מבוא להצגות של חבורות p־אדיות

תקציר

רשימות אלו מבוססות על הרשימות של איתמר ראוך בקורס "מבוא להצגות של חבורות p־אדיות" (סימול 0366-5020) שהועבר על ידי פרופסור אשר בן־ארצי בסמסטר ב' שנת הלימודים תשע"ה באוניברסיטת תל אביב. אין המרצה או איתמר אחראיים לכל טעות שנפלה ברשימות אלה. לתגובות, תיקונים ועוד, אנא פנו לelad88 בgmail.

תוכן עניינים

1 מרחבי l

הגדרה 1.1 מרחב־l הוא מרחב טופולוגי האוסדורף X, כך שיש בסיס לטופולוגיה המורכב מקבוצות פתוחות קומפקטיות.

הערה 1.2 בפרט:

1. X קומפקטי מקומית.
2. כל רכיב קשירות של X הוא נקודה. (כי כמו בכל מרחב האוסדורף, קבוצה קומפקטית היא סגורה)

תתי מרחב

טענה 1.3 אם X מרחב־l אז כל תת־קבוצה פתוחה או סגורה של X היא מרחב־l.

הוכחה: לקבוצה סגורה הטענה ברורה (כי הבסיס סביבות ממשיך להיות קומפקטי פתוח). לקבוצה פתוחה הטענה גם ברורה, כי הבסיס של הסביבות הפתוחות קומפקטיות שמוכלות בקבוצה הפתוחה נשארות קומפקטיות. ■

הערה 1.4 יהי X מרחב־l, ו $Z \subseteq X$ סגורה. אז לכל $K \subseteq Z$ פתוחה קומפקטית קיימת $U \subseteq X$ פתוחה קומפקטית כך ש $U \cap Z = K$.

הוכחה: קיימת $V \subseteq X$ פתוחה כך ש $K = V \cap Z$. לכל $k \in K$ קיימת סביבה פתוחה קומפקטית בX עם $k \in W_k \subseteq V$. מתקיים $K \subseteq \bigcup_{k \in K} W_k$ ולכן קיים תת־כיסוי סופי $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{k_i}$ כאשר $k_1, \ldots, k_n \in K$. מכאן $U = \bigcup_{i=1}^n W_{k_i}$ מקיימת $K \subseteq U \subseteq V$ ו Xפתוחה קומפקטית ב

$$K = K \cap Z \subseteq U \cap Z \quad \subseteq \quad V \cap Z = K$$

כנדרש. ■

למת כיסוי

למה 1.5 יהי X מרחב־l ו $K \subseteq X$ קומפקט. יהי $\{V_i\}_{i \in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות בX, כך ש $K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$. אז קיימת קבוצת פתוחות וקומפקטיות וזרות בזוגות כך ש $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j$ וכך שלכל j יש i_j עם $W_j \subseteq V_{i_j}$.

הוכחה: מאחר וX הוא מרחב־l, ניתן להניח ע"י עידון הכיסוי כי V_i קומפקטיות פתוחות. מאחר וK קומפקטית, אפשר להניח ש $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ סופית וכי $K \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$. נגדיר $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2 \setminus V_1$, ... , $W_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$. ■

גרסה למרחבי מכפלה

למה 1.6 יהיו X, Y מרחבי־l, ויהי $K \subseteq X \times Y$ קומפקט. תהיינה $V_i \subseteq X \times Y$ פתוחות ($i \in I$) עם $K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$. אז יש $A_j \subseteq X$ ו $B_j \subseteq Y$ ($j = 1, \ldots, n$) כך ש $W_j = A_j \times B_j \subseteq X \times Y$ זרות (ופתוחות וקומפקטיות). ו $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j$ ולכל j יש $i_j \in I$ עם $W_j \subseteq V_{i_j}$.

הוכחה: נסמן בR את אוסף המלבנים

$$R \quad = \quad \{A \times B \subseteq X \times Y \mid A \subseteq X, B \subseteq Y \mid A, B \text{ are open and compact}\}$$

ונסמן בC את האיחודים הזרים הסופיים של איברי R. C סגורה ביחס לחיתוך. גם ביחס להפרש כי:

$$\begin{aligned} X \times Y \setminus \left(\bigcup_i (A_i \times B_i) \right) &= \bigcap_i ((X \times Y) \setminus (A_i \times B_i)) \\ &= \bigcap_i ((X \times (Y \setminus B_i)) \cup ((X \setminus A_i) \times B_i)) \end{aligned}$$

לכן C סגורה להפרש ולכן גם ביחס לאיחוד: $M \cup N = M \cup (N \setminus M)$. ובהוכחה כמו קודם, לוקחים $V_i \in R$ ו $W_j \in C$. ■

2 פונקציות מבחן

2.1 הגדרות

הגדרה 2.1 פונקציה $f:X\to Y$ כאשר X מרחב טופולוגי נקראת קבועה למקוטעין אם לכל $x_0\in X$ יש סביבה פתוחה $U\subseteq X$ של x_0 כך ש $f\mid_U$ קבועה. כלומר f רציפה כאשר Y עם טופולוגיה דיסקרטית.

