר (פרט לסביבות i, ω).

לפי הבנייה, ניתן לחלק את L לזוגות קשתות $\left(L_1',L_1''\right),\ldots,\left(L_d',L_d''\right)$ כאשר הקשתות L_j' נמצאות ברביע הראשון וכן $L_j''=-S\left(L_j'\right)$ (כמסילות). אז

$$\begin{aligned}\int_L\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz&=\int_{L'=\sum L_j'}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz+\int_{L''=\sum L_j''}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz\\&=\int_{L'}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz-\int_{S(L')}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz\end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}\int_{S(L')}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz&=\left[\begin{smallmatrix}z=S(\xi)\\dz=\frac{1}{\xi^2}d\xi\end{smallmatrix}\right]\\&=\int_{L'}\frac{f'\left(-\frac{1}{\xi}\right)}{f\left(-\frac{1}{\xi}\right)}\frac{1}{\xi^2}d\xi=\int_{L'}\frac{\frac{d}{d\xi}f\left(-\frac{1}{\xi}\right)}{f\left(-\frac{1}{\xi}\right)}d\xi\\\left[\begin{smallmatrix}f\left(-\frac{1}{\xi}\right)=f(S(\xi))=\xi^kf(\xi)\\\frac{d}{d\xi}f\left(-\frac{1}{\xi}\right)=k\xi^{k-1}f(\xi)+\xi^kf'(\xi)\end{smallmatrix}\right]&=\int_{L'}\frac{k\xi^{k-1}f\left(\xi\right)+\xi^kf'\left(\xi\right)}{\xi^kf\left(\xi\right)}d\xi\\&=k\int_{L'}\frac{1}{\xi}d\xi+\int_{L'}\frac{f'\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}d\xi\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\int_L\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz&=-k\int_{L'}\frac{1}{\xi}d\xi\\&=\frac{-ki}{2\pi i}\left(\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\underset{\alpha,\beta\to0}{\longrightarrow}\frac{k}{12}\end{aligned}$$

(כי הקשת L היא חלק מהשפה של התחום היסודי ברביע הראשון וניתן לתארה ע"י $\left\{z\mid|z|=1,\frac{\pi}{2}-\alpha\leq\mathrm{Arg}z\leq\frac{\pi}{3}+\beta\right\}$ לα,β מתאימים) ■

נסמן בM_k את מרחב התבניות המודולריות ממשקל k (זוגי) ביחס ל$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$. נסמן ב$S_k$ את תת־המרחב של תבניות חוד (מתאפסות ב∞).

משפט 3.16

1. $M_0 = \mathbb{C} \cdot 1$.
2. עבור $k<0$ או $k=2$ מתקיים $M_k = 0$.
3. עבור $k = 4, 6, 8, 10, 14$, $\dim M_k = 1$, $M_k = \mathbb{C} \cdot E_k$.
4.

(א) $\dim S_{12} = 1$, $S_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta$.

(ב) עבור $k<12$, $S_k = 0$.

(ג) עבור $k>14$, $S_k = M_{k-12} \cdot \Delta$ (עבור $k=14$, $S_{14}=0$).

5. לכל $k>2$, $M_k = S_k \oplus \mathbb{C} E_k$.

הוכחה:

1. תהי $0 \neq f \in M_0$. אז קיים $z_0 \in \mathcal{H}$, $f(z_0) = a \neq 0$. נסמן $\varphi(z) = f(z) - a \in M_0$.

$$\nu_\infty(\varphi) + \frac{1}{2}\nu_i(\varphi) + \frac{1}{3}\nu_\omega(\varphi) + \sum_{p \neq i,\omega} \nu_p(\varphi) = \frac{0}{12} = 0$$

אבל כל המחוברים חיוביים. אם $\varphi \not\equiv 0$ נקבל סתירה (בפרט $\nu_{z_0}(\varphi) \geq 1$). לכן f קבועה.

2. תהי $f \in M_k$. אם $f \not\equiv 0$, נקבל שוב שכל המחוברים חיוביים (f הולומורפית ב-$\mathcal{H}^*$) ולכן $k \geq 0$. לכן לכל $k<0$, $M_k = 0$. עבור $k=2$, $\frac{k}{12} = \frac{1}{6}$, ושוב נקבל כי אין פתרון (המקדמים 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, כולם גדולים מ-$\frac{1}{6}$).

3. $k=4 \quad \Longleftarrow \quad \frac{k}{12} = \frac{1}{3} \quad \Longleftarrow$ לכל $f \not\equiv 0$, $\nu_\omega(f) = 1$ ושאר הסדרים מתאפסים. בפרט האפסים היחידים של f, הם אפסים פשוטים ב-$\omega \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
יהיו $f_1, f_2 \in M_4$, $f_1, f_2 \not\equiv 0$, אז $\frac{f_1}{f_2} \in M_0$ (הולומורפית בכל $\mathcal{H}^*$ כי ל-f_1, f_2 אותם אפסים ומאותו הסדר), ולכן קבועה, כלומר $f_2 = \lambda \cdot f_1$. מצאנו כי $\dim M_4 \leq 1$. מאידך, $0 \not\equiv E_4 \in M_4$, ולכן נקבל את הטענה.

באופן דומה, $k=6 \quad \Longleftarrow \quad \frac{k}{12} = \frac{1}{2} \quad \Longleftarrow \quad \nu_i(f) = 1$, $\nu_p(f) = 0$ לכל $p \neq i$.

$k=8 \quad \Longleftarrow \quad \frac{k}{12} = \frac{2}{3} \quad \Longleftarrow \quad \nu_\omega(f) = 2$, $\nu_p(f) = 0$ לכל $p \neq \omega$.

$k=10 \quad \Longleftarrow \quad \frac{k}{12} = \frac{5}{6} \quad \Longleftarrow \quad \nu_i(f) = \nu_\omega(f) = 1$, $\nu_p(f) = 0$ לכל $p \neq i,\omega$.

$k=14 \quad \Longleftarrow \quad \frac{k}{12} = \frac{7}{6} \quad \Longleftarrow \quad \nu_i(f) = 1$, $\nu_\omega(f) = 2$, $\nu_p(f) = 0$ לכל $p \neq i,\omega$.

בכל המקרים נמשיך כלעיל.

4. תהי $0 \not\equiv f \in S_k$, אז $\nu_\infty(f) \geq 1$. מכאן $\frac{k}{12} \geq \nu_\infty(f) \geq 1$, אז $k \geq 12$. (זה מראה את (ב))
עבור $k \geq 12$, מכיוון ש $\nu_\infty(f) \geq 1$, נקבל $\nu_\infty(f) = 1$, $\nu_p(f) = 0$ לכל $p \neq \infty$. כמו בסעיף הקודם, $\dim S_{12} \leq 1$. מאידך, $0 \not\equiv \Delta \in S_{12}$ ולכן נקבל את (א).
אם $k>12$, אז $\frac{f}{\Delta} \in M_{k-12}$ (Δ אינה מתאפסת ב-$\mathcal{H}$, ויש לה אפס פשוט ב-∞, בעוד של-f יש אפס כלשהו ב-∞). לכן $f \in M_{k-12} \cdot \Delta$. מכאן, $S_k \subseteq M_{k-12} \cdot \Delta$. מאידך, $M_{k-12} \cdot \Delta \subseteq S_k$ (משקלים וסדרים נסכמים). לכן (ג) נכון.

5. תהי $f\in M_k$ $(k\geq 2)$ ונסמן $a_0=f(\infty)=\tilde{f}(q=0)$. אז ל $f-a_0E_k\in M_k$ אין איבר חופשי בפיתוח־q, כלומר $f-a_0E_k\in S_k$, כלומר $f\in S_k+\mathbb{C}\cdot E_k$. מכיוון ש$E_k\notin S_k$, זהו סכום ישר, כלומר $M_k=S_k\oplus\mathbb{C}E_k$.

■

מסקנה 3.17

1. בסעיף (3) מצאנו את האפסים של כמה מטורי איזנשטיין (ואת סדריהם).
2. $E_4^2=E_8$, $E_4\cdot E_6=E_{10}$

משפט 3.18 יהי $k\geq 0$ שלם זוגי. אז $\dim M_k=\begin{cases}\lfloor\frac{k}{12}\rfloor & k\equiv 2\,(\mod 12)\\ \lfloor\frac{k}{12}\rfloor+1 & k\not\equiv 2\,(\mod 12)\end{cases}$.

הוכחה: עבור $0\leq k<12$ ראינו כי $\dim M_2=0$ ו $\dim M_k=1$ (ל$k\neq 2$). ראינו גם כי $\dim M_{12}=2$, $\dim M_{14}=1$. עבור $k>14$ נקבל מסעיפים (5) ו(4)(ג),

$$\dim M_k=\dim S_k+1=\dim M_{k-12}+1$$

מהנחת האינדוקציה נקבל את הטענה. ■

משפט 3.19 הקבוצה $\left\{E_4^jE_6^l\mid j,l\geq 0\mid 4j+6l=k\right\}$ היא בסיס לינארי לM_k ($k>0$ שלם זוגי).

הוכחה: עבור $0\leq k<6$, $4j=k$ ואכן נקבל את הפתרונות $k=0$ $\left\{E_4^0\right\}$, $k=2$ $\{\}$, $k=4$ $\{E_4\}$, בהתאם למשפט לעיל. עבור $k=6$, בהכרח $j=0,l=1$ ו$\{E_6\}$ פורש את M_6. עבור $k\geq 8$, קיים פתרון $u,v\geq 0$ שלם ל$k=4u+6v$. תהי $f\in M_k$ ונסמן $a=f(\infty)$. אז $f-aE_4^uE_6^v\in S_k=M_{k-12}\cdot\Delta$ (אם $k=8,10,14$, נקבל כי $S_k=0$ ולכן $f=aE_4^uE_6^v$.)

$$f-aE_4^uE_6^v=\varphi\cdot\Delta=\varphi\cdot\left(g_2^3-27g_3^2\right)$$

באינדוקציה, φ צירוף לינארי של $E_4^jE_6^l$ עבור $4j+6l=k-12$, אז $\varphi\cdot g_2^3\in\operatorname{Span}\left\{E_4^{j+3}E_6^l\right\}$, $\varphi\cdot g_3^2\in\operatorname{Span}\left\{E_4^jE_6^{l+2}\right\}$, עבור $4j+6l=k-12$. שניהם נפרשים ע"י $\left\{E_4^jE_6^l\mid 4j+6l=k\right\}$. מצאנו שהקבוצה הנתונה פורשת את M_k.

נניח כי $\sum a_{j,l}E_4^jE_6^l=0$. נתבונן בk מודולו 4. אם $4\mid k$, אז $l=2l'$ זוגי, אז $j+3l'=\frac{k}{4}$, $j=\frac{k}{4}-3l'$. כעת,

$$0=\sum a_{\frac{k}{4}-3l',2l'}E_4^{\frac{k}{4}-3l'}E_6^{2l'}=E_4^{\frac{k}{4}}\sum b_{l'}\left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^{l'}$$
$$\Longrightarrow\sum b_{l'}\left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^{l'}=0$$

אם $k=4k'+2$, אז $l=2l'+1$ אי־זוגי. כעת, $4j+6\left(2l'+1\right)=4k'+2$ ולכן $j=k'-3l'-1$ ומהצבה,

$$0=\sum a_{k'-3l'-1,2l'+1}E_4^{k'-3l'-1}E_6^{2l'+1}=E_4^{k'-1}E_6\sum b_{l'}\left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^{l'}$$
$$\Longrightarrow\sum b_{l'}\left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^{l'}=0$$

כלומר, בשני המקרים $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ אלגברית מעל $\mathbb{C}$, כלומר השדה החלקי של $\mathbb{C}\left(E_6^2,E_4^3\right)$, $\mathbb{C}\left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)$, הוא הרחבה סופית של $\mathbb{C}$, ולכן שווה ל$\mathbb{C}$ (כי $\mathbb{C}$ סגור אלגברית). מכאן, כי $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ פונקציה קבועה. זה לא נכון: $E_4\left(\omega\right)=0$ והמונה אינו מתאפס בω (רק במסלול של i), ולכן לפונקציה יש קוטב בω, בסתירה לכך שזו פונקציה קבועה. ■

האינווריאנט המודולרי $j\left(z\right)=1728\cdot\frac{g_2(z)^3}{\Delta(z)}$ היא פונקציה מודולרית ממשקל 0 ביחס ל$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$. יש לה קוטב פשוט ב$\infty$ עם שארית 1, והיא הולומורפית בכל $\mathcal{H}$.

משפט 3.20 האינווריאנט משרה העתקה $j:{}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}}\to\mathbb{C}$. העתקה זו חד־חד־ערכית ועל.

הוכחה: יהי $\lambda\in\mathbb{C}$. נתבונן בפונקציה $f_\lambda\left(z\right)=1728g_2\left(z\right)^3-\lambda\Delta\left(z\right)$, אז צריך להוכיח שקיים $z\in{}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}}$ יחיד עבורו $f_\lambda\left(z\right)=0$. ברור כי $f_\lambda\in M_{12}$.
$f_\lambda\left(\infty\right)=1728g_2\left(\infty\right)^3\neq0$, ולכן $\nu_\infty\left(f\right)=0$. מכאן,

$$\frac{1}{2}\nu_i\left(f_\lambda\right)+\frac{1}{3}\nu_\omega\left(f_\lambda\right)+\sum_{i,\omega\neq p\in{}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}}}\nu_p\left(f_\lambda\right)=\frac{12}{12}=1$$

אחד המחוברים חיובי (כולם אי־שליליים), אבל לא ייתכן שיש שניים חיוביים. מכאן שיש מסלול יחיד $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)\cdot Q$ בו $\nu_Q\left(f_\lambda\right)>0$, כלומר Q הוא הפתרון היחיד (אולי מרובה) למשוואה $f_\lambda\left(z\right)=0$, $Q\in{}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathcal{H}}$. הוא גם הפתרון היחיד למשוואה $j\left(z\right)=\lambda$. ■

3.4 פונקציית η של דדקינד

עבור $k\geq4$ זוגי, $G_k\left(z\right)=\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(mz+n)^k}$ מתכנס בהחלט. טור איזנשטיין עבור $k=2$ אינו מתכנס בהחלט. ננסה לחקור אותו.

נקבע m טבעי ו$z\in\mathcal{H}$, אז הטור $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2}$ מתכנס בהחלט (ע"י השוואה ל$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$). ראינו כי לכל $z\in\mathcal{H}$, $k\geq2$, מתקיים

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(z+r\right)^k}=\frac{\left(-2\pi i\right)^k}{\left(k-1\right)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}q_z^n$$

עבור $q = q_z = e^{2\pi i z}$. נציב $z \leftarrow mz$, $k \leftarrow 2$, אז נקבל פיתוח

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(mz+n\right)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne^{2\pi i nmz}$$

טענה 3.21 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^2} \right| < \infty$

הוכחה: די להראות כי $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{2\pi i nmz}$ מתכנס בהחלט (כטור כפול). זה מתקיים:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| ne^{2\pi i nmz} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n \left| q^n \right|^m \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left|q\right|^n}{1-\left|q\right|^n}\end{aligned}$$

מתכנס לפי מבחן השורש:

$$|q| < \sqrt[n]{\frac{n\left|q\right|^n}{1-\left|q\right|^n}} = \sqrt[n]{n} \cdot |q| \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{1-\left|q\right|^n}} < \sqrt[n]{n} \cdot |q| \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{1-|q|}}$$

האי־שוויונים נכונים כי $|q| < 1$. שני הצדדים שואפים ל־$|q|$ ולכן גם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n|q|^n}{1-|q|^n}} = |q| < 1$. קיבלנו שהטור האחרון מתכנס במידה שווה בכל תחום מהצורה $\{\mathrm{Im} z \geq \delta\}$, עבור $\delta > 0$. ■

נגדיר את הפונקציה

$$E_2\left(z\right) = \frac{1}{2\zeta\left(2\right)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty} \frac{1}{\left(mz+n\right)^2} \right)$$

שהיא הולומורפית על $\mathcal{H}$. מתקיים הפיתוח

$$\begin{aligned}E_2\left(z\right) &= \frac{3}{\pi^2} \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \left(-4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} nq^{mn} \right) \right) \\ &= 1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} nq^{mn} \\ &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d \right) q^n \\ &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1\left(n\right) q^n\end{aligned}$$

בנוסף

$$E_2(z) = 1 + \frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2}\right)$$

האם $E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2E_2(z)$? כלומר האם E_2 מודולרית?

$$\begin{aligned}
z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m\left(-\frac{1}{z}\right)+n\right)^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{z^2}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(-m+nz)^2}\right)\\
&= \frac{1}{z^2}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(m+nz)^2}+\frac{1}{m^2}\right)\\
&= 1+\frac{1}{z^2}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(m+nz)^2}\\
&= 1+\frac{1}{z^2}+\frac{3}{\pi^2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(m+nz)^2}-\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2z^2}\right)\\
&= 1+\frac{1}{z^2}+\frac{3}{\pi^2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(m+nz)^2}-\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{1}{z^2}\right)\\
&= 1+\frac{3}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(m+nz)^2}\\
&= 1+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(mz+n)^2}
\end{aligned}$$

אלא שכאן אין אפשרות להחליף את סדר הסכימה!

משפט 3.22 $E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2E_2(z) + \frac{12z}{2\pi i}$.

הוכחה: נחסיר גורמי תיקון $a_{n,m}(z)$ מ $\frac{1}{(mz+n)^2}$ בכל טור, כך שהטורים הכפולים יתכנסו בהחלט. אז נוכל להחליף סדר סכימה. נרצה לדעת לחשב גם את ההפרש $\sum_{m\neq 0}\sum_n a_{m,n}(z) - \sum_{n\neq 0}\sum_m a_{m,n}(z)$. נבחר

$$a_{m,n}(z) = \frac{1}{(mz+n)(mz+n-1)} = \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n}$$

אז

$$\frac{1}{(mz+n)^2} - a_{m,n}(z) = \frac{(mz+n-1)-(mz+n)}{(mz+n)^2(mz+n-1)} = -\frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}$$

ואז

$$\tilde{E}_2(z) = 1 + \frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(mz+n)^2} - a_{m,n}(z)\right)\right)$$
$$= 1 + \frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2}\right) - \frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n}(z)\right)$$

נשים לב כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n}(z)$ הוא טור טלסקופי שהאיבר הכללי שלו שואף ל0, ולכן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n}(z) = 0$. לכן קיבלנו

$$\tilde{E}_2(z) = 1 + \frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2}\right) = E_2(z)$$

הטור $\sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}$ מתכנס בהחלט כטור כפול, ולכן אפשר להחליף את סדר הסכימה:

$$\sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(mz+n)^2} - a_{m,n}(z)\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{(mz+n)^2} - a_{m,n}(z)\right)\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(mz+n)^2}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m\neq 0} a_{m,n}(z)\right)$$

המחובר הראשון מתכנס בהחלט כטור רגיל: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(mz+n)^2}\right| < \infty$. נראה שגם $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m\neq 0} a_{m,n}(z)\right| < \infty$: נכתוב

$$a_{m,n}(z) = a_{m,n}(z) - \frac{1}{(mz+n)^2} + \frac{1}{(mz+n)^2}$$

אז

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m\neq 0} a_{m,n}(z)\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}\left|a_{m,n}(z) - \frac{1}{(mz+n)^2}\right| + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(mz+n)^2}\right|$$

וראינו שכל אחד מהמחוברים מתכנס למספר סופי. כלומר קיבלנו

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m\neq 0} a_{m,n}(z)\right| < \infty$$

כעת ניתן לכתוב:

$$E_2(z)=\tilde{E}_2(z)=1+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{(mz+n)^2}\right)\right)-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}a_{m,n}(z)$$
$$=z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}a_{m,n}(z)$$

כלומר

$$z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)-E_2(z)=\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}a_{m,n}(z)$$

משום ש $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m\neq 0}a_{m,n}(z)\right|<\infty$, בפרט

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}a_{m,n}(z) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N+1}^{N}\sum_{m\neq 0}a_{m,n}(z)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq 0}\sum_{n=-N+1}^{N}a_{m,n}(z)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq 0}\sum_{n=-N+1}^{N}\left(\frac{1}{mz+n-1}-\frac{1}{mz+n}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{mz-N}-\frac{1}{mz+N}\right)\\
&= \frac{1}{z}\lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{m-\frac{N}{z}}+\frac{1}{-m-\frac{N}{z}}\right)\\
&= \frac{2}{z}\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m-\frac{N}{z}}+\frac{1}{-m-\frac{N}{z}}\right)\\
\underbrace{}_{-\frac{N}{z}\in\mathcal{H}} &= \frac{2}{z}\lim_{N\to\infty}\left(\pi\cot\left(-\frac{\pi N}{z}\right)-\frac{1}{-\frac{N}{z}}\right)\\
&= \frac{2}{z}\lim_{N\to\infty}\left(\pi\cot\left(-\frac{\pi N}{z}\right)+\frac{z}{N}\right)\\
&= \frac{2\pi}{z}\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{e^{-\frac{i\pi N}{z}}+e^{\frac{i\pi N}{z}}}{2}}{\frac{e^{-\frac{i\pi N}{z}}-e^{\frac{i\pi N}{z}}}{2i}}\\
&= \frac{2\pi i}{z}\lim_{N\to\infty}\frac{e^{-\frac{i2\pi N}{z}}+1}{e^{-\frac{i2\pi N}{z}}-1}=-\frac{2\pi i}{z}
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש $\lim_{N\to\infty} e^{-\frac{i2\pi N}{z}} = 0$, כי $-\frac{2\pi}{z} \in \mathcal{H}$. קיבלנו כי

$$z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right) - E_2(z) = -\frac{6\pi i}{\pi^2 z}$$
$$E_2\left(-\frac{1}{z}\right) - z^2 E_2(z) = \frac{12}{2\pi i} z$$

■

הגדרה 3.23 פונקציית η של דדקינד:

$$\eta(z) = e^{\frac{2\pi iz}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{2\pi inz}\right) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)$$

טענה 3.24 המכפלה האינסופית מתכנסת ב$\mathcal{H}$.

הוכחה: $|q| < 1$, ולכן ניתן לקחת ענף ראשי ל $\mathrm{Log}(1-q^n)$:

$$\mathrm{Log}(1-q^n) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{nk}}{k}$$

הטור הכפול $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{nk}}{k}$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בתחומים $\mathrm{Im} z \geq \delta > 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty}\left(|q|^k\right)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{|q|^k}{1 - |q|^k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{|q^{-k}| - 1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{|e^{-2\pi ikz}| - 1} \\
\underbrace{}_{0<y=\mathrm{Im} z} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{e^{2\pi ky} - 1} < \infty
\end{aligned}$$

(המעבר האחרון למשל ע"י מבחן השורש).

ומכאן שהטור $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\left(1 - e^{2\pi inz}\right)$ מתכנס בהחלט ומגדיר פונקציה הולומורפית

ב-$\mathcal{H}$.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=e^{f(z)}=\exp\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Log}\left(1-e^{2\pi inz}\right)\right)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\exp\left(\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Log}\left(1-e^{2\pi inz}\right)\right)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-e^{2\pi inz}\right)$$

ובפרט המכפלה אינה מתאפסת ב-$\mathcal{H}$ והולומורפית בתחום זה. אותם הדברים תקפים עבור η. ■

משפט 3.25 $\eta\left(-\frac{1}{z}\right)=\sqrt{\frac{z}{i}}\eta\left(z\right)$. כאן $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{i}\right)>0$ אז

$$\sqrt{\frac{z}{i}}=e^{\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Log}\left(\frac{z}{i}\right)}$$

הוכחה: $\eta\left(z\right)=e^{g(z)}$ עבור $g\left(z\right)=\frac{2\pi iz}{24}+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}\left(1-q^n\right)$, ולכן

$$\frac{\eta'\left(z\right)}{\eta\left(z\right)}=g'\left(z\right)=\frac{2\pi i}{24}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi in\cdot e^{2\pi inz}}{1-e^{2\pi inz}}$$
$$=\frac{2\pi i}{24}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\right)$$
$$=\frac{2\pi i}{24}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{m=1}^{\infty}q^{mn}\right)$$
$$=\frac{2\pi i}{24}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1\left(n\right)q^n\right)$$
$$=\frac{2\pi i}{24}E_2\left(z\right)$$

ועבור $z\mapsto\eta\left(-\frac{1}{z}\right)$,

$$\frac{\frac{d}{dz}\eta\left(-\frac{1}{z}\right)}{\eta\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{\frac{1}{z^2}\eta'\left(-\frac{1}{z}\right)}{\eta\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{2\pi i}{24z^2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)$$
$$=\frac{2\pi i}{24z^2}\left(z^2E_2\left(z\right)+\frac{12z}{2\pi i}\right)$$
$$=\frac{2\pi i}{24}E_2\left(z\right)+\frac{1}{2z}$$
$$=\frac{\eta'\left(z\right)}{\eta\left(z\right)}+\frac{1}{2z}$$

ולכן נקבל

$$\frac{d}{dz}g\left(-\frac{1}{z}\right)=g'(z)+\frac{1}{2z}=\frac{d}{dz}\left(g(z)+\operatorname{Log}\left(\sqrt{\frac{z}{i}}\right)\right)$$

מכאן קיים קבוע c עבורו

$$g\left(-\frac{1}{z}\right)=g(z)+\operatorname{Log}\sqrt{\frac{z}{i}}+c$$

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right)=c_1\cdot\sqrt{\frac{z}{i}}\cdot\eta(z)$$

עבור $c_1=e^c\neq 0$. נציב $z=i$. מכיוון ש$\eta\neq 0$ ב$\mathcal{H}$ נקבל $\eta(i)=c_1\cdot\eta(i)$ ולכן $c_1=1$.
∎

משפט 3.26 $(2\pi)^{-12}\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$.

הערה 3.27 המשפט הוכח ע"י יעקובי.

הוכחה: נסמן את אגף ימין ב$h(z)$. אז $h(z)=\eta(z)^{24}$. נראה כי $h(z)$ תבנית מודולרית ממשקל 12 ביחס ל$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$h(z)$ הולומורפית ב$\mathcal{H}$ (כי $\eta(z)$ הולומורפית). $h(z+1)=h(z)$ (כי $e^{2\pi i(z+1)}=e^{2\pi iz}$).

$$h\left(-\frac{1}{z}\right)=\eta\left(-\frac{1}{z}\right)^{24}=\left(\frac{z}{i}\right)^{12}\eta(z)^{24}$$
$$=z^{12}h(z)$$

ולכן $h|_{[S]_{12}}=h$ וכן $h|_{[T]_{12}}=h$. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ נוצרת ע"י T,S ומתקיימת כפליות: $h|_{[\gamma_1\gamma_2]_{12}}=h|_{[\gamma_1]_{12}}|_{[\gamma_2]_{12}}$, נקבל כי $h|_{[\gamma]_{12}}=h$ לכל $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

מהטענות האחרונות, ברור כי קיים הגבול

$$\lim_{\operatorname{Im}z\to\infty}h(z)=\lim_{q\to 0}q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=0$$

ולכן $h(z)$ תבנית חוד ממשקל 12.

ראינו כי $S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))=\mathbb{C}\cdot\Delta$ ולכן קיים $c\in\mathbb{C}$ עבורו $h(z)=c\cdot\Delta$. נשווה את האיבר הבא בפיתוח־q:

$$\frac{h(z)}{q}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\underset{q\to 0}{\longrightarrow}1$$

ראינו $\operatorname{Res}_{q=0}j(z)=1$ ולכן $(2\pi)^{12}\underset{q\to 0}{\longrightarrow}\frac{\Delta(z)}{q}$ ולכן $c=(2\pi)^{-12}$. ∎

נכתוב $(2\pi)^{-12}\Delta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$, כאשר המקדמים הללו מגדירים את **פונקציית τ של רמנוג'אן**. $\tau(n)=O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ (השערת רמנוג'אן. הוכחה ע"י קליין. אנו נראה $\tau(n)=O\left(n^6\right)$). τ היא פונקציה כפלית, ומתקיים $\tau\left(p^{n+1}\right)=\tau(p)\tau(p^n)-p^{11}\tau\left(p^{n-1}\right)$.

3.5 תבניות מודולריות ביחס לחבורות קונגרואנציה

תהי $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה, אז קיים N טבעי עבורו $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. נסמן ב־$N_\Gamma$ את המספר המינימלי כנ"ל. נסמן ב־$M_k(\Gamma)$ את מרחב התבניות המודולריות ממשקל k, ביחס ל־Γ, וב־$S_k(\Gamma) \subseteq M_k(\Gamma)$ את תת־המרחב של תבניות החוד.

הגדרה 3.28 תהי $0 \neq f \in M_k(\Gamma)$. אז יש לה פיתוח־q_{N_Γ}: $f(z) = a_t q_{N_\Gamma}^t + \dots$. נסמן $\nu_{\infty,N_1}(f) = t$ (הסדר של f ב־∞. מספר זה תלוי בבחירת $N = N_\Gamma$).

משפט 3.29 נסמן $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] = r$, ותהי $0 \neq f \in M_k(\Gamma)$. אז $k \geq 0$ וכן $\nu_{\infty,N_\Gamma}(f) \leq \frac{krN_\Gamma}{12}$.

הוכחה: נפרק $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \dot\bigcup_{j=1}^{r} \Gamma\gamma_j$, ונגדיר $\varphi(z) = \prod_{j=1}^{r} f\mid_{[\gamma_j]_k}(z)$. נראה כי $\varphi(z)$ תבנית מודולרית ממשקל kr ביחס ל־$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: אכן, $\varphi(z)$ הולומורפית ב־$\mathcal{H}$ כמכפלת הולומורפיות. תהי $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, אז

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha \cdot z) &= \prod_{l=1}^{r} f\mid_{[\gamma_l]_k}(\alpha \cdot z) \\
&= \prod_{l=1}^{r} j(\alpha, z)^k \left(\underbrace{j(\alpha, z)^{-k} \cdot f\mid_{[\gamma_l]_k}(\alpha \cdot z)}_{\left(f\mid_{[\gamma_l]_k}\right)\mid_{[\alpha]_k}(z)} \right) \\
&= j(\alpha, z)^{kr} \prod_{l=1}^{r} f\mid_{[\gamma_l \cdot \alpha]_k}(z)
\end{aligned}$$

לכל l, קיימת $\beta_l \in \Gamma$, עבורה $\gamma_l\alpha = \beta_l\gamma_{\sigma(l)}$ עבור תמורה כלשהי $\sigma \in S_r$, ואז

$$f\mid_{[\gamma_l \cdot \alpha]_k} = f\mid_{[\beta_l]_k}\mid_{\left[\gamma_{\sigma(l)}\right]_k} = f\mid_{\left[\gamma_{\sigma(l)}\right]_k}$$

כלומר

$$\varphi(\alpha \cdot z) = j(\alpha, z)^{kr} \cdot \prod_{l=1}^{r} f\mid_{[\gamma_l]_k}(z) = j(\alpha, z)^{kr} \cdot \varphi(z)$$

מכאן שלכל $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\varphi\mid_{[\alpha]_{kr}} = \varphi$.

φ הולומורפית ב־∞: לכל l, $f\mid_{[\gamma_l]_k}$ הולומורפית ב־∞, ולכן גם φ (ניתן להמיר כל פיתוח q לפיתוח q_{N_Γ}). מצאנו כי $\varphi \in M_{kr}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

אם $k < 0$ אז ראינו כי $\varphi \equiv 0$, ולכן קיים $1 \leq j \leq r$ עבורו $f\mid_{[\gamma_j]_k} \equiv 0 \iff \forall z \in \mathcal{H} : f(\gamma_j \cdot z) = 0 \iff \forall z \in \mathcal{H} : f(z) = 0$ (קיימת בחירה כזאת של j כי קבוצת הפונקציות המרומורפיות ב־$\mathcal{H}$ היא שדה, ולכן אין בה מחלקי 0. אפשר גם להשתמש במשפט היחידות כדי להראות שיש j כזה).

נניח כי $k \geq 0$.

$$\nu_\infty(\varphi) + \frac{1}{2}\varphi_i(\varphi) + \frac{1}{3}\varphi_\omega(\varphi) + \dots = \frac{kr}{12}$$

ובפרט $\nu_\infty(\varphi) \leq \frac{kr}{12}$. $q = q_{N_\Gamma}^{N_\Gamma}$, ולכן $\nu_{\infty,N_\Gamma}(\varphi) = N_\Gamma \nu_\infty(\varphi) \leq \frac{krN_\Gamma}{12}$. מכיוון ש$f$ עצמה היא אחד הגורמים היא אחד הגורמים במכפלה המגדירה את φ,

$$\nu_{\infty,N_\Gamma}(f) \leq \nu_{\infty,N_\Gamma}(\varphi) \leq \frac{krN_\Gamma}{12}$$

כנדרש. ■

טענה 3.30 תהי $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה, אז $M_0(\Gamma) = \mathbb{C} \cdot 1$.

הוכחה: נכתוב $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \dot{\bigcup}_{j=1}^{r} \Gamma \cdot \gamma_j$. תהיינה $0 \neq f \in M_0(\Gamma)$ ו $z_0 \in \mathcal{H}$. נסמן $a = f(z_0)$. נגדיר

$$g(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(f\ |_{[\gamma_j]_{k=0}} - a \right) = \prod_{j=1}^{n} (f-a)\ |_{[\gamma_j]_0}$$

כמקודם, $g(z) \in M_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C} \cdot 1$, ולכן g קבועה. $f(z) - a$ גורם במכפלה, אז $g(z_0) = 0$ ולכן $g \equiv 0$. g מכפלת פונקציות הולומורפיות, ולכן קיים $1 \leq j \leq r$ עבורו $f\ |_{[\gamma_j]} \equiv a \iff f(\gamma_j \cdot z) \equiv a \iff f(z) \equiv a$. ■

משפט 3.31 לכל $k \geq 0$ שלם, $M_k(\Gamma)$ ממימד סופי.