סימונים יהי X מרחב־l ו L מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. נסמן ב$C^{\infty}(X)$ ($C^{\infty}(X,L)$) את אוסף הפונקציות $f:X\to\mathbb{C}$ ($f:X\to L$) שהן קבועות מקומית $C^{\infty}(X)=C^{\infty}(X,\mathbb{C})$. $C^{\infty}(X)$ ו $\mathbb{C}^{\infty}(X)$ חוג ו $C^{\infty}(X,L)$ מודול מעל $C^{\infty}(X)$ עם כפל נקודתית.

תומך אם $f\in C^{\infty}(X,L)$ אז מגדירים $\mathrm{supp} f=\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}$. זוהי קבוצה פתוחה וסגורה בX. מסמנים ב $C_c^{\infty}(X)$ ($C_c^{\infty}(X,L)$) את האיברים ב$C^{\infty}(X)$ ($C_c^{\infty}(X,L)$) עם תומך קומפקטי.

הערה 2.2 ב[BZ] מסמנים $C_c^{\infty}(X)=\mathcal{S}(X)$.

תיאור פונקציות חלקות סימון כללי

$$\chi_V(a) = \begin{cases}1 & a\in V\\ 0 & a\notin V\end{cases}$$

תהי $f\in C^{\infty}(X,L)$

1. מאחר שf קבועה מקומית ו $\mathrm{supp} f$ קומפקטי, $\mathrm{Im} f$ סופית ויש תיאור יחיד בצורה

$$f = \sum_{i=1}^{n} v_i\chi_{\mathcal{O}_i}$$

כאשר $\mathcal{O}_i\subseteq X$ פתוחות קומפקטיות ו $v_i\in L$ וקטורים שונים. (ל0 ניקח $n=0$)

2. מלמת הכיסוי נובע שלכל כיסוי פתוח $\mathrm{supp} f\subseteq\bigcup_{i\in I}V_i$ יש תיאור $f=\sum_{j=1}^{m}v_j\chi_{W_j}$ עם $W_j\subseteq X$ קומפקטיות פתוחות וכך שלכל j יש i_j עם $W_j\subseteq V_{i_j}$ ו $v_i\in L$.

2.2 שימוש במכפלות טנזוריות

טענה 2.3 יהיו X,Y מרחבי l, וL מרחב וקטורי. כל המכפלות הבאות מעל $\mathbb{C}$: ההעתקות הבאות הן איזומורפיזמים של מרחבים וקטוריים:

.1

$$\begin{aligned}\eta: C_c^{\infty}(X)\otimes L &\to C_c^{\infty}(X,L)\\ f\otimes v &\mapsto [x\mapsto f(x)\cdot v(x)]\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}\theta : C_c^{\infty}(X) \otimes C_c^{\infty}(Y) & \rightarrow & C_c^{\infty}(X \times Y) \\ f \otimes g & \mapsto & [(x,y) \mapsto f(x) \cdot g(y)]\end{aligned}$$

הוכחה:

1. η על לפי התיאור של איברי $C_c^{\infty}(X,L)$. נניח כי $\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes v_i$ מקיים $\eta\alpha = 0$. אפשר להניח כי $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל ואז לכל $x \in X$

$$0 = (\eta\alpha)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) v_i$$

ולכן $f_i(x) = 0$ לכל $1 \le i \le n$ ולכל $x \in X$, ולכן $\alpha = 0$.

2. לאור למת הכיסוי למכפלות, נובע שθ על. θ חד־חד־ערכית: אם $\alpha = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes k_i$ מקיים $\theta\alpha = 0$. אפשר להניח כי $k_1, \ldots, k_n$ בת"ל ו $h_1, \ldots, h_n$ בת"ל. ואז לכל $y \in Y$ מתקיים $(\theta\alpha)(x,y) = 0 = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) k_i(y)$. הפונקציות $\{h_i(x)\}_{i=1}^{n}$ בת"ל ולכן $k_i(y) = 0$ לכל $y \in Y$ ולכן $\alpha = 0$.

■

2.3 צמצום על תת־קבוצה סגורה

טענה 2.4 יהי X מרחב־l. תהי $Z \subseteq X$ קבוצה סגורה. נסמן $U = X \setminus Z$. אז יש סדרה מדויקת

$$0 \longrightarrow C_c^{\infty}(U) \xrightarrow{i_U} C_c^{\infty}(X) \xrightarrow{p_Z} C_c^{\infty}(Z) \longrightarrow 0$$

כאשר p_Z היא צמצום $f \mapsto f \restriction_Z$ ו i_U היא הרחבת 0 מחוץ לU.
בפרט $\mathrm{Ker} p_Z = \mathrm{Im} i_U = \{f \in C_c^{\infty}(X) \mid \mathrm{supp} f \subseteq U\}$.