הוכחה: תהי $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq M_k(\Gamma)$ קבוצה בת"ל, ובה"כ $\nu_{\infty,N_\Gamma}(f_1) \leq \cdots \leq \nu_{\infty,N_\Gamma}(f_m)$. בלי הגבלת הכלליות, הסדר עולה ממש: נניח כי $\nu_{\infty,N_\Gamma}(f_1) = \nu_{\infty,N_\Gamma}(f_2)$. אז נכתוב

$$f_1(z) = a_t q_{N_\Gamma}^t + \ldots$$
$$f_2(z) = b_t q_{N_\Gamma}^t + \ldots$$

כאשר $a_t, b_t \neq 0$. נסמן $\varphi(t) = f_2(z) - \frac{b_t}{a_t} f_1(z) \in M_k(\Gamma)$ ו $\varphi(z) = c_{t+1} q_{N_\Gamma}^{t+1} + \ldots$, $\nu_{\infty,N_\Gamma}(\varphi) > t$, $\varphi \neq 0$ וניתן להחליף את f_2 בφ:

$$\mathrm{Span}\{f_1, \ldots, f_m\} = \mathrm{Span}\{f_1 \varphi, f_3, \ldots, f_m\}$$

מאידך, ראינו כי $0 \leq \nu_{\infty,N_\Gamma}(f_1) < \nu_{\infty,N_\Gamma}(f_m) \leq \frac{k[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}):\Gamma]N_\Gamma}{12}$, ולכן קיבלנו חסם ל$m$, ובפרט $\dim M_k(\Gamma) < \infty$. ■

נוסחה למימד $M_k(\Gamma)$ כאשר k זוגי

$$\dim M_k(\Gamma) = (k-1)(g_\Gamma - 1) + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \nu_2 + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \nu_3 + \frac{k}{2} \nu_\infty$$

כאשר ν_2 הוא מספר המסלולים $\Gamma \cdot z$ עבורם $\left|\overline{\Gamma}_z\right| = 2$, ν_3 הוא מספר המסלולים $\Gamma \cdot z$ עבורם $\left|\overline{\Gamma}_z\right| = 3$, g_Γ הוא הגנוס של משטח רימן המתאים.

$$\dim S_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g_\Gamma - 1) + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \nu_2 + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \nu_3 + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \nu_\infty & k \geq 4 \\ g_\Gamma & k = 2 \end{cases}$$

למה 3.32 תהיינה $\Gamma(N)\subseteq\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה, ו $\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ בעלת איברים שלמים. אז $\Gamma(N\cdot\det\alpha)\subseteq\alpha^{-1}\Gamma\alpha$.

הוכחה: תהי $\gamma\in\Gamma(N\cdot\det\alpha)$, אז $\gamma=I_2+ND\cdot h$, כאשר $D=\det\alpha$, $h\in M_2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned}\alpha\gamma\alpha^{-1}&=I_2+ND\cdot\alpha h\alpha^{-1}\\&=I_2+N\alpha h\cdot\left(\det\alpha\cdot\alpha^{-1}\right)\end{aligned}$$

נבחין כי $\det\alpha\cdot\alpha^{-1}\in M_2(\mathbb{Z})$ וכן $\alpha h\in M_2(\mathbb{Z})$, כלומר
$\alpha\gamma\alpha^{-1}\in I_2+N\cdot M_2(\mathbb{Z})=\Gamma(N) \impliedby \gamma\in\alpha^{-1}\Gamma(N)\alpha$. ■

למה 3.33 תהיינה $\Gamma(N)\subseteq\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה ו $f\in M_k(\Gamma)$. נכתוב לכל $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ את פיתוח־q_N

$$f\mid_{[\gamma]_k}(z)=\sum_{n=n_0(\gamma)}^{\infty}a_{n,\gamma}q_N^n$$

ניקח $n_0(\gamma)=n_0=0,1$ (כאשר לא נדרוש כי $a_{n_0,\gamma}\neq 0$), ותהי $\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$. אז ל $f\mid_{[\alpha]_k}(z)$ יש פיתוח ב∞:

$$f\mid_{[\alpha]_k}(z)=\sum_{n=a\cdot n_0}^{\infty}b_nq_{ND}^n$$

כאשר $a,D\in\mathbb{N}$ תלויים בα.

הוכחה: יהי $r\in\mathbb{N}$ עבורו $r\cdot\alpha\in M_2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned}f\mid_{[r\alpha]_k}(z)&=r^k(\det\alpha)^{\frac{k}{2}}(rcz+rd)^{-k}f((r\cdot\alpha)\cdot z)\\&=(\det\alpha)^{\frac{k}{2}}(cz+d)^{-k}f(\alpha\cdot z)\\&=f\mid_{[\alpha]_k}(z)\end{aligned}$$

לכן ניתן להניח בה"כ כי $\alpha\in M_2(\mathbb{Z})$. אם $c\neq 0$, אז הכפלת α ב$-I_2$ נותנת

$$f\mid_{[-\alpha]_k}(z)=(-1)^kf\mid_{[\alpha]_k}(z)$$

ולכן ניתן להניח כי $c>0$. נחלק את a בc עם שארית: $a=cu+c'$, אז

$$\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-u\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c'&d'\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c&-d\\c'&d'\end{pmatrix}$$

אם $c'>0$ אז ניתן לחזור על התהליך, אז קיים $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ עבורו $\alpha=\gamma\cdot\begin{pmatrix}e&t\\&r\end{pmatrix}$ כאשר $r,e\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{Z}$ (בלי הגבלת הכלליות $e>0$ (אחרת נכפיל ב$-I_2$) ו$re=\det\alpha>0$

ולכן $r>0$).

$$\begin{aligned}
f|_{[\alpha]_k}(z) &= \left(f|_{[\gamma]_k}\right)|_{\left[\begin{pmatrix} e & t \\ & r\end{pmatrix}\right]_k}(z) \\
&= (er)^{\frac{k}{2}} r^{-k} f|_{[\gamma]_k}\left(\frac{ez+t}{r}\right) \\
&= \left(\frac{e}{r}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n,\gamma} e^{2\pi i n\cdot\frac{ez+t}{rN}} \\
&= \left(\frac{e}{r}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n,\gamma} e^{\frac{2\pi i n t}{rN}} \cdot q_{rN}^{ne} \\
&= \left(\frac{e}{r}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=en_0}^{\infty} b_n q_{rN}^{n}
\end{aligned}$$

(נשים לב כי $e\nmid n \implies b_n=0$). ■

יהי χ **כרקטר דיריכלה מודולו** N: הומומורפיזם של חבורות $\chi:\mathbb{Z}_N^*\to\mathbb{C}^*$ המורחב ל$\mathbb{Z}$ ע"י $\chi(n)=\begin{cases}\chi(n) & (n,N)=1\\ 0 & (n,N)>1\end{cases}$.

כרקטר דיריכלה מודולו N נקרא **פרימיטיבי** אם לא קיימים $N'<N$, $N'\mid N$ וכרקטר דיריכלה מודולו N' כך ש $\chi=\chi'\circ\phi$ ($\phi:\mathbb{Z}_N^*\to\mathbb{Z}_{N'}^*$ העתקת המנה).

כרקטר דיריכלה מודולו N מגדיר כרקטר של $\Gamma_0(N)$ ע"י $\chi\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\chi(d)$: d זר לN כי $ad-bc=1$ ו$c\equiv 0\pmod N$, וגם כפליות מתקיימת מודולו N.

הגדרה 3.34 נסמן ב $M_k(N,\chi)\subseteq M_k(\Gamma_1(N))$ את תת־המרחב של התבניות f המקיימות $\forall\gamma\in\Gamma_0(N): f|_{[\gamma]_k}=\chi(\gamma)f$.

משפט 3.35

1. תהיינה $\Gamma(N)\subseteq\Gamma\subseteq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, ונסמן $\Gamma'=\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, אז Γ' תת־חבורת קונגרואנציה, לכל $f\in M_k(\Gamma)$, $f|_{[\alpha]_k}\in M_k(\Gamma')$, וכן לכל $f\in S_k(\Gamma)$, $f|_{[\alpha]_k}\in S_k(\Gamma')$.

   כמקרה פרטי, $f\in M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ וN טבעי, אז $g(z)=f(Nz)\in M_k(\Gamma_0(N))$ (אם f חוד אז g חוד). נראה בהמשך את פיתוח־q של g לפי פיתוח־q של f.

2. יהיו χ כרקטר דיריכלה מודולו M וχ_1 כרקטר דיריכלה מודולו N. תהי $f\in M_k(N,\chi)$. נגדיר על $\mathcal{H}$ את הפונקציה f_{χ_1}: נקח פיתוח־q של f: $f(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}a_nq^n$ ונגדיר $f_{\chi_1}(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n\chi_1(n)q^n$. מכיוון ש$|\chi_1|\le 1$ ופיתוח־q של f מתכנס בהחלט ובמידה שווה (בתחומים מתאימים), גם לf_{χ_1} הפיתוח מתכנס. מתקיים $f_{\chi_1}\in M_k\left(MN^2,\chi\chi_1^2\right)$.

הוכחה:

1. יהי $r \in \mathbb{N}$ עבורו $r\alpha \in M_2(\mathbb{Z})$, אז $(r\alpha)^{-1}\Gamma(r\alpha) = \alpha^{-1}\Gamma\alpha$, ולכן ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות כי $\alpha \in M_2(\mathbb{Z})$. ראינו כי $\Gamma(N \cdot \det\alpha) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma\alpha$, ולכן $\Gamma(N \cdot \det\alpha) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma'$, כלומר Γ' תת־חבורת קונגרואנציה.
יהיו $f \in M_k(\Gamma)$ ו $\gamma' \in \Gamma'$, ונכתוב $\gamma' = \alpha^{-1}\gamma\alpha$ עבור $\gamma \in \Gamma$. אז

$$\left(f \mid_{[\alpha]_k}\right) \mid_{[\alpha^{-1}\gamma\alpha]_k} = f \mid_{[\alpha\cdot\alpha^{-1}\gamma\alpha]_k} = f \mid_{[\gamma]_k}\mid_{[\alpha]_k} = f \mid_{[\alpha]_k}$$

וברור כי $f \mid_{[\alpha]_k}$ הולומורפית ב$\mathcal{H}$. לכל $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

$$\left(f \mid_{[\alpha]_k}\right) \mid_{[\gamma]_k}(z) = f \mid_{[\alpha\gamma]_k}(z) = \sum_{n=an_0}^{\infty} G_{n,\alpha_0} q_{N_\Gamma}$$

(הלמה הקודמת), ולכן $f \mid_{[\alpha]_k}$ הולומורפית ב∞, כלומר $f \mid_{[\alpha]_k} \in M_k(\Gamma')$. אם $f \in S_k(\Gamma)$ אז $n_0 \in \mathbb{N}$, ולכן האיבר החופשי בפיתוח־q של $f \mid_{[\alpha]_k}$ מתאפס, כלומר $f \mid_{[\alpha]_k} \in S_k(\Gamma')$.

מקרה פרטי $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\alpha = \begin{pmatrix} N & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\Gamma' = \alpha\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\alpha^{-1} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \left\{ \begin{pmatrix} N^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & \\ & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & N^{-1}b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\} \\
&= \Gamma_0(N)
\end{aligned}$$

מתקיים $f \mid_{[\alpha]_k}(z) = N^{\frac{k}{2}} f(Nz)$ ולכן $g(z) = f(Nz) \in M_k(\Gamma_0(N))$.
אם $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ אז $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n N z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{Nn}$.

$$\begin{aligned}
g \mid_{[S]}(z) = z^{-k} g\left(-\frac{1}{z}\right) &= z^{-k} f\left(-\frac{N}{z}\right) \\
&= N^{-k}\left(\frac{z}{N}\right)^{-k} f\left(-\frac{1}{\frac{z}{N}}\right) \\
&= N^{-k} f \mid_{[S]_k}\left(\frac{z}{N}\right) \\
&= N^{-k} f\left(\frac{z}{N}\right) \\
&= N^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_N^n
\end{aligned}$$

2. נכתוב את הפיתוח־q של f_{χ_1}:

$$f_{\chi_1}(z) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \chi_1(\nu) \sum_{0 \le n \equiv \nu \pmod N} a_n q^n$$

מתקיים $\begin{cases} 1 & l \equiv \nu \pmod N \\ 0 & l \not\equiv \nu \pmod N \end{cases} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (l-\nu)\frac{n}{N}}$, ולכן

$$\begin{aligned} f_{\chi_1}(z) &= \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\chi_1(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1} a_n e^{2\pi i(\nu-n)\frac{m}{N}} q^n \\ &= \frac{1}{N}\sum_{\nu,m=0}^{N-1}\chi_1(\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i(\nu-n)\frac{m}{N}} q^n \\ &= \frac{1}{N}\sum_{\nu,m=0}^{N-1}\chi_1(\nu)\, e^{2\pi i\nu\frac{m}{N}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-2\pi i\frac{mn}{N}} e^{2\pi i z n} \end{aligned}$$

למה 3.36 אם m אינו זר לN אז $\sum_{\nu=0}^{N-1}\chi_1(\nu)\, e^{2\pi i\nu\frac{m}{N}} = 0$.

הוכחה: הסכום שווה ל $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_N^*}\chi_1(\nu)\, e^{2\pi i\nu\frac{m}{N}}$. אם m אינו זר לN, אז $\xi = e^{\frac{2\pi i m}{N}}$ שורש יחידה מסדר $N \mid N'$, $N' < N$ והסכום הוא $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_N^*}\chi_1(\nu)\,\xi^{\nu}$.

יהי $\phi : \mathbb{Z}_N^* \to \mathbb{Z}_{N'}^*$ ההומומורפיזם הטבעי, אז הסכום הוא

$$\begin{aligned} \sum_{\nu\in \mathrm{Ker}\phi\backslash\mathbb{Z}_N^*}\ \sum_{\nu'\in\mathrm{Ker}\phi}\chi_1(\nu\nu')\,\xi^{\nu\nu'} &\underbrace{=}_{\nu'\in\mathrm{Ker}\phi \implies \xi^{\nu'}=\xi} \\ &= \sum_{\nu\in \mathrm{Ker}\phi\backslash\mathbb{Z}_N^*}\xi^{\nu}\chi_1(\nu)\sum_{\nu'\in\mathrm{Ker}\phi}\chi_1(\nu') \end{aligned}$$

והסכום הפנימי מתאפס כי χ_1 הוא כרקטר לא טריוואלי של $\mathrm{Ker}\phi$. (אחרת היה מתקיים כי χ_1 כרקטר דיריכלה מודולו N_1 בסתירה לכך שהוא פרימיטיבי מודולו N) ■

מהלמה, נקבל כי

$$\begin{aligned}
f_{\chi_1}(z) &= \frac{1}{N}\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\chi_1(\nu)\,e^{2\pi i\nu\frac{m}{N}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-2\pi i\frac{mn}{N}+2\pi izn}\\
\underbrace{}_{\substack{\nu\leftarrow m\nu\\ \mathbb{Z}_N^*\cdot m=\mathbb{Z}_N^*}} &= \left(\frac{1}{N}\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\chi_1\left(\frac{\nu}{m}\right)e^{\frac{2\pi i\nu}{N}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi in\left(z-\frac{m}{N}\right)}\right)\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\chi_1(\nu)\,e^{\frac{2\pi i\nu}{N}}\right)}_{\tau(\chi_1)}\left(\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\overline{\chi_1(m)}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi in\left(z-\frac{m}{N}\right)}}_{f\left(z-\frac{m}{N}\right)}\right)\\
&= \tau(\chi_1)\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\overline{\chi_1(m)}\cdot f\left(z-\frac{m}{N}\right)\\
&= \tau(\chi_1)\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\overline{\chi_1(m)}\cdot f\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -\frac{m}{N}\\ & 1\end{pmatrix}}_{u_m}\cdot z\right)
\end{aligned}$$

נניח כי $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0\left(MN^2\right)$, אז

$$f_{\chi_1}(\gamma\cdot z)=\tau(\chi_1)\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\overline{\chi_1(m)}\cdot f(u_m\gamma\cdot z)$$

נבחין כי

$$\begin{aligned}
u_m\gamma u_{m'}^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & -\frac{m}{N}\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{m'}{N}\\ & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & -\frac{m}{N}\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & a\frac{m'}{N}+b\\ c & c\frac{m'}{N}+d\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a-\frac{m}{N}c & a\frac{m'}{N}+b-\frac{mm'}{N^2}c-\frac{m}{N}d\\ c & c\frac{m'}{N}+d\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a-\frac{mc}{N} & \left(a-\frac{mc}{N}\right)\frac{m'}{N}+b-\frac{md}{N}\\ c & d+\frac{m'c}{N}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

מכאן מאחר ו-$c \mid MN^2$ מתקיים $\frac{mc}{N},\frac{m'c}{N}\in\mathbb{Z}$.

מתקיים $\frac{am'-dm}{N}-\underbrace{\frac{mm'c}{N^2}+b}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}\iff am'=dm\,(\mod N)$. a,d זרים לNN, ולכן קיים m' יחיד מודולו N עבורו $u_m\gamma u_{m'}^{-1}\in\Gamma_0\left(MN^2\right)$ ובפרט שייך ל$\Gamma_0\left(M\right)$. כעת

$$\begin{aligned}
f_{\chi_1}\left(\gamma\cdot z\right)&=\tau\left(\chi_1\right)\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\overline{\chi_1\left(m\right)}\cdot f\left(u_m\gamma u_{m'}^{-1}\left(u_{m'}z\right)\right)\\
\underbrace{}_{\substack{\forall\gamma\in\Gamma_0(M):\\ f|_{[\gamma]_k}=\chi(\chi)\cdot f}}&=\tau\left(\chi_1\right)\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\overline{\chi_1\left(m\right)}\cdot\underbrace{\left(c\left(u_{m'}\cdot z\right)+d+\frac{m'c}{N}\right)^k}_{j\left(u_m\gamma u_{m'}^{-1},u_{m'}\cdot z\right)^k}\cdot\chi\left(d+\frac{m'c}{N}\right)\cdot f\left(u_{m'}\cdot z\right)
\end{aligned}$$

$MN^2\mid c\impliedby M\mid MN\mid\frac{c}{N}\impliedby\chi\left(d+\frac{m'c}{N}\right)=\chi\left(d\right)$, ומתקיים כי

$$c\cdot\left(u_{m'}\cdot z\right)+d+\frac{m'c}{N}=c\cdot\left(\begin{pmatrix}1&-\frac{m'}{N}\\&1\end{pmatrix}\cdot z\right)+d+\frac{m'c}{N}=cz+d$$

כלומר קיבלנו

$$f_{\chi_1}\left(\gamma\cdot z\right)=\tau\left(\chi_1\right)\chi\left(d\right)\left(cz+d\right)^k\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\overline{\chi_1\left(m\right)}\cdot f\left(z-\frac{m'}{N}\right)$$

$am'=dm\,(\mod N)\implies$

$$\chi_1\left(a\right)\chi_1\left(m'\right)=\chi_1\left(am'\right)=\chi_1\left(dm\right)=\chi_1\left(d\right)\chi_1\left(m\right)$$

כמו כן $ad\equiv1\left(\mod MN^2\right)\implies\chi_1\left(a\right)\chi_1\left(d\right)=1$, ולכן $\chi_1\left(m'\right)=\chi_1\left(m\right)\chi_1\left(d\right)^2\implies\overline{\chi_1\left(m'\right)}=\overline{\chi_1\left(m\right)}\cdot\overline{\chi_1\left(d\right)}^2$.

$$\begin{aligned}
f_{\chi_1}\left(\gamma\cdot z\right)&=\tau\left(\chi_1\right)\left(cz+d\right)^k\left(\chi\chi_1^2\right)\left(d\right)\sum_{\substack{m=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\underbrace{\overline{\chi_1\left(d\right)}^2\cdot\overline{\chi_1\left(m\right)}}_{\overline{\chi_1\left(m'\right)}}\cdot f\left(z-\frac{m'}{N}\right)\\
&=\left(cz+d\right)^k\left(\chi\chi_1^2\right)\left(d\right)\tau\left(\chi_1\right)\sum_{\substack{m'=0\\(m,N)=1}}^{N-1}\chi_1\left(m'\right)\cdot f\left(z-\frac{m'}{N}\right)\\
&=\left(cz+d\right)^k\left(\chi\chi_1^2\right)\left(d\right)\cdot f_{\chi_1}\left(z\right)
\end{aligned}$$

קל לבדוק שזו תבנית, ולכל $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} f_{\chi_1}\mid_{[\gamma]_k}(z) &= j(\gamma,z)^{-k} f_{\chi_1}(\gamma\cdot z) \\ &= j(\gamma,z)^{-k}\tau(\chi_1)\sum_{m=0}^{N-1}\overline{\chi_1(m)} f(u_m\gamma\cdot z) \\ &= \tau(\chi_1)\sum_{m=0}^{N-1}\overline{\chi_1(m)}\cdot \underbrace{\underbrace{j(u_m,\gamma\cdot z)^{-k}}_{1}\cdot j(\gamma,z)^{-k}}_{j(u_m\cdot\gamma,z)^{-k}} f(u_m\gamma\cdot z) \\ &= \tau(\chi_1)\sum_{m=0}^{N-1}\overline{\chi_1(m)}\cdot f\mid_{[u_m\gamma]_k}(z) \end{aligned}$$

וזו הולומורפית ב∞ לפי הלמה לעיל.

■

מקרה פרטי $\chi = 1$, $M_k(M,\chi) = M_k(\Gamma_0(M))$, ויהי χ_1 כרקטר פרימיטיבי מודולו N מסדר 2 (כלומר $\chi_1^2 = 1$, למשל סמל לז'נדר עבור $N=p$). אז

$$f_{\chi_1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_1(n) q^n \in M_k\left(\Gamma_0\left(MN^2\right)\right)$$

3.6 טור איזנשטיין ביחס לחבורות $\Gamma(N)$

נקבע $\underline{a} = (a_1,a_2) \in \left(\mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}}\right)^2$. יהי $k \geq 3$ שלם.

הגדרה 3.37 טור איזנשטיין

$$G_k^{\underline{a}(\bmod N)}(z) = \sum_{\substack{\underline{m}\equiv\underline{a}(\bmod N)\\ \underline{m}\neq\underline{0}}} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^k}$$

זה טור חלקי לטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס. אם $\underline{a} = (0,0)$ אז $m_1 = mN$, $m_2 = nN$ ונקבל

$$G_k^{\underline{0}}(z) = N^{-k} \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

טור איזנשטיין המוכר לנו. נניח אם כן כי $\underline{a} \neq \underline{0}$.

ל$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
G_k^{\underline{a}} |_{[\gamma]_k} (z) &= (cz+d)^{-k} G_k^{\underline{a}} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) \\
&= (cz+d)^{-k} \sum_{\substack{\underline{m} \equiv \underline{a} (\bmod N) \\ \underline{m} \neq \underline{0}}} \frac{1}{\left(m_1 \frac{az+b}{cz+d} + m_2 \right)^k} \\
&= \sum_{\substack{\underline{m} \equiv \underline{a} (\bmod N) \\ \underline{m} \neq \underline{0}}} \frac{1}{\left(m_1 (az+b) + m_2 (cz+d) \right)^k} \\
&= \sum_{\substack{\underline{m} \equiv \underline{a} (\bmod N) \\ \underline{m} \neq \underline{0}}} \frac{1}{\left((\underline{m} \cdot \gamma)_1 \cdot z + (\underline{m} \cdot \gamma)_2 \right)^k} \\
&= \sum_{\substack{\underline{m} \equiv \underline{a}\gamma (\bmod N) \\ \underline{m} \neq \underline{0}}} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^k} \\
&= G_k^{\underline{a}\gamma}(z)
\end{aligned}$$

כלומר $G_k^{\underline{a}} |_{[\gamma]_k} = G_k^{\underline{a}\gamma}$, ולכן בפרט עבור $\gamma \equiv I_2 (\bmod N)$ מתקיים $\underline{a}\gamma = \underline{a} (\bmod N)$, ולכן לכל $\gamma \in \Gamma(N)$, $G_k^{\underline{a}} |_{[\gamma]_k} = G_k^{\underline{a}}$.

אם $\underline{a} = (0, a_2)$, אז לכל $\gamma \in \Gamma_1(N)$, $(0, a_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c \equiv 0 & d \equiv 1 \end{pmatrix} \equiv (0, a_2)$, ולכן $G_k^{\underline{a}} |_{[\gamma]_k} = G_k^{(0,a_2)}$.

טורי איזנשטיין הולומורפיים בנקודות חוד: די לבדוק כי יש הולומורפיות ב∞ (לפי $G_k^{\underline{a}} |_{[\gamma]_k} = G_k^{\gamma \underline{a}}$). מההתכנסות במידה שווה של הטור המגדיר את $G_k^{\underline{a}}$,

$$\lim_{\mathrm{Im} z \to \infty} G_k^{\underline{a}}(z) = \sum_{\underline{0} \neq \underline{m} \equiv \underline{a}} \lim_{\mathrm{Im} z \to \infty} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^k} = \begin{cases} 0 & a_1 \not\equiv 0 (\bmod N) \\ \sum_{0 \neq m_2 \equiv a_2 (\bmod N)} \frac{1}{m_2^k} & a_1 \equiv 0 (\bmod N) \end{cases}$$

פיתוח־q_N של טורי איזנשטיין עבור $k \geq 3$, $\underline{a} \neq 0$:

$$\begin{aligned}
G_k^{\underline{a} (\bmod N)}(z) &= \sum_{\substack{\underline{m} \equiv \underline{a} (\bmod N) \\ \underline{m} \neq \underline{0}}} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^k} \\
&= \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \equiv a_1 (\bmod N) \\ m_2 \equiv a_2 (\bmod N)}} \frac{1}{m_2^k} + \sum_{0 < m_1 \equiv a_1 (\bmod N)} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1 z + a_2 + rN)^k} \\
&+ \sum_{0 < m_1 \equiv -a_1 (\bmod N)} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(-m_1 z + a_2 + rN)^k}
\end{aligned}$$

נסמן $.b_{0,k}^{\underline{a}}=\begin{cases}0 & a_1\not\equiv 0\,(\mod N)\\ \displaystyle\sum_{\underline{0}\neq m_2\equiv a_2(\mod N)}\frac{1}{m_2^k} & a_1\equiv 0\,(\mod N)\end{cases}$

נזכר בזהות $\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+r)^k}=\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{2\pi inz}$. נקבל

$$\begin{aligned}
G_k^{\underline{a}(\mod N)}(z) &= b_{0,k}^{\underline{a}}+\frac{1}{N^k}\sum_{0<m_1\equiv a_1(N)}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(\frac{m_1z+a_2}{N}+r\right)^k}\\
&\quad+\frac{1}{(-N)^k}\sum_{0<m_1\equiv -a_1(N)}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(\frac{m_1z-a_2}{N}+r\right)^k}\\
&= b_{0,k}^{\underline{a}}+\frac{1}{N^k}\sum_{0<m_1\equiv a_1(N)}\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\underbrace{e^{2\pi in\frac{m_1z+a_2}{N}}}_{e^{2\pi in\frac{a_2}{N}}q_N^{m_1n}}\\
&\quad+\frac{1}{(-N)^k}\sum_{0<m_1\equiv -a_1(N)}\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\underbrace{e^{2\pi in\frac{m_1z-a_2}{N}}}_{e^{-2\pi in\frac{a_2}{N}}q_N^{m_1n}}\\
&= b_{0,k}^{\underline{a}}+\frac{\left(2\pi iN^{-1}\right)^k}{(k-1)!}\left[(-1)^k\sum_{0<m_1\equiv a_1(N)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{2\pi in\frac{a_2}{N}}q_N^{m_1n}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{0<m_1\equiv -a_1(N)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{-2\pi in\frac{a_2}{N}}q_N^{m_1n}\right]\\
\underbrace{}_{d=m_1n} &= b_{0,k}^{\underline{a}}+\frac{\left(2\pi iN^{-1}\right)^k}{(k-1)!}\sum_{d=1}^{\infty}\left[\sum_{\substack{1\le n|d\\ \frac{d}{n}\equiv a_1(N)}}(-1)^k n^{k-1}e^{2\pi in\frac{a_2}{N}}+\sum_{\substack{1\le n|d\\ \frac{d}{n}\equiv -a_1(N)}}n^{k-1}e^{-2\pi in\frac{a_2}{N}}\right]q_N^d
\end{aligned}$$

מקרים פרטיים אם $\underline{a}=(a_1,0)$, $a_1\neq 0$ אז $b_{0,k}^{\underline{a}}=0$ ונקבל

$$G_k^{\underline{a}(\mod N)}(z) = \frac{\left(2\pi iN^{-1}\right)^k}{(k-1)!}\sum_{d=1}^{\infty}\left[\sum_{\substack{1\le n|d\\ \frac{d}{n}\equiv a_1(N)}}(-1)^k n^{k-1}+\sum_{\substack{1\le n|d\\ \frac{d}{n}\equiv -a_1(N)}}n^{k-1}\right]q_N^d$$

אם $\underline{a}=(0,a_2)$, $a_2\neq 0$ אז $b_{0,k}^{a_2}=\sum_{n\equiv a_2}\frac{1}{n^k}$ ונקבל

$$\begin{aligned} G_k^{\underline{a}(N)}(z) &= \sum_{0\neq n\equiv a_2}\frac{1}{n^k}+\frac{\left(2\pi i N^{-1}\right)^k}{(k-1)!}\sum_{d=1}^{\infty}\left[\sum_{\substack{1\leq n|d\\ \frac{d}{n}\equiv 0(N)}}(-1)^k n^{k-1}e^{2\pi i n\frac{a_2}{N}}+\sum_{\substack{1\leq n|d\\ \frac{d}{n}\equiv 0(N)}}n^{k-1}e^{-2\pi i n\frac{a_2}{N}}\right]q_N^d \\ \underbrace{}_{\substack{N|d\\ d=Nl\\ q_N^d=q^l}} &= \sum_{0\neq n\equiv a_2}\frac{1}{n^k}+\frac{\left(2\pi i N^{-1}\right)^k}{(k-1)!}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{1\leq n|l}n^{k-1}\left((-1)^k e^{2\pi i n\frac{a_2}{N}}+e^{-2\pi i n\frac{a_2}{N}}\right)\right]q^l \end{aligned}$$

תהי $\Gamma(N)\subseteq\Gamma\subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ונתבונן בפעולת Γ על וקטורי השורה $\underline{a}(\mod N)$, $(a_1,a_2)\cdot\gamma(\mod N)$. נקבע מסלול $\underline{a}\cdot\Gamma=\{\underline{a}\cdot\gamma_1(N),\dots,\underline{a}\cdot\gamma_r(N)\}$. יהי $F(x_1,\dots,x_r)$ פולינום סימטרי והומוגני מדרגה d. נתבונן בפונקציה

$$f(z)=F\left(G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_1(N)}(z),\dots,G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_r(N)}(z)\right)$$

אז $f(z)$ תבנית מודולרית ממשקל kd ביחס לΓ: תהי $\gamma\in\Gamma$, אז

$$\begin{aligned} f\mid_{[\gamma]_{kd}}(z) &= j(\gamma,z)^{-kd}f(\gamma\cdot z) \\ &= F\left(j(\gamma,z)^{-k}G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_1(N)}(\gamma\cdot z),\dots,j(\gamma,z)^{-k}G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_r(N)}(\gamma\cdot z)\right) \\ &= F\left(G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_1(N)}\mid_{[\gamma]_k},\dots,G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_r(N)}\mid_{[\gamma]_k}\right) \\ &= F\left(G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_1\gamma(N)},\dots,G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_r\gamma(N)}\right) \end{aligned}$$

(המעבר השני מתבצע ע"י הומוגניות, השלישי ע"י הזהות שראינו $G_k^{\underline{a}}\mid_{[\gamma]_k}=G_k^{\underline{a}\gamma}$)
כיוון שלקחנו מסלול, קיימת תמורה σ עבורה $\underline{a}\cdot\gamma_j\gamma=\underline{a}\cdot\gamma_{\sigma(j)}$ ומסימטריות F נקבל

$$f\mid_{[\gamma]_{kd}}(z)=F\left(G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_1(N)}(z),\dots,G_k^{\underline{a}\cdot\gamma_r(N)}(z)\right)=f(z)$$

הולומורפיות ב$\mathcal{H}$ ובנקודות החוד ברורה.

דוגמה נבחר $\Gamma=\Gamma_0(N)$, $\underline{a}=(0,a_2)$, $\gcd(a_2,N)=1$. אז

$$\begin{aligned} \underline{a}\cdot\Gamma_0(N) &\equiv \left\{(0,a_2)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}\mid ad-bc=1\mid c\equiv 0(\mod N)\right\}(\mod N) \\ &\equiv \{(0,a_2d)\}\equiv\{(0,d)\mid \gcd(d,N)=1\} \\ &\equiv 0\times\mathbb{Z}_N^*(\mod N) \end{aligned}$$

ולכן $\phi(N) = |\underline{a}\cdot\Gamma_0(N)|$. נקח את הפולינום $F\left(x_1,\ldots,x_{\phi(n)}\right) = x_1+\cdots+x_{\phi(n)}$.
אז

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{(d,N)=1} G_k^{(0,d)(\mod N)}(z) \\ &= \sum_{\substack{m_1\equiv 0(N)\\ (m_2,N)=1}} \frac{1}{(m_1 z+m_2)^k} \end{aligned}$$

הוא תבנית מודולרית ממשקל k ביחס ל$\Gamma_0(N)$.

3.7 מרחב הילברט של תבניות החוד

תהי $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ תת־חבורת קונגרואנציה ויהי $k\in\mathbb{N}$. תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית על $\mathcal{H}$ המקיימת $\forall\gamma\in\Gamma: f|_{[\gamma]_k}=f$. אז $f(z)\in S_k(\Gamma)$ אם ורק אם $f(z)\cdot(\mathrm{Im}z)^{\frac{k}{2}}$ חסומה (כלומר קיים $C>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$, $y>0$, $|f(x+yi)|\le C\cdot y^{-\frac{k}{2}}$).