הוכחה: ברור שp וi מוגדרות. ברור ש i חד־חד־ערכית ו $p \circ i = 0$. כמו כן, ברור שאם $C_c^{\infty}(X) \ni f \in \mathrm{Ker} p$ אז $\mathrm{supp} f \subseteq U$ קומפקטית ולכן

$$f = i_U(f \restriction_U) \in \mathrm{Im} i_U$$

נותר להוכיח שp על. די להוכיח שאם $Z \supseteq K$ פתוחה וקומפקטית אז $\chi_K \in \mathrm{Im} p$. אבל קיימת $W \subseteq X$ פתוחה קומפקטית עם $W \cap Z = K$ ולכן $p(\chi_W) = \chi_W \restriction_Z = \chi_K$. ■

3 דיסטריבוציות

הגדרה 3.1 יהי X מרחב־l. אז

$$\mathcal{D}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C_c^{\infty}(X), \mathbb{C})$$

סימונים נוספים: $\mathcal{S}^*(X)$ ב[BZ] ו $\mathcal{D}'(X)$ באנליזה.

דיסטריבוציות ומידות יהי X מרחב־l, $T \in \mathcal{D}(X)$. אז $T : C_c^{\infty}(X) \to \mathbb{C}$ לינארית. לכל $\mathcal{O} \subseteq X$ פתוחה קומפקטית. נסמן

$$T(\mathcal{O}) \quad = \quad T(\chi_{\mathcal{O}})$$

<u>תכונה:</u> $T(A \cup B) = T(A) + T(B)$ כאשר A, B פתוחות קומפקטיות זרות. בפרט $T(\emptyset) = 0$.

מינוח לפונקציה $T : \{\text{Open compact sets in } X\} \to \mathbb{C}$ עם התכונה הנ"ל קוראים מידה.
בהנתן מידה T נקבל דיסטריבוציה $T \in \mathcal{D}(X)$ ע"י

$$f = \sum_{i=1}^{n} z_i \chi_{\mathcal{O}_i} \quad \mapsto \quad T(f) = \sum_{i=1}^{n} z_i T(\mathcal{O}_i)$$

באשר $\mathcal{O}_i$ זרות ו z_i שונות.
מהתכונה לעיל נובע שנוסחה ל$T(f)$ נכון גם אם z_i אינם שונים זה מזה ולכן נובע שT לינארית.

סימונים

$$T(f) \quad = \quad \langle T, f \rangle = \int_X f(x)\, dT(x) = \int_X f(y)\, dT(y) = \dots$$

אם $U \subseteq X$ פתוחה אז מסמנים ל $f \in C_c^{\infty}(X)$

$$\int_U f dT \quad = \quad \int_X \chi_U f dT = \langle T, \chi_U f \rangle$$

תת מרחב

טענה 3.2 יהי X מרחב־l, תהי $Z \subseteq X$ סגורה. נסמן $U = X \setminus Z$. אז יש סדרה מדויקת

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(Z) \xrightarrow{p_Z^*} \mathcal{D}(X) \xrightarrow{i_U^*} \mathcal{D}(U) \quad \longrightarrow \quad 0$$

הערה 3.3 כאן p_Z^* הדואלי של p_Z ו i_U^* הדואלי של i_U, כלומר

$$\begin{aligned} \langle p_Z^* T, f \rangle \quad &= \quad \langle T, p_Z f \rangle \\ \langle i_U^* T, f \rangle \quad &= \quad \langle T, i_U f \rangle \end{aligned}$$

הוכחה: נובע מכך ש

$$0 \longrightarrow C_c^{\infty}(U) \xrightarrow{i_U} C_c^{\infty}(X) \xrightarrow{p_Z} C_c^{\infty}(Z) \quad \longrightarrow \quad 0$$

מדויקת ומהעובדה שאם L, M, N מרחבים וקטוריים ו $0 \to L \to N \to M \to 0$ מדויקת אז $0 \to L^* \to N^* \to M^* \to 0$ מדויקת. ■

הערה 3.4 תנאים שקולים: עבור $T \in \mathcal{D}(X)$ ו $U \subseteq X$ פתוחה.

1. $i_U^* T = 0$
2. $Tf = 0$ לכל $f \in C_c^\infty(X)$ עם $\mathrm{supp} f \subseteq U$
3. $T(\mathcal{O}) = 0$ לכל $\mathcal{O} \subseteq U$ פתוחה וקומפקטית.

הוכחה: $2 \iff 1$ כי $f \in \mathrm{Im} i_U \iff \mathrm{supp} f \subseteq U$.
$3 \iff 2$ מיידי מתיאור $C_c^\infty(X)$ ■

מסקנה 3.5 איחוד תת הקבוצות הפתוחות $U \subseteq X$ כך ש $i_U^* T = 0$ הוא קבוצה פתוחה $\Omega = \Omega_T \subseteq X$ כך ש $i_\Omega^* T = 0$ ו $\Omega \subseteq X$ היא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר עם תכונה זו.