הוכחה: נניח כי ב$\mathcal{H}$, $\left|f(z)\cdot(\mathrm{Im}z)^{-\frac{k}{2}}\right|\le C$. תהי $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ונכתוב פיתוח־$q_N$:

$f|_{[\gamma]_k}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q_N^n$ (מתכנס בהחלט ובמ"ש בקבוצות קומפקטיות ב $\{0<|q|<1\}$).

נקבע $z_0 = x_0+y_0 i\in\mathcal{H}$, אז $a_n = \frac{1}{N}\int_{z_0}^{z_0+N} f|_{[\gamma]_k}(z)\, e^{-\frac{2\pi i n z}{N}}dz$.

$$\begin{aligned} |a_n| &\le \frac{1}{N}\int_{x_0}^{x_0+N} \left|f|_{[\gamma]_k}(x+y_0 i)\right| e^{\frac{2\pi n y_0}{N}}dx \\ &= \frac{1}{N}e^{\frac{2\pi n y_0}{N}}\int_{x_0}^{x_0+N} |j(\gamma,x+y_0 i)|^{-k}\cdot|f(\gamma\cdot(x+y_0 i))|\,dx \\ &\le \frac{C}{N}e^{\frac{2\pi n y_0}{N}}\int_{x_0}^{x_0+N} |j(\gamma,x+y_0 i)|^{-k}\cdot|\mathrm{Im}(\gamma\cdot(x+y_0 i))|^{-\frac{k}{2}}\,dx \\ &\underbrace{=}_{\mathrm{Im}(\gamma\cdot z)=\frac{\mathrm{Im}z}{|j(\gamma,z)|^2}} \frac{C}{N}e^{\frac{2\pi n y_0}{N}}\int_{x_0}^{x_0+N} |y_0|^{-\frac{k}{2}}\,dx \\ &= \frac{C}{N}e^{\frac{2\pi n y_0}{N}}\cdot N\cdot y_0^{-\frac{k}{2}} = C\cdot e^{\frac{2\pi n y_0}{N}}\cdot y_0^{-\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

אי־שוויון זה מתקיים לכל $n\in\mathbb{Z}$, $y_0>0$. עבור $n<0$, נשאיף $y_0\longrightarrow\infty$ ונקבל $|a_n|\le 0$ ולכן $a_n=0$. עבור $n=0$, $|a_0|\le C\cdot y^{-\frac{k}{2}}$ ושוב, עבור $y_0\longrightarrow\infty$ נקבל $a_0=0$. מכאן ש$f(z)$ תבנית חוד.

נניח כעת כי $f(z)$ תבנית חוד, ונגדיר $g(z)=|f(z)|\cdot(\mathrm{Im}z)^{\frac{k}{2}}$. g אינווריאנטית לΓ:

תהי $\gamma \in \Gamma$, אז

$$\begin{aligned} g(\gamma \cdot z) &= |f(\gamma \cdot z)| \cdot \mathrm{Im}(\gamma \cdot z)^{\frac{k}{2}} \\ &= \left| j(\gamma, z)^k f(z) \right| \frac{(\mathrm{Im} z)^{\frac{k}{2}}}{\left| j(\gamma, z)^k \right|} \\ &= g(z) \end{aligned}$$

ולכן g רציפה על $\mathcal{H}\backslash_{\Gamma}$.

נראה כי g חסומה בסביבת נקודות החוד: תהי $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, אז

$$\begin{aligned} g(\gamma \cdot z) &= |f(\gamma \cdot z)| \cdot \frac{(\mathrm{Im} z)^{\frac{k}{2}}}{\left| j(\gamma, z)^k \right|} \\ &= \left| f|_{[\gamma]_k}(z) \right| \cdot (\mathrm{Im} z)^{\frac{k}{2}} \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_N^n \right| (\mathrm{Im} z)^{\frac{k}{2}} \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{N}} \cdot (\mathrm{Im} z)^{\frac{k}{2}} \right| \underset{\mathrm{Im} z \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

ולכן $g(\gamma \cdot z)$ חסומה בסביבת $\infty \cdot \gamma$ לכל $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, כלומר $g(z)$ חסומה בסביבת נקודות החוד $\infty \cdot \gamma$. המרחב $\mathcal{H}^*\backslash_{\Gamma}$ קומפקטי ולכן $g(z)$ חסומה. ■

מסקנה 3.38 תהי $f \in S_k(\Gamma)$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_N^n$, אז קיים $C > 0$, עבורו לכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq C n^{\frac{k}{2}}$.

הוכחה: ראינו את החסם $|a_n| \leq C \cdot y_0^{-\frac{k}{2}} \cdot e^{\frac{2\pi n y_0}{N}}$. נציב $y_0 = \frac{1}{n}$ ונקבל $|a_n| \leq C \cdot e^{\frac{2\pi}{N}} \cdot n^{\frac{k}{2}} = C_1 \cdot n^{\frac{k}{2}}$. ■

דוגמה עבור $(2\pi)^{-12} \Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$ נקבל $|\tau(n)| \leq C \cdot n^6$. הוכחה השערה של רמנוג'אן, לפיה $|a_n| = O_\varepsilon\left(n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}\right)$ (ע"י Deligne עבור $k \geq 2$, Deligne-Serre עבור $k = 1$).

טענה 3.39 תהי $f(z) \in M_k(\Gamma)$, אז לכל $\delta > 0$ קיימים $C_{1,2} > 0$ כך שלכל z, $\mathrm{Im} z \geq \delta$, $|f(z)| \leq C_1 + C_2 e^{-\frac{2\pi y}{N}}$. אם $f(z) \in S_k(\Gamma)$, אז אפשר לקחת $C_1 = 0$ (ו־f דועכת אקספוננציאלית ב־∞).

הוכחה: נכתוב את פיתוח־q_N, $f(z) = a_0 + q_N(a_1 + a_2 q_N + \dots)$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_N^{n-1}$ מתכנס בהחלט ובמ"ש בתחומים $\{\mathrm{Im} z \geq \delta > 0\}$, ולכן חסום בהם (כי $q_N \to 0$ עבור

$\mathrm{Im}z \to \infty$). לכן

$$|f(z)| \leq |a_0| + C_2 |q_N| = C_1 + C_2 e^{-\frac{2\pi \mathrm{Im} z}{N}}$$

■

טענה 3.40 המידה $\frac{dx \cdot dy}{y^2}$ אינווריאנטית לפעולת $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

למה 3.41 תהי $f(z)$ פונקציה על $\mathcal{H}$ כך ש $\frac{f(z)}{(\mathrm{Im} z)^2}$ אינטגרבילית (במשתנים x, y), ותהי $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, אז

$$\int_{\mathcal{H}} f(g \cdot (x+yi)) \frac{dxdy}{y^2} = \int_{\mathcal{H}} f(x+yi) \frac{dxdy}{y^2}$$

הוכחה: נחליף משתני אינטגרציה לפי פונקציה הולומורפית

$$z = x + yi = \varphi_1(u+vi) + i\varphi_2(u+vi)$$

היעקוביאן הוא

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}$$

מכאן

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| &= \left|\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)^2\right| \\ &= |\varphi'(u+vi)|^2\end{aligned}$$

נכתוב $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $z = g^{-1}\xi = \frac{a\xi+b}{c\xi+d}$ אז

$$\left|\frac{dz}{d\xi}\right|^2 = \left|\frac{a(c\xi+d) - c(a\xi+b)}{(c\xi+d)^2}\right|^2 = \left|\frac{ad-bc}{(c\xi+d)^2}\right|^2 = \frac{1}{|c\xi+d|^4}$$

מכאן

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} f(g\cdot(x+yi)) \frac{dxdy}{y^2} &= \int_{\mathcal{H}} f(\xi_1+\xi_2 i) |c\xi+d|^{-4} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\mathrm{Im}(g^{-1}\xi)^2} \\ \underbrace{}_{\mathrm{Im}(g^{-1}\xi) = \frac{\mathrm{Im}\xi}{|j(g^{-1},\xi)|^2}} &= \int_{\mathcal{H}} f(\xi_1+\xi_2 i) \frac{d\xi_1 d\xi_2}{(\mathrm{Im}\xi)^2}\end{aligned}$$

■

הגדרה 3.42 (המכפלה הפנימית של פטרסון): יהיו $f \in S_k(\Gamma)$, $g \in M_k(\Gamma)$ ויהי L תחום יסודי עבור Γ.

$$\langle f,g\rangle_\Gamma = \frac{1}{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}\right]} \int_L f(z)\,\overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

.($z = x + yi \in L$)

משפט 3.43

1. האינטגרל מתכנס בהחלט.
2. אגף ימין אינו תלוי בבחירת L.
3. אם מתקיים $f \in S_k(\Gamma')$, $g \in M_k(\Gamma')$ כאשר Γ' תת־חבורת קונגרואנציה נוספת, אז $\langle f,g\rangle_\Gamma = \langle f,g\rangle_{\Gamma'}$ (ואז נשמיט את ציון החבורה).

הוכחה: ראשית נראה התכנסות בהחלט במקרה שהתחום היסודי הוא מהצורה $F' = \bigcup_{j=1}^r \gamma_j^{-1} F$ כאשר F התחום היסודי שבנינו עבור $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ו $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \dot\bigcup_{j=1}^r \gamma_j \overline{\Gamma}$. אכן,

$$\begin{aligned}
\int_{F'} f(z)\,\overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} &= \sum_{j=1}^r \int_{\gamma_j^{-1}F} f(z)\,\overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\
\underbrace{=}_{\text{Lemma}} &\sum_{j=1}^r \int_F f\left(\gamma_j^{-1}z\right) \overline{g\left(\gamma_j^{-1}z\right)} \mathrm{Im}\left(\gamma_j^{-1}z\right)^k \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \sum_{j=1}^r \int_F f\left(\gamma_j^{-1}z\right) \overline{g\left(\gamma_j^{-1}z\right)} \left(\frac{\mathrm{Im}z}{\left|j\left(\gamma_j^{-1},z\right)\right|^2}\right)^k \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \sum_{j=1}^r \int_F f\left(\gamma_j^{-1}z\right) j\left(\gamma_j^{-1},z\right)^{-k} \overline{g\left(\gamma_j^{-1}z\right)} \cdot \overline{j\left(\gamma_j^{-1},z\right)^{-k}} \left(\mathrm{Im}z\right)^k \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \sum_{j=1}^r \int_F f\,|_{\left[\gamma_j^{-1}\right]_k}(z) \cdot \overline{g\,|_{\left[\gamma_j^{-1}\right]_k}(z)} \cdot y^k \frac{dxdy}{y^2}
\end{aligned}$$

ראינו כי יש קבוע $C > 0$ עבורו $\left|f\,|_{\left[\gamma_j^{-1}\right]_k}(z)\right| \le Ce^{-\frac{2\pi\cdot\mathrm{Im}z}{N}}$ לכל $z \in F$ (כי $\mathrm{Imz} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$) וקבועים $C', C'' > 0$ עבורם $\left|g\,|_{\left[\gamma_j^{-1}\right]_k}(z)\right| \le C' + C''e^{-2\pi\frac{\mathrm{Im}z}{N}} \le \tilde{C}e^{-2\pi\frac{\mathrm{Im}z}{N}}$, ולכן:

$$\begin{aligned}
\int_L \left|f(z)\,\overline{g(z)} y^k \frac{1}{y^2}\right| dxdy &\le \sum_{j=1}^r \int_F C_3 e^{-2\pi\frac{y}{N}} y^{k-2} dxdy \\
\underbrace{\le}_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} &\sum_{j=1}^r C_3 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^\infty e^{-2\pi\frac{y}{N}} y^{k-2} dy < \infty
\end{aligned}$$

נניח כי L תחום יסודי כלשהו עבור Γ.

$$\begin{aligned} L = L \cap \mathcal{H} &= L \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1} \overline{F'} \right) \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} L \cap \left(\gamma^{-1} \overline{F'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_L f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{L \cap (\gamma^{-1} F')} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma L \cap F'} f \mid_{[\gamma^{-1}]_k} (z) \overline{g \mid_{[\gamma^{-1}]_k} (z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma L \cap F'} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \int_{F'} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \end{aligned}$$

וקיבלנו את (1) ו(2).

עבור (3): נניח כי $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ונכתוב $\overline{\Gamma} = \bigcup_{r=1}^m \delta_r \overline{\Gamma'}$, $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j \overline{\Gamma}$. בסימונים הקודמים, $\tilde{F} = \bigcup_{r=1}^m \delta_r^{-1} F'$ הוא תחום יסודי עבור Γ'.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\Gamma'} &= \frac{1}{mn} \int_{\tilde{F}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{r=1}^m \int_{\delta_r^{-1} F'} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{r=1}^m \int_{F'} f \mid_{[\delta_r^{-1}]_k} (z) \overline{g \mid_{[\delta_r^{-1}]_k} (z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\ \underbrace{}_{\delta_r^{-1} \in \Gamma} &= \frac{1}{mn} \sum_{r=1}^m \int_{F'} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\ & \frac{1}{n} \int_{F'} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} = \langle f, g \rangle_\Gamma \end{aligned}$$

באופן כללי, נקח $\Gamma'' = \Gamma \cap \Gamma'$, אז $\Gamma'' \subseteq \Gamma, \Gamma'$, ולכן $\langle f, g \rangle_{\Gamma'} = \langle f, g \rangle_{\Gamma''} = \langle f, g \rangle_\Gamma$. ■

משפט 3.44 נניח כי $f \in S_k(\Gamma)$, $g \in M_k(\Gamma)$, $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, אז $\left\langle f \mid_{[\alpha]_k}, g \mid_{[\alpha]_k} \right\rangle = \langle f, g \rangle$.

הוכחה: $\Gamma' = \Gamma \cap \left(\alpha \Gamma \alpha^{-1} \right)$ היא תת־חבורת קונגרואנציה (כי ראינו ש $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cap \left(\alpha \Gamma \alpha^{-1} \right)$ תת־חבורת קונגרואנציה), אז $f \in S_k\left(\Gamma \cap \left(\alpha \Gamma \alpha^{-1} \right) \right)$, $g \in M_k\left(\Gamma \cap \left(\alpha \Gamma \alpha^{-1} \right) \right)$.
ראינו כי $f \mid_{[\alpha]_k} \in S_k\left(\alpha^{-1} \left(\Gamma \cap \left(\alpha \Gamma \alpha^{-1} \right) \right) \alpha \right)$, $g \mid_{[\alpha]_k} \in M_k\left(\alpha^{-1} \left(\Gamma \cap \left(\alpha \Gamma \alpha^{-1} \right) \right) \alpha \right)$.

$$\Gamma'' = \alpha^{-1}\Gamma'\alpha = \alpha^{-1}\left(\Gamma\cap\left(\alpha\Gamma\alpha^{-1}\right)\right)\alpha = \Gamma\cap\left(\alpha^{-1}\Gamma\alpha\right)$$

יהי L תחום יסודי עבור Γ', אז $\alpha^{-1}L$ תחום יסודי עבור $\Gamma''=\alpha^{-1}\Gamma'\alpha$: תהי $z\in\mathcal{H}$, אז קיים $\gamma'\in\Gamma'$ כך ש $\gamma'\cdot\alpha z\in\overline{L}$ $\Longleftarrow$ $\alpha^{-1}\gamma'\alpha\cdot z\in\alpha^{-1}\overline{L}$ ו$\alpha^{-1}\gamma'\alpha\in\Gamma$. באופן דומה, ניתן לבדוק את התכונה השנייה. כעת,

$$\begin{aligned}\left\langle f\mid_{[\alpha]_k}, g\mid_{[\alpha]_k}\right\rangle &= \frac{1}{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}:\overline{\alpha^{-1}\Gamma'\alpha}\right]}\int_{\alpha^{-1}L} f\mid_{[\alpha]_k}(z)\,\overline{g\mid_{[\alpha]_k}(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2}\\ &= \frac{1}{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}:\overline{\alpha^{-1}\Gamma'\alpha}\right]}\int_{L} f\mid_{[\alpha]_k}\mid_{[\alpha^{-1}]_k}(z)\,\overline{g\mid_{[\alpha]_k}\mid_{[\alpha^{-1}]_k}(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2}\\ &= \frac{1}{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}:\overline{\alpha^{-1}\Gamma'\alpha}\right]}\int_{L} f(z)\,\overline{g(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2}\\ &= \frac{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}:\overline{\Gamma'}\right]}{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}:\overline{\alpha^{-1}\Gamma'\alpha}\right]}\langle f,g\rangle_{\Gamma'}\end{aligned}$$

(המעבר השני מתבצע באמצעות העובדה שהלמה נכונה גם עבור $\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ עם $\det\alpha\neq 1$ - במקרה זה בהוכחה יופיע בIm פקטור של הdet שיצטמצם עם הdet מהמונה של הנגזרת. בנוסף נשים לב כי ה$\det^{\frac{k}{2}}$ ב $\mid_{[\alpha^{-1}]_k}$ מגיע פעמיים מ $\mathrm{Im}\left(\alpha^{-1}z\right)^k$)

נותר להראות את שוויון האינדקסים. מתקיים $\int_{\alpha^{-1}L}\frac{dxdy}{y^2}=\int_L\frac{dxdy}{y^2}$, ובשני האגפים אפשר להחליף את התחומים היסודיים כרצוננו. אם $\tilde{F}$ תחום יסודי של $\tilde{\Gamma}$ (תת־חבורת קונגרואנציה כלשהי של $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) אז

$$\int_{\tilde{F}}\frac{dxdy}{y^2} = \left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}:\overline{\tilde{\Gamma}}\right]\int_F\frac{dxdy}{y^2}$$

(כי באגף שמאל אפשר לקחת $\tilde{F}=\dot{\bigcup}_{j=1}^m\gamma_j^{-1}F$, ואז $\int_{\tilde{F}}\frac{dxdy}{y^2}=\sum_{j=1}^m\int_{\gamma_j^{-1}F}\frac{dxdy}{y^2}=m\int_F\frac{dxdy}{y^2}$). לכן

$$\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}:\overline{\Gamma''}\right]\int_F\frac{dxdy}{y^2}=\int_{\alpha^{-1}L}\frac{dxdy}{y^2}=\int_L\frac{dxdy}{y^2}=\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}:\overline{\Gamma'}\right]\int_F\frac{dxdy}{y^2}$$

מכיוון ש$\int_F\frac{dxdy}{y^2}\neq 0$ (תרגיל: למצוא את האינטגרל), האינדקסים שווים. ■

ניתן גם לכתוב $\left\langle f\mid_{[\alpha]_k},g\right\rangle=\left\langle f,g\mid_{[\alpha^{-1}]_k}\right\rangle$. $\alpha^{-1}=(\det\alpha)^{-1}\cdot\alpha'$ עבור $\alpha'=\mathrm{adj}(\alpha)$ ומתקיים $g\mid_{[\alpha^{-1}]_k}=g\mid_{[\alpha']_k}$.