הוכחה: אם $\mathcal{O} \subseteq \Omega$ פתוחה קומפקטית, אז יש כיסוי סופי $\mathcal{O} \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j$ כך ש $W_j \subseteq X$ פתוחה קומפקטית ו $W_j \subseteq U_j$ כך ש $i_{U_j}^* T = 0$. אז $T(\mathcal{O}) = \sum_{j=1}^n T(W_j) = 0$. ■

תומך

הגדרה 3.6 בסימונים אלה $\mathrm{supp} T = X \setminus \Omega$ נקרא התומך של T. זוהי קבוצה סגורה.

תכונות

1. אם $Z \subseteq X$ סגורה ו $U = X \setminus Z$ אז $i_U^* T = 0 \iff \mathrm{supp} T \subseteq Z$ (כי שניהם שקולים לכך ש $U \subseteq \Omega$). לכן הסדרה המדויקת

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(Z) \xrightarrow{p_Z^*} \mathcal{D}(X) \xrightarrow{i_U^*} \mathcal{D}(U) \longrightarrow 0$$

מראה שיש התאמה חד־חד־ערכית ועל.

$$\mathcal{D}(Z) \xrightarrow{p_Z^*} \mathrm{Ker} i_U^* = \{T \in \mathcal{D}(X) \mid \mathrm{supp} T \subseteq Z\}$$

ולעתים מזהים שני מרחבים אלה.

2. $\mathrm{supp} f \cap \mathrm{supp} T = \emptyset \implies \langle T, f \rangle = 0$ (כי אז $\mathrm{supp} f \subseteq \Omega$ ולכן $f \in \mathrm{Im} i_\Omega$).
<u>בפרט</u>

(א) $T = 0 \iff \mathrm{supp} T = \emptyset$

(ב) $f_1 \restriction_{\mathrm{supp} T} = f_2 \restriction_{\mathrm{supp} T} \implies \langle T, f_1 \rangle = \langle T, f_2 \rangle$. (מסתכלים על $f_1 - f_2$, התומך של פונקציה זו הוא מחוץ ל$\mathrm{supp} T$)

(ג) לכל $U \subseteq X$ פתוחה עם $\mathrm{supp} T \subseteq U$ מתקיים $\langle T, f \rangle = \langle T, \chi_U f \rangle$.

3. איפיון נקודות מ $\mathrm{supp} T$. תהי $x \in X$. התנאים הבאים שקולים:

(א) $x \in \mathrm{supp} T$

(ב) לכל סביבה פתוחה $x\in U\subseteq X$ יש תת קבוצה $\mathcal{O}\subseteq U$ פתוחה קומפקטית עם $T\left(\mathcal{O}\right)\neq0$

(ג) לכל סביבה פתוחה $x\in U\subseteq X$ יש $f\in C_{c}^{\infty}\left(X\right)$ כך ש $\mathrm{supp}f\subseteq U$ ו $T\left(f\right)\neq0$

הוכחה:

שלילת ב $\Longleftrightarrow$ קיימת סביבה פתוחה $x\in U\subseteq X$ כך שלכל תת־קבוצה $\mathcal{O}\subseteq U$ פתוחה קומפקטית מתקיים $T\left(\mathcal{O}\right)=0$. זה קורה $\Longleftrightarrow$ $U\subseteq\Omega_{T}$ (מהתנאים השקולים מקודם) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{supp}T\cap U=\emptyset$ $\Longleftrightarrow$ $x\notin\mathrm{supp}T$ (כי $\mathrm{supp}T$ סגורה.)

שלילת ג $\Longleftrightarrow$ קיימת סביבה פתוחה $x\in U\subseteq X$ כך שלכל $f\in C_{c}^{\infty}\left(X\right)$ עם $\mathrm{supp}f\subseteq U$ מתקיים $T\left(f\right)=0$. $\Longleftrightarrow$ $U\subseteq\Omega_{T}$ (מהתנאים השקולים מקודם)

לכן שלילת ב $\Longleftrightarrow$ שלילת א וכמו כן שלילת ג $\Longleftrightarrow$ שלילת א. $\blacksquare$

פעולת דיסטריבוציות על פונקציה וקטורית תהי $T\in\mathcal{D}\left(X\right)$ ויהי L מרחב וקטורי, אז T משרה טרנספורמציה לינארית

$$\begin{aligned}\left\langle T,\cdot\right\rangle :C_{c}^{\infty}\left(X,L\right) & \cong & C_{c}^{\infty}\left(X\right)\otimes L\overset{T\otimes\mathrm{id}_{L}}{\longrightarrow}\mathbb{C}\otimes L=L\\ f & \mapsto & \left\langle T,f\right\rangle \end{aligned}$$

תיאור ישיר: ל $f\in C_{c}^{\infty}\left(X,L\right)$ יש תיאור ע"י

$$f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}f_{i}\left(x\right)v_{i}$$

כאשר $f_{i}\in C_{c}^{\infty}\left(X\right),v_{i}\in L$ ואז

$$\left\langle T,f\right\rangle =\sum_{i=1}^{n}\left\langle T,f_{i}\right\rangle v_{i}$$

בפרט, אם נשתמש בתיאור $f=\sum_{j=1}^{m}\chi_{\mathcal{O}_{j}}v_{j}$ נקבל

$$\left\langle T,f\right\rangle =\sum_{j=1}^{m}T\left(\mathcal{O}_{j}\right)v_{j}$$

מסמנים $\left\langle T,f\right\rangle =\int_{X}f\left(x\right)dT\left(x\right)$.