הביטוי $\left\langle f\mid_{[\alpha]_k},g\right\rangle$ במשתנה α, תלוי רק ב$\Gamma\alpha\Gamma$:

$$\begin{aligned}\left\langle f\mid_{[\gamma_1\alpha\gamma_2]_k},g\right\rangle &= \left\langle f\mid_{[\gamma_1]_k}\mid_{[\alpha]_k}\mid_{[\gamma_2]_k},g\right\rangle\\ &= \left\langle f\mid_{[\alpha]_k},g\mid_{[\gamma_2^{-1}]_k}\right\rangle\\ &= \left\langle f\mid_{[\alpha]_k},g\right\rangle\end{aligned}$$

3.8 פונקציות־L

יהי χ כרקטר דיריכלה מודולו N, אז ל $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ סימנו $\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi(d)$ והגדרנו את המרחב

$$S_k(N,\chi) = \left\{ f \in S_k(\Gamma_1(N)) \mid \forall \gamma \in \Gamma_0(N) : f\mid_{[\gamma]_k} = \chi(\gamma) f \right\}$$

תהי $f \in S_k(N,\chi)$. כיוון ש$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$, יש ל$f$ פיתוח־q, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n}$ (כי $a_0 = 0$ כי f תבנית חוד). נגדיר את **פונקציית־L** של f, $L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ עבור $s \in \mathbb{C}$.

טענה 3.45 הטור מתכנס בהחלט בתחום $\mathrm{Re} s > \frac{k}{2} + 1$ ומגדיר בו פונקציה אנליטית.

הוכחה: ראינו כי קיים $C > 0$ עבורו לכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le C \cdot n^{\frac{k}{2}} \Longleftarrow \left|\frac{a_n}{n^s}\right| \le C \cdot n^{\frac{k}{2} - \mathrm{Re} s}$. מכאן, שאם $\frac{k}{2} - \mathrm{Re} s < -1$, הטור מתכנס בהחלט (מהשוואה לטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{2} - \mathrm{Re} s}$). התנאי שקול ל$\mathrm{Re} s > \frac{k}{2} + 1$.

באותו אופן, ההתכנסות היא במידה שווה לכל תחום $\mathrm{Re} s \ge \frac{k}{2} + 1 + \delta$ $(\delta > 0)$ ולכן ממשפט ויירשטראס, $L(s,f)$ אנליטית בתחום הנ"ל. ■

הגדרה 3.46 **טרנספורם מלין** של f הוא $M_f(s) = \int_0^{\infty} f(iy) y^{s-1} dy$.

משפט 3.47 תהי $\varphi(w,s)$ פונקציה מרוכבת על $C \times U$, $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום וC מסילה (אולי אינסופית) ב$\mathbb{C}$. נניח כי לכל $w \in C$, $s \mapsto \varphi(w,s)$ פונקציה אנליטית וכי האינטגרל $M(s) = \int_C \varphi(w,s) dw$ מתכנס במידה שווה לכל $s \in U$, אז הפונקציה $s \mapsto M(s)$ אנליטית בu וניתן לגזור לפי s בתוך האינטגרל.

דוגמה $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{s-1} dy$ $(s \in \mathbb{C})$. האינטגרל מתכנס בהחלט כאשר $\mathrm{Re}(s) > 0$: $\int_1^{\infty} e^{-y} y^{\mathrm{Re}(s)-1} dy$ מתכנס לכל s, משום שהאינטגרד דועך אקפסוננציאלית. $\int_0^{1} e^{-y} y^{\mathrm{Re}(s)-1} dy$ מתכנס: $0 < e^{-y} < 1$ ולכן ניתן לחסום את האינטגרד ב$y^{\mathrm{Re}(s)-1}$, ונקבל $\int_0^1 y^{\mathrm{Re}(s)-1} dy = \frac{y^{\mathrm{Re}(s)}}{\mathrm{Re}(s)} \Big|_0^1 = \frac{1}{\mathrm{Re}(s)} < \infty$ (כי $\mathrm{Re}(s) > 0$). ההתכנסות היא במידה שווה בכל תחום $0 < a \le \mathrm{Re}(s) \le b$ ולכן $\Gamma(s)$ אנליטית בתחום $\mathrm{Re}(s) > 0$.

טענה 3.48 נניח כי $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$, אז $M_f(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s,f)$ ($f \in S_k(N,\chi)$).

הוכחה: מהצבת פיתוח־q של f באינטגרל המגדיר את M_f:

$$M_f(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n (iy)} y^{s-1} dy$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\int_0^{\infty}e^{-2\pi ny}y^{\mathrm{Re}(s)-1}dy \underbrace{=}_{\substack{2\pi ny=u\\2\pi ndy=du}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\int_0^{\infty}e^{-u}\left(\frac{y}{2\pi n}\right)^{\mathrm{Re}(s)-1}\frac{dy}{2\pi n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{(2\pi n)^{\mathrm{Re}(s)}}\int_0^{\infty}e^{-u}y^{\mathrm{Re}s-1}dy$$

$$=(2\pi)^{-\mathrm{Re}(s)}\Gamma(\mathrm{Re}(s))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\mathrm{Re}s}}<\infty$$

אז ניתן להחליף את סדר הסכימה:

$$M_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}a_ne^{2\pi in(iy)}y^{s-1}dy$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(2\pi n)^s}\int_0^{\infty}e^{-u}y^{s-1}dy$$

$$=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

$$=(2\pi)^{-s}\cdot\Gamma(s)\cdot L(s,f)$$

■

ההמשכה האנליטית של $\Gamma(s)$ באמצעות אינטגרציה בחלקים, ניתן לקבל $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, ומכאן לקבל המשכה אנליטית ל-$\mathbb{C}$, עם קטבים ב-$\{0,-1,-2,\dots\}$.

$$\mathrm{Res}_{s=0}\Gamma(s)=\lim_{s\to0}s\Gamma(s)=\lim_{s\to0}\Gamma(s+1)=\Gamma(1)=1$$

(כל הקטבים פשוטים).

משפט 3.49 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

מסקנה 3.50 $\frac{1}{\Gamma(s)}$ פונקציה שלמה, ולכן $\Gamma(s)$ אינה מתאפסת.

משפט 3.51 תהי $f\in S_k(N,\chi)$. אז האינטגרל המגדיר את $M_f(s)$ מתכנס בהחלט לכל $s\in\mathbb{C}$ ומגדיר פונקציה אנליטית בכל המישור.

הוכחה: $M_f(s)=\int_0^1 f(iy)y^{s-1}dy+\int_1^{\infty}f(iy)y^{s-1}dy$. קיים $C>0$ כך שלכל $y\geq1$, $|f(iy)|\leq Ce^{-2\pi y}$ (בתחום $\mathrm{Im}z\geq\delta>0$, ראינו כי $|f(z)|\leq Ce^{-2\pi\mathrm{Im}(z)}$), ולכן המחובר השני מתכנס בהחלט בכל $s\in\mathbb{C}$ ובמידה שווה בכל תחום מהצורה $\mathrm{Re}s\leq b$. מכאן, המחובר השני, אנליטי בכל $\mathbb{C}$.

נסמן $w_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ (אז $w_N^{-1} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{N}w_N$). לכל $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ ($\det\gamma = 1$, $N \mid c$),

$$\begin{aligned} w_N \gamma w_N^{-1} &= -\frac{1}{N}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{N}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} bN & -a \\ dN & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -\frac{c}{N} \\ -Nb & a \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \end{aligned}$$

ולכן $w_N \Gamma_0(N) w_N^{-1} = \Gamma_0(N)$. כמו כן,

$$\chi\left(w_N \gamma w_N^{-1}\right) = \chi(a) = \chi(d)^{-1} = \overline{\chi(d)} = \overline{\chi(\gamma)}$$

(כי $ad \equiv 1 \pmod N$).
הוכחנו כי $f\mid_{[w_N]_k} \in S_k(\Gamma_0(N))$ (מהמשפט עם α ו-$\Gamma' = \left(\alpha^{-1}\Gamma\alpha\right) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$). לכל $\gamma \in \Gamma_0(N)$ מתקיים

$$\begin{aligned} f\mid_{[w_N]_k}\mid_{[\gamma]_k} &= f\mid_{\left[w_N\gamma w_N^{-1}\right]_k}\mid_{[w_N]_k} \\ &= \chi\left(w_N\gamma w_N^{-1}\right) f\mid_{[w_N]_k} \\ &= \overline{\chi(\gamma)} f\mid_{[w_N]_k} \end{aligned}$$

ולכן $f\mid_{[w_N]_k} \in S_k(N, \overline{\chi})$.

$$\begin{aligned} \left(f\mid_{[w_N]_k}\right)(z) &= N^{\frac{k}{2}} j(w_N, z)^{-k} f(w_N \cdot z) \\ &= N^{\frac{k}{2}} \cdot (Nz)^{-k} \cdot f\left(-\frac{1}{Nz}\right) \\ &= N^{-\frac{k}{2}} \cdot z^{-k} \cdot f\left(-\frac{1}{Nz}\right) \end{aligned}$$

נציב $z = \frac{i}{Ny}$ (עבור $y > 0$):

$$\begin{aligned} f\mid_{[w_N]_k}\left(\frac{i}{Ny}\right) &= i^{-k} N^{-\frac{k}{2}} (Ny)^k f\left(-\frac{y}{i}\right) \\ &= i^{-k} N^{\frac{k}{2}} y^k f(iy) \\ f(iy) &= i^k N^{-\frac{k}{2}} y^{-k} f\mid_{[w_N]_k}\left(\frac{i}{Ny}\right) \end{aligned}$$

גם $f\mid_{[w_N]_k}$ תבנית חוד, אז קיים $C > 0$ כך שלכל $0 < y < 1$,
$\left|f\mid_{[w_N]_k}\left(\frac{i}{Ny}\right)\right| \le Ce^{-\frac{2\pi}{Ny}}$, ולכן $\left|f(iy)\, y^{s-1}\right| \le CN^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{2\pi}{Ny}} y^{\mathrm{Re}(s)-k-1}$ והמחובר $\int_0^1 f(iy)\, y^{s-1} dy$ מתכנס בהחלט לכל $s \in \mathbb{C}$ ובמידה שווה בכל תחום מהצורה $a \le \mathrm{Re}(s)$, $a \in \mathbb{R}$. מכאן שהאינטגרל מגדיר פונקציה אנליטית בכל המישור כסכום פונקציות אנליטיות.
■

מסקנה 3.52 תהי $f \in S_k(N,\chi)$, אז לפונקציית־L שלה, $L(s,f)$ יש המשכה אנליטית לכל המישור. יתר על כן, גם ל$\Gamma(s)L(s,f)$ יש המשכה לכל המישור, ומתקיים
$M_f(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$ (מכאן נובע כי ל$L(s,f)$ יש אפסים ב $s = 0,-1,-2,\ldots$ - אלה האפסים הטריוויאליים).

משפט 3.53 תהי $f \in S_k(N,\chi)$. נגדיר $\Lambda(s,f) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)\,(= M_f(s))$ (אנליטית בכל המישור). מקיימת המשוואה הפונקציונלית

$$\Lambda(s,f) = i^k N^{\frac{k}{2}-s}\Lambda\left(k-s, f\mid_{[w_N]_k}\right)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\Lambda(s,f) = M_f(s) &= \int_0^\infty f(iy)\,y^{s-1}dy \\
&= i^k N^{-\frac{k}{2}}\int_0^\infty y^{s-k-1} f\mid_{[w_N]_k}\left(\frac{i}{Ny}\right)dy \\
\underbrace{}_{\substack{u=\frac{1}{Ny}\\ dy=-\frac{1}{Nu^2}du}} &= i^k N^{-\frac{k}{2}}\int_0^\infty \frac{1}{N}u^{-2}\left(\frac{1}{Nu}\right)^{s-k-1} f\mid_{[w_N]_k}(iu)\,du \\
&= i^k N^{\frac{k}{2}-s}\int_0^\infty u^{k-s-1} f\mid_{[w_N]_k}(iu)\,du \\
&= i^k N^{\frac{k}{2}-s}\Lambda\left(k-s, f\mid_{[w_N]_k}\right)
\end{aligned}$$

■

יהי η כרקטר דיריכלה פרימיטיבי מודולו D (נניח כי $(N,D)=1$). הגדרנו את $f_\eta \in S_k\left(ND^2,\chi\eta^2\right)$, $f_\eta(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n\eta(n)e^{2\pi inz}$ $(z\in\mathcal{H})$, ול $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}+1$,

$$L(s,f,\eta) = L(s,f_\eta) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n\eta(n)}{n^s}$$

לטור זה יש המשכה אנליטית לכל המישור. גם $(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f,\eta)$ בעלת המשכה אנליטית לכל המישור. נרצה לקשר את הביטוי $f_\eta\mid_{\left[w_{ND^2}\right]_k}$ עם $\left(f\mid_{[w_N]_k}\right)_\eta$ (שני הביטויים הם ב $S\left(\chi\eta^2, ND^2\right)$, נרצה להציב במשוואה הפונקציונלית של Λ).

משפט 3.54

$$f_\eta\mid_{\left[w_{ND^2}\right]_k} = \frac{1}{D}\eta(N)\chi(D)g(\eta)^2\left(f\mid_{[w_N]_k}\right)_{\overline{\eta}}$$

כאשר $g(\eta) = \sum_{l=1}^D \eta(l)e^{\frac{2\pi il}{D}}$ (שינוי סימון) - סכום גאוס.