טרנספורמציה לינארית אם $\tau:L\to M$ טרנספומרציה לינארית בין מרחבים וקטוריים ו $T\in\mathcal{D}\left(X\right)$ אז

$$\tau\left(Tf\right)=T\left(\tau\circ f\right)$$

מרחבי מכפלה יהיו X,Y מרחבי־l. $T\in\mathcal{D}(X),S\in\mathcal{D}(Y)$. אז מוגדר $T\otimes S\in\mathcal{D}(X\times Y)$ ע"י

$$C_c^\infty(X\times Y)\cong C_c^\infty(X)\otimes C_c^\infty(Y)\overset{T\otimes S}{\longrightarrow}\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}=\mathbb{C}$$

ואז אם $f\in C_c^\infty(X),g\in C_c^\infty(Y)$ נקבל

$$\begin{aligned}(f\otimes g)(x,y)&=f(x)g(y)\\ \langle T\otimes S,f\otimes g\rangle&=\langle T,f\rangle\langle S,g\rangle\end{aligned}$$

טענה 3.7 (פוביני): לכל $\varphi\in C_c^\infty(X\times Y)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\langle T\otimes S,\varphi\rangle&=\int_{X\times Y}\varphi(x,y)\,d(T\otimes S)(x,y)\\&=\int_Y\left[\int_X\varphi(x,y)\,dT(x)\right]dS(y)\\&=\int_X\left[\int_Y\varphi(x,y)\,dS(y)\right]dT(x)\end{aligned}$$

והפונקציות בסוגריים המרובעים שייכות ל־$C_c^\infty(\cdot)$.

הוכחה: מלינאריות ניתן להניח כי $\varphi(x,y)=f(x)g(y)$ ואז

$$\begin{aligned}\int_X\left[\int_Y\varphi(x,y)\,dS(y)\right]dT(x)&=\int_X\left[\int_Y f(x)g(y)\,dS(y)\right]dT(x)\\&=\int_X f(x)\langle S,g\rangle\,dT(x)\\&=\langle S,g\rangle\int_X f(x)\,dT(x)\\&=\langle S,g\rangle\langle f,T\rangle\\&=\int_{X\times Y}\varphi(x,y)\,d(T\otimes S)(x,y)\end{aligned}$$

■

הערה 3.8

1. יש הכללה לפונקציות וקטוריות.
2. יש הכללה למספר מרחבים. בפרט $(T\otimes S)\otimes R=T\otimes(S\otimes R)$.

טענה 3.9 $\mathrm{supp}T\otimes S=\mathrm{supp}T\times\mathrm{supp}S\subseteq X\times Y$

הוכחה: $(x,y)\in\operatorname{supp}(T\otimes S)$ $\iff$ לכל סביבה W של (x,y) ב $X\times Y$ (וניתן לקחת $W=U\times V$ כאשר U,V סביבות של x,y ב X,Y בהתאמה) קיימת $\varphi\in C_c^\infty(X\times Y)$ כך ש $\operatorname{supp}\varphi\subseteq W$ ו $\langle T\otimes S,\varphi\rangle\neq 0$. ניתן לקחת $\varphi=f\otimes g$ עם $f\in C_c^\infty(X)$ ו $g\in C_c^\infty(Y)$ עם $\operatorname{supp}f\subseteq U$ ו $\operatorname{supp}g\subseteq V$. במקרה זה מתקיים

$$\langle T\otimes S,f\otimes g\rangle = \langle T,f\rangle\langle S,g\rangle$$

רואים תנאי שקול:

קיימת סביבה $X\subseteq U\in x$ ו$f\in C_c^\infty(X)$ עם $\operatorname{supp}f\subseteq U$ ו$g\in C_c^\infty(Y)$ עם $\operatorname{supp}g\subseteq V$ כך ש $\langle T,f\rangle\neq 0$ ו $\langle S,g\rangle\neq 0$. ∎

כפל דיסטריבוציות בפונקציות מ$C^\infty(X)$ יהי X מרחב־l. תהי $h\in C^\infty(X)$ ותהי $T\in\mathcal{D}(X)$. נגדיר $hT\in\mathcal{D}(X)$ ע"י

$$\langle hT,\varphi\rangle = \langle T,h\varphi\rangle$$

כאשר $\varphi\in C_c^\infty(X)$.

טענה 3.10 התומך של hT הוא $\operatorname{supp}(hT)=\operatorname{supp}h\cap\operatorname{supp}T$.

הוכחה: יהי $x\in X$. נסמן $c=h(x)$. אז קיימת סביבה פתוחה $x\in W\subseteq X$ כך ש $h\restriction_W=c$ קבועה. לכל $\varphi\in C_c^\infty(X)$ כך ש $\operatorname{supp}\varphi\subseteq W$ נקבל

$$\langle hT,\varphi\rangle = \langle T,h\varphi\rangle=c\langle T,h\rangle$$

לכן יש את השקילויות הבאות:

$x\in\operatorname{supp}(hT)$ $\iff$ לכל סביבה פתוחה $x\in V\subseteq X$ (ואפשר להניח $V\subseteq W$ כי אפשר לחתוך) קיימים $\varphi\in C_c^\infty(X)$ עם $\operatorname{supp}\varphi\subseteq V$ כך ש

$$c\langle T,\varphi\rangle = \langle hT,\varphi\rangle\neq 0$$

$\iff$ $c\neq 0$ ו $x\in\operatorname{supp}T$.

$\iff$ $h(x)\neq 0$ ו $x\in\operatorname{supp}T$

$\iff$ $x\in\operatorname{supp}h$ ו $x\in\operatorname{supp}T$. ∎

הערה 3.11 בפרט מקבלים $hT=0$ $\iff$ $\operatorname{supp}h\cap\operatorname{supp}T=\emptyset$.

4 דיסטריבוציות עם תומך קומפקטי

4.1 הכללת $\langle T,f\rangle$

X מרחב־l. L מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, $T\in\mathcal{D}(X)$. תהי $f\in C^\infty(X,L)$ כך ש $\operatorname{supp}f\cap\operatorname{supp}T$ קומפקטי. נקח $\varphi\in C_c^\infty(X,L)$, כך ש $f\restriction_{\operatorname{supp}T}=\varphi\restriction_{\operatorname{supp}T}$, ונגדיר $\langle T,f\rangle=\langle T,\varphi\rangle$.

קיום φ: נקח $V\subseteq X$ פתוחה קומפקטית עם $\operatorname{supp}f\cap\operatorname{supp}T\subseteq V$ ונגדיר $\varphi=\chi_V\cdot f$.
(אם $x\in\operatorname{supp}T$ ו $x\notin\operatorname{supp}f$ אז $f(x)=0=\varphi(x)$)

$\langle T,f\rangle$ מוגדר היטב: ראינו שאם $\varphi_1\restriction_{\operatorname{supp}T}=\varphi_2\restriction_{\operatorname{supp}T}$ אז $\langle T,\varphi_1\rangle=\langle T,\varphi_2\rangle$.

הערה 4.1

1. אם $f\in C_c^\infty\left(X,L\right)$ ההגדרה תואמת לקודמת.
2. אם $\mathrm{supp}f\cap\mathrm{supp}T=\emptyset$ אז $\left\langle T,f\right\rangle =0$ (נקח $\varphi=0$).

4.2 דיסטריביוציות עם תומך קומפקטי

נסמן

$$\mathcal{D}_c\left(X\right)=\left\{ T\in\mathcal{D}\left(X\right)\mid\mathrm{supp}T\text{ is compact}\right\}$$

ואז נקח $V\subseteq X$ פתוחה קומפקטית עם $\mathrm{supp}T\subseteq V$ ונגדיר

$$\left\langle T,f\right\rangle =\left\langle T,\chi_V f\right\rangle \qquad\left(f\in C^\infty\left(X,L\right)\right)$$

דוגמה אם $x\in X$ מוגדרת $\delta_x\in\mathcal{D}\left(X\right)$ ע"י $\left\langle \delta_x,f\right\rangle =f\left(x\right)$ עבור $f\in C^\infty\left(X,L\right)$ ואותה הנוסחה נכונה ל $f\in C_c^\infty\left(X,L\right)$ ול $f\in C^\infty\left(X,L\right)$. מתקיים $\mathrm{supp}\delta_x=\left\{ x\right\}$.

מכפלות אם $S\in\mathcal{D}_c\left(Y\right)$ ו $T\in\mathcal{D}_c\left(X\right)$ אז ראינו ש $\mathrm{supp}\left(T\otimes S\right)=\mathrm{supp}T\times\mathrm{supp}S$ ולכן $T\otimes S\in\mathcal{D}_c\left(X\times Y\right)$.

פעולת טרנספורמציה לינארית הנוסחה $\tau\left(Tf\right)=T\left(\tau\circ f\right)$ נשארת נכונה ל $\tau:L\to M$ לינארית ו $f\in C^\infty\left(X,L\right)$.

הכללת פוביני אם $S\in\mathcal{D}_c\left(Y\right)$ ו $T\in\mathcal{D}_c\left(X\right)$ ו $\varphi\in C^\infty\left(X\times Y\right)$, יהיו $\mathrm{supp}S\subseteq V\subseteq Y$ ו $\mathrm{supp}T\subseteq U\subseteq X$ פתוחות קומפקטיות. מתקיים

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}\varphi\left(x,y\right)d\left(T\otimes S\right)\left(x,y\right) & :=\int_{X\times Y}\chi_U\left(x\right)\chi_V\left(y\right)\varphi\left(x,y\right)d\left(T\otimes S\right)\left(x,y\right)\\
 & =\int_X\left[\int_Y\chi_U\left(x\right)\chi_V\left(y\right)\varphi\left(x,y\right)dS\left(y\right)\right]dT\left(x\right)\\
 & =\int_X\underbrace{\chi_U\left(x\right)\left[\int_Y\chi_V\left(y\right)\varphi\left(x,y\right)dS\left(y\right)\right]}_{\in C_c^\infty\left(X\right)}dT\left(x\right)
\end{aligned}$$