הוכחה: ראינו בעבר (בסימונים אחרים)

$$f_{\eta}(z)=\underbrace{\frac{g(\eta)}{D}}_{\tau(\eta)}\sum_{\nu=1}^{D}\overline{\eta(\nu)}f\left(\begin{pmatrix}1 & -\frac{\nu}{D}\\ & 1\end{pmatrix}z\right)$$

$$\begin{aligned}
f_{\eta}\mid_{[w_{ND^2}]_k}(z) &= \left(ND^2\right)^{\frac{k}{2}}\left(ND^2z\right)^{-k}f_{\eta}\left(-\frac{1}{ND^2z}\right)\\
&= \left(ND^2\right)^{-\frac{k}{2}}z^{-k}\cdot\frac{g(\eta)}{D}\sum_{\nu=1}^{D}\overline{\eta(\nu)}f\left(\begin{pmatrix}1 & -\frac{\nu}{D}\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ ND^2 & 0\end{pmatrix}\right)\\
&= \left(ND^2\right)^{-\frac{k}{2}}z^{-k}\cdot\frac{g(\eta)}{D}\sum_{\nu=1}^{D}\overline{\eta(\nu)}f\left(\begin{pmatrix}-\nu ND & -1\\ ND^2 & 0\end{pmatrix}z\right)\\
&= \frac{g(\eta)}{D}\sum_{\nu=1}^{D}\overline{\eta(\nu)}f\mid\underbrace{\left[\begin{pmatrix}-\nu ND & -1\\ ND^2 & 0\end{pmatrix}\right]_k}_{\begin{pmatrix}0 & -1\\ N & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D^2 & 0\\ \nu ND & 1\end{pmatrix}}(z)\\
&= \frac{g(\eta)}{D}\sum_{\substack{\nu=1\\ (\nu,D)=1}}^{D}\overline{\eta(\nu)}f\mid_{[w_N]_k}\mid\left[\begin{pmatrix}D^2 & 0\\ \nu ND & 1\end{pmatrix}\right]_k(z)
\end{aligned}$$

D זר ל-ν ול-N ולכן זר ל-νN. יהיו $a,r\in\mathbb{Z}$ כך ש $aD-r\nu N=1$. מכאן $\begin{pmatrix}a & -r\\ -\nu N & D\end{pmatrix}\in$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ו-$\begin{pmatrix}a & -r\\ -\nu N & D\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a & -r\\ -\nu N & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D^2 & 0\\ \nu ND & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}aD^2-r\nu ND & -r\\ 0 & D\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}D & -r\\ 0 & D\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כעת

$$\begin{aligned}
f\mid_{[w_N]_k}\mid\left[\begin{pmatrix}D^2 & 0\\ \nu ND & 1\end{pmatrix}\right]_k &= f\mid_{[w_N]_k}\mid\left[\underbrace{\begin{pmatrix}a & -r\\ -\nu N & D\end{pmatrix}^{-1}}_{\in\Gamma_0(N)}\right]_k\mid\left[\begin{pmatrix}D & -r\\ 0 & D\end{pmatrix}\right]_k\\
&= \underbrace{\overline{\chi}(D)^{-1}}_{\chi(D)}\cdot f\mid_{[w_N]_k}\mid\left[\begin{pmatrix}D & -r\\ 0 & D\end{pmatrix}\right]_k
\end{aligned}$$

ולכן

$$f_\eta \mid_{\left[w_{ND^2}\right]_k}(z) = \frac{g(\eta)}{D}\sum_{\substack{\nu=1\\(\nu,D)=1}}^{D}\overline{\eta(\nu)}f\mid_{[w_N]_k}\Big|\left[\begin{pmatrix}D^2 & 0\\ \nu ND & 1\end{pmatrix}\right]_k(z)$$

$$= \frac{g(\eta)}{D}\chi(D)\sum_{\substack{\nu=1\\(\nu,D)=1}}^{D}\overline{\eta(\nu)}f\mid_{[w_N]_k}\left(z-\frac{r}{D}\right)$$

מתקיים $-r\nu N\equiv 1\ (\mod D)$ ולכן $\eta(r)\eta(\nu)\eta(N)=\eta(-1) \Longleftarrow$
$\overline{\eta(\nu)}=\eta(r)\eta(-N)$.

$$f_\eta \mid_{\left[w_{ND^2}\right]_k}(z) = \frac{g(\eta)}{D}\chi(D)\sum_{\substack{\nu=1\\(\nu,D)=1}}^{D}\overline{\eta(\nu)}f\mid_{[w_N]_k}\left(z-\frac{r}{D}\right)$$

$$= \frac{g(\eta)}{D}\chi(D)\cdot\eta(-N)\sum_{\substack{r=1\\(r,D)=1}}^{D}\eta(r)\cdot f\mid_{[w_N]_k}\left(z-\frac{r}{D}\right)$$

$$= \frac{g(\eta)\cdot g(\overline{\eta})}{D\cdot g(\overline{\eta})}\chi(D)\eta(-N)\sum_{\substack{r=1\\(r,D)=1}}^{D}\overline{\overline{\eta}(r)}\cdot f\mid_{[w_N]_k}\left(\begin{pmatrix}1 & -\frac{r}{D}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot z\right)$$

$$= \frac{g(\eta)}{g(\overline{\eta})}\chi(D)\eta(-N)\cdot\underbrace{\frac{g(\overline{\eta})}{D}\sum_{\substack{r=1\\(r,D)=1}}^{D}\overline{\overline{\eta}(r)}\cdot f\mid_{[w_N]_k}\left(\begin{pmatrix}1 & -\frac{r}{D}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot z\right)}_{\left(f|_{[w_N]_k}\right)_{\overline{\eta}}(z)}$$

$$= \eta(-N)\chi(D)\frac{g(\eta)}{g(\overline{\eta})}\left(f\mid_{[w_N]_k}\right)_{\overline{\eta}}(z)$$

תרגיל $g(\overline{\eta})g(\eta)=\eta(-1)D$.
מכאן נקבל $g(\overline{\eta})=\frac{\eta(-1)D}{g(\eta)}$ ולכן

$$f_\eta\mid_{\left[w_{ND^2}\right]_k} = \frac{1}{D}\eta(N)\chi(D)g(\eta)^2\left(f\mid_{[w_N]_k}\right)_{\overline{\eta}}$$

כנדרש. ∎

נסמן

$$\Lambda(s,f,\eta)=\Lambda(s,f_\eta)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f,\eta)$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\Lambda(s,f,\eta) &= i^k\left(ND^2\right)^{\frac{k}{2}-s}\Lambda\left(k-s,(f_\eta)\mid_{\left[w_{ND^2}\right]_k}\right)\\ &= i^k\left(ND^2\right)^{\frac{k}{2}-s}D^{-1}\eta(N)\chi(D)g(\eta)^2\Lambda\left(k-s,\left(f\mid_{[w_N]_k}\right)_{\overline{\eta}}\right)\\ &= i^kN^{\frac{k}{2}-s}D^{k-2s-1}\eta(N)\chi(D)g(\eta)^2\Lambda\left(k-s,f\mid_{[w_N]_k},\overline{\eta}\right)\end{aligned}$$

4 האופרטורים של Hecke

4.1 החבורה החופשית האבלית הנוצרת ע"י E

לקבוצה E נסמן בX_E את החבורה החופשית האבלית הנוצרת ע"י E ($f : E \to \mathbb{Z}$ כך ש $f(e)=0$ כמעט לכל e. מתקיים $f=\sum_{e\in E}f(e)e$)

הומומורפיזם $T : X_E \to X_E$ נקבע עפ"י ערכיו על נקודות E.

$$T(x)=\sum_{y\in E}n_y(x)\cdot y$$

$n_y(x)=0$ כמעט לכל y.

תהי $F : E \to \mathbb{C}$ פונקציה, נגדיר את הפונקציה $TF : E \to \mathbb{C}$ כך: נרחיב את F ללינארית מעל $\mathbb{Z}$ לX_E.

$$\begin{aligned}TF &= F\circ T\mid_E\\ (TF)(x) &= F(T(x))=\sum_{y\in E}n_y(x)F(y)\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

נבחר $E=\mathcal{L}$ (קבוצת הסריגים במישור). נגדיר לכל n טבעי הומומורפיזם $T_n : X_{\mathcal{L}} \to X_{\mathcal{L}}$ לפי ערכיו על כל סריג L:

$$T_n(L)=\sum_{\substack{L'\subseteq L\\ \left[L:L'\right]=n}}L'$$

כאשר הסכום רץ על התת־סריגים L' של L מאינדקס n.

טענה 4.1 מספר הסריגים מאינדקס n הוא סופי.

הוכחה: נניח כי $[L:L']=n$, לכן $nL\subseteq L'$, $L'/nL\subseteq L/nL$. L/nL היא חבורה סופית וL'/nL היא תת־חבורה שלה מאינדקס n. נניח כי $nL\subseteq L',L''\subseteq L$. ממשפט ההתאמה $L'/nL=L''/nL \iff L'=L''$. לבסוף

$$L'/nL\subseteq L/nL=\mathbb{Z}\omega_1\oplus\mathbb{Z}\omega_2/n\mathbb{Z}\omega_1\oplus n\omega_2\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$$

L'/nL מאינדקס n (ומסדר n), ואילו ל$\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ מספר סופי של תת־חבורות מסדר n. ■

לכל $\lambda\in\mathbb{C}^\times$ נגדיר $R_\lambda : X_{\mathcal{L}}\to X_{\mathcal{L}}$ לפי $R_\lambda(L)=\lambda L$.

טענה 4.2

1. $R_\mu R_\lambda = R_\lambda R_\mu$ לכל $\lambda,\mu \in \mathbb{C}^\times$.
2. $T_n R_\lambda = R_\lambda T_n$ לכל $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, n טבעי.

הוכחה:

1. ברור.
2.

$$R_\lambda T_n\left(L\right) = R_\lambda\left(\sum_{\substack{L'\subseteq L\\ \left[L:L'\right]=n}} L'\right) = \sum_{\substack{L'\subseteq L\\ \left[L:L'\right]=n}} \lambda L'$$

מתקיים $[L:L']=n \iff [\lambda L:\lambda L']=n$. ההתאמה $L' \mapsto \lambda L'$ היא חד־חד־ערכית ועל מקבוצת הסריגים $L' \subseteq L$ מאינדקס n לקבוצת הסריגים $L' \subseteq \lambda L$ מאינדקס n.

$$R_\lambda T_n\left(L\right) = \sum_{\substack{L'\subseteq L\\ \left[L:L'\right]=n}} L' = \sum_{\substack{\tilde{L}\subseteq \lambda L\\ \left[\lambda L:\tilde{L}\right]=n}} \tilde{L} = T_n\left(\lambda L\right) = T_n\left(R_\lambda\left(L\right)\right)$$

■

טענה 4.3 יהיו m,n טבעיים זרים, אז $T_m T_n = T_{mn}$.

הוכחה: $T_{mn}\left(L\right) = \sum_{[L:L'']=mn} L''$. ${}^{L}/_{L''}$ חבורה חילופית מסדר mn. כיוון שבחבורה סופית חילופית יש חבורת סילוב יחידה לכל ראשוני המחלק את סדרה, וכן היא סכום ישר של חבורות הסילוב שלה, יש ל${}^{L}/_{L''}$ תת־חבורה יחידה מסדר m (ולכן מאינדקס n). זה אומר שיש סריג ביניים יחיד $L \subseteq L' \subseteq L''$ כך ש $[L':L'']=m$ (ולכן $[L:L']=n$).

מכאן

$$\begin{aligned}\sum_{[L:L'']=mn} L'' &= \sum_{[L:L']=n}\ \sum_{[L':L'']=m} L'' \\ &= \sum_{[L:L']=n} T_m\left(L'\right) \\ &= T_m\left(\sum_{[L:L']=n} L'\right) \\ &= T_m\left(T_n\left(L\right)\right)\end{aligned}$$

■

משפט 4.4 יהי p ראשוני, n טבעי, אז $T_{p^n}T_p\left(L\right)=T_{p^{n+1}}+pT_{p^{n-1}}R_p$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}T_{p^n}T_p\left(L\right) &= T_{p^n}\left(\sum_{[L:L']=p} L'\right) \\ &= \sum_{[L:L']=p} T_{p^n}\left(L'\right) \\ &= \sum_{[L:L']=p}\ \sum_{[L':L'']=p^n} L''\end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}T_{p^{n+1}}\left(L\right) &= \sum_{[L:L'']=p^{n+1}} L'' \\ T_{p^{n-1}}R_p\left(L\right)=T_{p^{n-1}}\left(pL\right) &= \sum_{[pL:L'']=p^{n-1}} L''\end{aligned}$$

כל הסריגים $L''\subseteq L$ המופיעים כאן הם מאינדקס p^{n+1} (מהכפלת האינדקסים. נשים לב כי $[L:pL]=p^2$). נסמן:

- a - הריבוי של L'' ב$T_{p^n}T_p$.
- b - הריבוי של L'' ב$T_{p^{n+1}}\left(L\right)=1$.
- c - הריבוי של L'' ב$T_{p^{n-1}}R_p\left(L\right)$.

צריך להוכיח $a=1+pc$ לכל L'' כנ"ל. (בתרגילי בית) ■

מסקנה 4.5

1. $T_{p^n}\in\mathbb{Z}\left[T_p,R_p\right]$
2. האלגברית מעל $\mathbb{Z}$ הנוצרת ע"י $\left\{T_p\right\}_{p\in\mathbb{P}}\cup\left\{R_\lambda\right\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ היא חילופית ומכילה את כל האופרטורים $\left\{T_n\right\}_{n\geq1}$.

תיאור מפורש לסריגים $L' \subseteq L$ כך ש $[L : L'] = n$

למה 4.6 נתון סריג $L_{\omega_1,\omega_2} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, תהי $\gamma \in M_2(\mathbb{Z})$ כך ש $\det\gamma = n \geq 1$. ל $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ נסמן

$$\begin{aligned} \gamma(L) &= L_{a\omega_1+b\omega_2, c\omega_1+d\omega_2} \\ &= L_{(\omega_1,\omega_2)\gamma^T} \subseteq L_{\omega_1,\omega_2} \end{aligned}$$

אז האינדקס הוא $[L : \gamma(L)] = n = \det\gamma$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} \gamma(L) &= \{m_1(a\omega_1+b\omega_2) + m_2(c\omega_1+d\omega_2) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\omega_1(m_1a+m_2c) + \omega_2(m_1b+m_2d) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

נתבונן באיזומורפיזם

$$\begin{aligned} L &\cong \mathbb{Z}^2 \\ m_1\omega_1 + m_2\omega_2 &\mapsto (m_1, m_2) \end{aligned}$$

תחת איזומורפיזם זה $\gamma(L)$ עוברת ל

$$\{(m_1a+m_2c, m_1b+m_2d) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} = \left\{(m_1, m_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

לכן צריך להוכיח $\left[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}^2 \cdot \gamma\right] = n$.

נראה שיש $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ כך ש $\gamma = \gamma_1 \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} \gamma_2$ כאשר $l_1, l_2 \geq 1$ טבעיים.

ראשית, ע"י החלפת שורות ו/או עמודות ותיקוני סימן, אפשר להניח כי a טבעי וקטן או שווה מערך מוחלט של כל קואורדינטה אחרת $\neq 0$. אם $c \neq 0$, נחלק את c בa עם שארית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ax+c & bx+d \end{pmatrix}$$

לכן אפשר להחליף את c בשארית בחלוקתו בa. אם $b \neq 0$ ע"י הכפלה

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ay+b \\ c' & c'y+d' \end{pmatrix}$$

אז אפשר להחליף את b בשארית חלוקתו בa גם כן.

אם אחרת השאריות הנ"ל שונה מאפס, ע"י החלפת שורות ו/או עמודות ותיקוני סימן נביא את המטריצה לצורה:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

כאשר $1 \leq a < a_1$ וכן a_1 קטן או שווה מכל קואורדינטה אחרת השונה מאפס. נחזור על התהליך. בסוף התהליך נקבל $\begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}$ כנדרש. כמובן $n = l_1 \cdot l_2$. כעת

$$\begin{aligned}
\left[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}^2\gamma\right] &= \left[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}^2\gamma_1 \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} \gamma_2\right] \\
\underbrace{}_{\substack{\mathbb{Z}^2\gamma_1 = \mathbb{Z}^2 \\ \mathbb{Z}^2\gamma_2 = \mathbb{Z}^2}} &= \left[\mathbb{Z}^2\gamma_2 : \mathbb{Z}^2 \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} \gamma_2\right] \\
&= \left[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}^2 \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left|{}^{\mathbb{Z}}/_{l_1\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}/_{l_2\mathbb{Z}}\right| = l_1 \cdot l_2 = n = \det\gamma
\end{aligned}$$

■

משפט 4.7 נסמן $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad = n, 0 \leq b < d \right\} = S_n$. לסריג L הנ"ל ול $\sigma \in S_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ נגדיר

$$L\sigma = \sigma(L) = L_{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2}$$

אז ההתאמה $L\sigma \mapsto \sigma$ היא התאמה חד־חד־ערכית ועל מS_n לקבוצת הסריגים $L' \subseteq L$ מאינדקס n.

הוכחה: מהלמה $[L : L\sigma] = n$ לכל $\sigma \in S_n$. יהי $L' \subseteq L$ סריג חלקי מאינדקס n. נכתוב $L' = \mathbb{Z}\omega_1' \oplus \mathbb{Z}\omega_2'$, $\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$, $\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. נסמן $M_2(\mathbb{Z}) \ni \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ואז $L' = \gamma(L)$. אפשר להניח $\det\gamma > 0$ (אחרת נחליף את הסדר של ω_1', ω_2') ואז $[L : L'] = \det\gamma$, לכן $\det\gamma = n$.

אם $c \neq 0$, אז אפשר להניח כי $c \geq 1$ (טבעי) ונחלק את a בc עם שארית.