מכיוון שהחלק בסוגריים המרובעים ב $C_c^\infty\left(X\right)$ וכיוון שU גדולה כרצוננו, ניתן להניח כי U מכילה את החיתוך של $\mathrm{supp}T$ עם התומך של הסוגריים המרובעים ונקבל

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}\varphi\left(x,y\right)d\left(T\otimes S\right)\left(x,y\right) & =\int_X\chi_U\left(x\right)\left[\int_Y\chi_V\left(y\right)\varphi\left(x,y\right)dS\left(y\right)\right]dT\left(x\right)\\
 & :=\int_X\left[\int_Y\varphi\left(x,y\right)dS\left(y\right)\right]dT\left(x\right)
\end{aligned}$$

באופן דומה מתקיים

$$\int_{X\times Y}\varphi\left(x,y\right)d\left(T\otimes S\right)\left(x,y\right)=\int_Y\left[\int_X\varphi\left(x,y\right)dT\left(x\right)\right]dS\left(y\right)$$

4.3 הומיאומורפיזם

יהיו X,Y מרחבי-l ו $\sigma : X \to Y$ הומיאומורפיזם. נקבל איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$\begin{aligned} \sigma_* : C^\infty(X) &\to C^\infty(Y) \\ f &\mapsto \sigma_* f = f \circ \sigma^{-1} \end{aligned}$$

כלומר

$$(\sigma_* f)(y) = \left(f \circ \sigma^{-1}\right)(y)$$

בנוסף

$$\begin{aligned} \sigma^* : \mathcal{D}(X) &\to \mathcal{D}(Y) \\ T &\mapsto \sigma^* T = T \circ \sigma_*^{-1} \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} \langle \sigma^* T, f \rangle &= \left(T \circ \sigma_*^{-1}\right)(f) \\ &= \left\langle T, \sigma_*^{-1} f \right\rangle \\ &= \langle T, f \circ \sigma \rangle \end{aligned}$$

ל $f \in C_c^\infty(Y)$ או

$$\int_Y f(y)\, d(\sigma^* T)(y) = \int_X f(\sigma(x))\, dT(x)$$

מתקיים $(\eta \circ \sigma)^* = \eta^* \circ \sigma^*$ כאשר

$$X \underset{\approx}{\xrightarrow{\sigma}} Y \underset{\approx}{\xrightarrow{\eta}} Z$$

מידות

$$\begin{aligned} (\sigma^* T)(\mathcal{O}) &= \int_Y \chi_{\mathcal{O}}(y)\, d(\sigma^* T)(y) \\ &= \int_X \chi_{\mathcal{O}}(\sigma(x))\, dT(x) \\ &= \int_X \chi_{\sigma^{-1}(\mathcal{O})}(x)\, dT(x) \\ &= T\left(\sigma^{-1}(\mathcal{O})\right) \end{aligned}$$

באשר $\mathcal{O}$ פתוחה קומפקטית.

5 הצגות ומודולים (ללא טופולוגיה)

5.1 הגדרות כלליות

הגדרה 5.1 אלגברה היא מרחב וקטורי A עם תבנית בילינארית

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A & \to A \\ (a,b) & \mapsto ab \end{aligned}$$

אסוציאטיבית ועם איבר יחידה. הומומורפיזמים שולחים יחידה ליחידה.

הגדרה 5.2 אם G חבורה מוגדרת אלגברה

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \mid n = 1, 2, \cdots \mid c_i \in \mathbb{C}, g_i \in G \right\}$$

ואז $1_{\mathbb{C}[G]} = 1 \cdot 1_G$. נחשוב על $G \subseteq \mathbb{C}[G]$.

הגדרה 5.3 מודול M מעל חבורה G (או אלגברת A) הוא מרחב וקטורי עם תבניות בילינאריות

$$\begin{aligned} G \times M & \longrightarrow M \\ (g,m) & \mapsto g \cdot m \end{aligned}$$

(או לחלופין לA

$$\begin{aligned} A \times M & \longrightarrow M \\ (a,m) & \mapsto a \cdot m \end{aligned}$$

) כך ש $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2) x$ (באשר $g_1, g_2 \in G$ ו$x \in M$) ו $1_G x = x$ (ל $x \in M$). (באופן דומה עבור A)

הערה 5.4 יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין G מודולים ל$\mathbb{C}[G]$ מודולים ע"י

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i \right) x = \sum_{i=1}^{n} c_i (g_i x)$$

הגדרה 5.5 הצגה (π, V_π) של חבורה G (או אלגברת A) הוא הומומורפיזם

$$\begin{aligned} \pi : G & \to \mathrm{GL}(V_\pi) \\ \mathrm{GL}(V_\pi) = \mathrm{Aut}(V_\pi) & = \{\tau \mid \tau : V_\pi \to V_\pi \text{ is an invertible linear transform}\} \end{aligned}$$

(או הומומורפיזם של אלגבראות $\pi : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\pi)$ באשר $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\pi) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\pi, V_\pi)$)

הערה 5.6 אם (π, V_π) הצגה אז V_π הופך למודול:

$$gx = (\pi(g))(x) \qquad (ax = (\pi(a))(x))$$

ובכיוון ההפוך, כל מודול יוצר הצגה

$$G \ni g \quad \mapsto \quad \{\pi(g)(x) = gx\}$$

הגדרה 5.7 (סימון): אם π הצגה, V_π יהיה המרחב שלה.