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + cy & b + dy \\ c & d \end{pmatrix}$$

לכן אפשר להחליף את a בשארית חלוקתו בc, a_1. אם $a_1 \neq 0$, נחלק את c בa_1 עם שארית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b' \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b' \\ c + a_1 x & d' \end{pmatrix}$$

נמשיך כך ונקבל שיש $\gamma_1 \in \mathbb{Z}$ כך ש $\gamma = \gamma_1 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha \geq 1$ (טבעי), $\alpha\delta = n$. אפשר להחליף את β בשארית חלוקתו בδ:

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + z\delta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

ולכן אפשר להניח כי $0 \leq \beta < \delta$.

$$\mathbb{Z}^2\gamma = \mathbb{Z}^2\gamma_1 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \mathbb{Z}^2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

חד־חד־ערכיות נניח כי $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $\sigma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ שתיהן בS_n כך ש $L\sigma = L\sigma'$. לכן

$$\mathbb{Z}\left(a\omega_1 + b\omega_2\right) \oplus \mathbb{Z}d\omega_2 = \mathbb{Z}\left(a'\omega_1 + b'\omega_2\right) \oplus \mathbb{Z}d'\omega_2$$

לכן יש $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש

$$d'\omega_2 = m_1\left(a\omega_1 + b\omega_2\right) + m_2\left(d\omega_2\right)$$

מאי־תלות ω_1, ω_2 (מעל $\mathbb{R}$) נקבל $m_1a_1 = 0$ ולכן $m_1 = 0$ (כי $a_1 \geq 1$). מכאן $d' = m_2d$ ולכן $d \mid d'$. באותו האופן $d' \mid d$ ולכן יש שוויון $d' = d$, $a' = a$.
קיימים $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש $a\omega_1 + b'\omega_2 = m_1\left(a\omega_1 + b\omega_2\right) + m_2d\omega_2$. נקבל כי $a = m_1a$ ולכן $m_1 = 1$ ($a \geq 1$). בנוסף $b' = b + m_2d$. כיוון ש $0 \leq b, b' < d$, נקבל $m_2 = 0$ ו$b = b'$. ■

מסקנה 4.8

1.

$$T_n\left(L_{\omega_1,\omega_2}\right) = \sum_{\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in S_n} \alpha\left(L\right) = \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} L_{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2}$$

2. לכל p ראשוני

$$S_p = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix} \mid 0 \leq b < p \right\}$$

4.2 פעולת האופרטורים T_n על פונקציות מודולריות (ביחס ל$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$)

הגדרנו בעבר פונקציות על סריגים ממשקל k (זוגי) בתור פונקציות המקיימות $F\left(\lambda \cdot L\right) = \lambda^{-k}F\left(L\right)$ לכל $\lambda \in \mathbb{C}^*$. ($R_\lambda F = \lambda^{-k}F \iff$)
ראינו שF כנ"ל מגדירה פונקציה $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ע"י $f\left(z\right) = F\left(L_{z,1}\right)$ לכל $z \in \mathcal{H}$. ראינו שf מקיימת משוואה של תבנית אוטומורפית ממשקל k.

טענה 4.9 T_n מעבירים פונקציות על סריגים ממשקל k לפונקציות כנ"ל.

הוכחה: לפי ההגדרה $\left(T_nF\right)(L)=F\left(T_n(L)\right)$ (ע"י הרחבה לינארית).

$$\begin{aligned}
T_nF(\lambda\cdot L) &= F\left(T_n\left(R_\lambda(L)\right)\right)\\
&= F\left(R_\lambda\left(T_n(L)\right)\right)\\
&= F\left(\sum_{[L:L']=n}\lambda\cdot L'\right)\\
&= \sum_{[L:L']=n}F\left(\lambda\cdot L'\right)\\
&= \lambda^{-k}\sum_{[L:L']=n}F\left(L'\right)\\
&= \lambda^{-k}F\left(\sum_{[L:L']=n}L'\right)\\
&= \lambda^{-k}F\left(T_n(L)\right)=\lambda^{-k}T_nF(L)
\end{aligned}$$

■

מתקיים לm,n זרים $T_mT_nF=T_{mn}F$. מתקיים לp ראשוני ו$n\geq 1$ טבעי

$$\begin{aligned}
T_{p^n}T_pF &= T_{p^{n+1}}F+pT_{p^{n-1}}R_pF\\
&= T_{p^{n+1}}F+pR_p\left(T_{p^{n-1}}F\right)\\
&= T_{p^{n+1}}F+p^{1-k}T_{p^{n-1}}F
\end{aligned}$$

נבטא את פעולת T_n על f:

$$\begin{aligned}
\left(T_nF\right)\left(L_{z,1}\right) &= F\left(T_n\left(L_{z,1}\right)\right)\\
&= F\left(\sum_{\substack{ad=n\\0\leq b<d}}L_{az+b,d}\right)\\
&= F\left(d\cdot\sum_{\substack{ad=n\\0\leq b<d}}L_{\frac{az+b}{d},1}\right)\\
&= \sum_{\substack{ad=n\\0\leq b<d}}d^{-k}\cdot F\left(L_{\frac{az+b}{d},1}\right)=\sum_{\substack{ad=n\\0\leq b<d}}d^{-k}\cdot f\left(\frac{az+b}{d}\right)
\end{aligned}$$

נגדיר

$$\begin{aligned}(T_nf)(z) &= n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\0\le b<d}} d^{-k}\cdot f\left(\frac{az+b}{d}\right)\\ &= n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{\alpha\in S_n} f\mid_{[\alpha]_k}(z)\end{aligned}$$

(הגורם $n^{\frac{k}{2}-1}$ הוא תוספת נירמול).

מתקיים $T_nf\mid_{[\gamma]_k}=T_nf$ לכל $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. (כי F פונקציה על סריגים ממשקל k)

T_n נקראים האופרטורים של Hecke.

לכל f תבנית מודולרית ממשקל k ביחס ל־$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ו־$m,n$ זרים מתקיים $T_m(T_n(f))=T_{mn}(f)$ ולכל p ראשוני ו־n טבעי, $T_{p^n}T_p(f)=T_{p^{n+1}}(f)+p^{k-1}T_{p^{n-1}}(f)$. (הנוסחה שונה מהנוסחה הקודמת בגלל הנירמול)

טענה 4.10 האופרטורים T_n מעבירים פונקציות (תבניות) מודולריות ממשקל k ביחס ל־$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ לפונקציות (תבניות) מודולריות ממשקל k ביחס ל־$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

הוכחה: נובע מכך שהפונקציות מקיימות את משוואת התבנית האוטומורפית (כי T_nF פונקציה על סריגים ממשקל k). תנאי הולומורפיות נובע מההגדרה של T_nf בתור סכום סופי של פונקציות עם התכונות הנ"ל. ■

נראה איך פיתוח־q משתנה:

טענה 4.11 תהי f תבנית מודולרית ממשקל k ($f\in M_k$) ונניח כי

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_me^{2\pi imz}$$

($z\in\mathcal{H}$) פיתוח־q של f. אז

$$(T_nf)(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(n)e^{2\pi imz}$$

כאשר

$$c_m(n)=\sum_{1\le a|(m,n)}a^{k-1}c_{\frac{mn}{a^2}}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}(T_nf)(z) &= n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\0\le b<d}} d^{-k}\cdot f\left(\frac{az+b}{d}\right)\\ &= n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\0\le b<d}} d^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}c_me^{2\pi im\frac{b}{d}}e^{2\pi im\frac{a}{d}z}\\ &= n^{k-1}\sum_{m=0}^{\infty}c_m\sum_{\substack{ad=n\\0\le b<d}} d^{-k}e^{2\pi im\frac{b}{d}}e^{2\pi im\frac{a}{d}z}\end{aligned}$$

הסכימה הפנימית על $0 \leq b < d$ מתאפסת כאשר $d \nmid m$ (סכום שורשי יחידה) (ואחרת שווה לd). לכן רק $d \mid m$ תורם לסכום. נרשום $m = dl$.

$$\begin{aligned}
\left(T_{n}f\right)(z) &= n^{k-1}\sum_{l=0}^{\infty}c_{dl}\sum_{\substack{ad=n\\1\leq a}}d^{1-k}e^{2\pi ilaz}\\
\underbrace{}_{d=\frac{n}{a}} &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{1\leq a|n}c_{\frac{nl}{a}}a^{k-1}e^{2\pi ilaz}\\
\underbrace{}_{la=m} &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\underbrace{\sum_{1\leq a|(n,m)}c_{\frac{nm}{a^{2}}}a^{k-1}}_{c_{m}(n)}\right)e^{2\pi imz}
\end{aligned}$$

■

מקרים פרטיים

$$\begin{aligned}
c_{0}(n) &= c_{0}\sum_{1\leq a|n}a^{k-1} = c_{0}\sigma_{k-1}(n)\\
c_{1}(n) &= c_{n}\\
c_{m}(n) &= c_{n}(m)
\end{aligned}$$

משפט 4.12 האופרטורים של Hecke הרמיטיים ביחס למכפלת פטרסון.

הוכחה: נניח כי $f \in S_{k}\left(\mathrm{SL}_{2}(\mathbb{Z})\right)$, $g \in M_{k}\left(\mathrm{SL}_{2}(\mathbb{Z})\right)$, נראה $\langle T_{n}f, g\rangle = \langle f, T_{n}g\rangle$ לכל n טבעי.

$$\begin{aligned}
\langle T_{n}f, g\rangle &= n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{\alpha\in S_{n}}\left\langle f\mid_{[\alpha]_{k}}, g\right\rangle\\
&= n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{\alpha\in S_{n}}\left\langle f, g\mid_{[\alpha']_{k}}\right\rangle
\end{aligned}$$

כאשר $\alpha' = \mathrm{adj}\alpha$ כלומר אם $\alpha = \begin{pmatrix}a & b\\0 & d\end{pmatrix}$ אז $\mathrm{adj}\alpha = \begin{pmatrix}d & -b\\0 & a\end{pmatrix}$. כעת $\alpha' \in M_{2}(\mathbb{Z})$, $\det\alpha' = n$ ולכן $\left[\mathbb{Z}^{2} : \alpha'\mathbb{Z}^{2}\right] = n$. מכאן, יש $S(\alpha') \in S_{n}$ יחיד כך ש $\mathbb{Z}^{2}\cdot\alpha' = \mathbb{Z}^{2}\cdot S(\alpha')$. ולכן יש $\gamma \in \mathrm{SL}_{2}(\mathbb{Z})$, כך ש $\alpha' = \gamma S(\alpha')$. מתקיים

$$g\mid_{[\alpha']_{k}} = \left(g\mid_{[\gamma]_{k}}\right)\mid_{[S(\alpha')]_{k}} = g\mid_{[S(\alpha')]_{k}}$$

ההתאמה $S(\alpha') \mapsto \alpha$ מS_n לS_n היא חד־חד־ערכית ולכן גם על. מכיוון ש $g \mid_{[\alpha']_k} =$ $g \mid_{[S(\alpha')]_k}$ נקבל

$$\begin{aligned}\langle T_n f, g\rangle &= n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\alpha\in S_n} \left\langle f, g \mid_{[\alpha']_k}\right\rangle \\ &= n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\alpha\in S_n} \left\langle f, g \mid_{[S(\alpha')]_k}\right\rangle \\ &= n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{S\in S_n} \left\langle f, g \mid_{[S]_k}\right\rangle = \langle f, T_n g\rangle\end{aligned}$$

■

כיוון ש$\{T_n\}_{n\geq 1}$ היא סדרת אופרטורים מתחלפים הרמיטיים על המרחב $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, יש לה לכסון אוניטרי סימולטני (כי המרחב כזכור ממימד סופי).

משפט 4.13 (Hecke): ל$S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ יש בסיס אורתונורמלי (ביחס למכפלת פטרסון) של תבניות חוד שהן עצמיות ביחס לכל האופרטורים $\{T_n\}_{n\geq 1}$.

נניח כי $0 \neq f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ פונקציה עצמית ביחס ל$\{T_n\}_{n\geq 1}$, כלומר $T_n f = \lambda(n) f$ $(n \geq 1)$.

בסימונים הקודמים ראינו ש $c_1(n) = c_n$ ולכן מהשוואת מקדמים

$$\lambda(n) c_1 = c_1(n) = c_n$$

לכן אם $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}$ אז .

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_1 \lambda(n) e^{2\pi i n z} = c_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) e^{2\pi i n z}\right)$$

מכאן $c_1 \neq 0$. ננרמל כך ש $c_1 = 1$ ונקבל $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) e^{2\pi i n z}$. כלומר, מקדמי פוריה של f הם הערכים העצמיים. $\Longleftarrow$ f נקבעת באופן יחיד עד כדי כפל בסקלר (c_1) ע"י סדרת הערכים העצמיים $\{\lambda(n)\}_{n\geq 1}$.

משפט 4.14 נסמן לסדרת ערכים עצמיים $\{\lambda(n)\}_{n\geq 1}$ של $\{T_n\}_{n\geq 1}$

$$V_\lambda = \{f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \mid T_n f = \lambda(n) f, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

אז $\dim V_\lambda = 1$ לכל λ כנ"ל ומתקיים

$$S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

כאשר λ רץ על סדרות ערכים עצמיים סימולטניים של $\{T_n\}_{n\geq 1}$. (זהו פירוק לסכום ישר אורתוגונלי)

מסקנה 4.15 נניח כי $0 \neq f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ עצמית לאופרטורים $\{T_n\}_{n\geq 1}$, $T_n f = \lambda(n) f$ $(n \geq 1)$ אז:

1. $\lambda(mn)=\lambda(n)\lambda(m)$ ל $(m,n)=1$.
2. $\lambda(p^n)\lambda(p)=\lambda(p^{n+1})+p^{k-1}\lambda(p^{n-1})$ לp ראשוני וn טבעי.
3. $\lambda(mn)=\sum_{1\le a|(m,n)} a^{k-1}\lambda\left(\frac{mn}{a^2}\right)$ לכל m,n טבעיים. **הוכחה:** מתקיים

$$T_n(f)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m(n)\,e^{2\pi imz}$$
$$c_m(n)=\sum_{1\le a|(m,n)} a^{k-1}c_{\frac{mn}{a^2}}$$

נתבונן במקדם של $q^m=e^{2\pi imz}$.

$$\lambda(n)\,c_m=c_m(n)=\sum_{1\le a|(m,n)} a^{k-1}c_{\frac{mn}{a^2}}$$

ראינו ש $c_l=\lambda(l)\,c_1$

$$\lambda(n)\lambda(m)\,c_1=c_m(n)=\sum_{1\le a|(m,n)} a^{k-1}\lambda\left(\frac{mn}{a^2}\right)c_1$$

נחלק ב $c_1\ne 0$ ונקבל את הדרוש. ■

פונקציות L תהי $f\in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ עצמית לכל האופרטורים $\{T_n\}_{n\ge 1}$ ומנורמלת (כלומר $c_1=1$).

$$(n\ge 1)T_nf=\lambda(n)\,f$$
$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)\,e^{2\pi inz}$$

הגדרנו

$$L(s,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}$$

ל$\mathrm{Re}(s)>\frac{k}{2}+1$ (ראינו כי ל$L(s,f)$ המשכה אנליטית לכל המישור $\mathbb{C}$).

משפט 4.16

$$L(s,f)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\lambda(p)\,p^{-s}+p^{k-1-2s}}$$

הוכחה: נראה

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda\left(p^{l}\right)}{p^{ls}}=\frac{1}{1-\lambda\left(p\right)p^{-s}+p^{k-1-2s}}$$

ובכן

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda\left(p^{l}\right)}{p^{ls}}\left(1-\lambda\left(p\right)p^{-s}+p^{k-1-2s}\right) &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\left(p^{l}\right)}{p^{ls}}-\frac{\lambda\left(p^{l}\right)\lambda\left(p\right)}{p^{(l+1)s}}+\frac{p^{k-1}\lambda\left(p^{l}\right)}{p^{(l+2)s}}\right)\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda\left(p^{l}\right)}{p^{ls}}-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda\left(p^{l-1}\right)\lambda\left(p\right)}{p^{ls}}+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{p^{k-1}\lambda\left(p^{l-2}\right)}{p^{ls}}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda\left(p^{l}\right)}{p^{ls}}-\frac{\lambda\left(p^{1-1}\right)\lambda\left(p\right)}{p^{1\cdot s}}-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\lambda\left(p^{l}\right)+p^{k-1}\lambda\left(p^{l-2}\right)}{p^{ls}}\\ &+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{p^{k-1}\lambda\left(p^{l-2}\right)}{p^{ls}}\\ &= \frac{\lambda\left(1\right)}{1}+\frac{\lambda\left(p\right)}{p^{s}}-\frac{\lambda\left(p\right)}{p^{s}}=1\end{aligned}$$

כאשר השלב האחרון הוא כי לפי הנירמול $\lambda\left(1\right)=1$.

תהי S קבוצה סופית של מספרים ראשוניים. נסמן ב$N\left(S\right)$ את קבוצת המספרים הטבעיים שגורמיהם הראשוניים לקוחים מS. מכפליות λ:

$$\prod_{p\in S}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda\left(p^{l}\right)}{p^{ls}}\right)=\sum_{n\in N(S)}\frac{\lambda\left(n\right)}{n^{s}}$$

$$\prod_{p\in S}\frac{1}{1-\lambda\left(p\right)p^{-s}+p^{k-1-2s}}=\sum_{n\in N(S)}\frac{\lambda\left(n\right)}{n^{s}}$$

ניתן לS לעלות (לפי הכלה) "עד שתכסה את המספרים הראשוניים" ונקבל:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\lambda\left(p\right)p^{-s}+p^{k-1-2s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda\left(n\right)}{n^{s}}=L\left(s,f\right)$$

■

דוגמה $\dim S_{12}\left(\mathrm{SL}_{2}\left(\mathbb{Z}\right)\right)=1$ לכן "אוטומטית" $\Delta\left(z\right)$ עצמית לכל $\left\{T_{n}\right\}_{n\geq1}$. הנירמול הוא $\nu\left(z\right)=\left(2\pi\right)^{-12}\Delta\left(z\right)$.

$$T_{n}\nu=\tau\left(n\right)\nu$$

לכל $n\geq1$ ו $\tau\left(mn\right)=\tau\left(m\right)\tau\left(n\right)$, $\tau\left(p^{n}\right)\tau\left(p\right)=\tau\left(p^{n+1}\right)+p^{11}\tau\left(p^{n-1}\right)$ ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau\left(n\right)}{n^{s}}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\tau\left(p\right)p^{-s}+p^{11-2s}}$$