הגדרה 5.8 יהיו M, N מודולים ביחס לחבורה G (או אלגברה A)

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N) &= \{\text{Linear transformations}\}\\ \mathrm{Hom}_G(M,N) &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N) \mid g(f(x)) = f(g(x))\, \forall g \in G \forall x \in M\}\end{aligned}$$

זהו תת־מרחב של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$. אם דנים בהצגות, התנאי הוא

$$\pi_2(g) f(x) \quad = \quad f(\pi_1(g)x)$$

כאשר $M = V_{\pi_1}$ ו־$N = V_{\pi_2}$ ו $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$. מסמנים במקרה זה $\mathrm{Hom}_G(V_{\pi_1}, V_{\pi_2}) = \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$.
למשל מתקיים $\mathrm{Hom}_G(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(M,N)$.

איזומורפיזמים של מודולים או הצגות שקולות תהיינה π, ρ הצגות של חבורה G. אם $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \rho)$ הפיכה כטרנספורמציה לינארית $\varphi : V_\pi \to V_\rho$ אז הטרנספורמציה הלינארית ההופכית $\varphi^{-1} : V_\rho \to V_\pi$ גם מקיימת $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \pi)$ ובמקרה זה אומרים ש π ו־ρ הצגות שקולות.

יש הגדרות דומות למודול ואם $\varphi : M \to N$ הוא G־מורפיזם בין שני מודולים (φ טרנספורמציה לינארית) ואם φ הפיכה אז $\varphi^{-1} : N \to M$ היא G־מורפיזם ואומרים ש־M ו־N איזומורפיים ומסמנים $M \cong N$.

יש הגדרות דומות להצגות של אלגבראות או מודולים מעל אלגברה.

תת־מודול אם M הוא G־מודול, תת־מודול $N \subseteq M$ הוא תת־מרחב וקטורי כך ש $gN \subseteq N$ (לכל $g \in G$). אז N הופך ל־G־מודול. תתי המודולים $0, M$ של M נקראים טריוואלים.

הגדרה 5.9 מודול M נקרא <u>פשוט</u> אם $M \neq 0$ ול־M אין תת־מודולים פרט לתת־מודולים הטריוואלים. הצגה (π, V_π) נקראת <u>אי־פריקה</u> אם $V_\pi \neq 0$ ול־V_π אין תת־הצגות פרט לצמצום π על תתי המרחב 0 ו־V_π.

הומומורפיזמים בין מודולים פשוטים אם M, N מודולים פשוטים ו $\varphi : M \to N$ מורפיזם של מודולים אז $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq M$ תת־מודול ולכן $\mathrm{Ker}\varphi = 0$ ולכן φ חד־חד־ערכית או $\mathrm{Ker}\varphi = M$ ואז $\varphi = 0$.

כמו כן $\mathrm{Im}\varphi \subseteq N$ הוא תת־מודול. ולכן $\mathrm{Im}\varphi = 0$ ואז $\varphi = 0$ או $\mathrm{Im}\varphi = N$ ואז φ על.
<u>סה"כ</u> $\varphi = 0$ או φ איזומורפיזם.

הגדרה 5.10 (סימון): אם (π, V) הצגה של חבורה G (או אם V הוא G־מודול) ואם $H \subseteq G$ (למשל $H = G$) אז

$$\begin{aligned} V^H &= \{v \in V \mid \pi(h) v = v \mid \forall h \in H\} \\ &= \{v \in V \mid h \cdot v = v \mid \forall h \in H\} \end{aligned}$$

הערה 5.11

1. V^H הוא H־שמור (טריוואלי).
2. אם $H \triangleleft G$ נורמלית בH אז V^H הוא G־שמור: כי

$$\begin{aligned} h(gv) &= gg^{-1}h(gv) \\ &= g\left(\underbrace{g^{-1}hg}_{\in H}\right)v \\ &= gv \end{aligned}$$

לכל $g \in G, h \in H$ ו $v \in V^H$.

3. $H_1 \subseteq H_2 \implies V^{H_1} \supseteq V^{H_2}$

5.2 תתי מודולים הנוצרים ע"י קבוצות

יהי V מודול (של חבורה G או אלגברה A). תהי $S \subseteq V$ תת קבוצה. חיתוך של כל תתי המודולים של V המכילים את S הוא תת־מודול המכיל את S, ונקרא תת המודול הנוצר ע"י S.

במקרה של חבורה G: מדובר במודול $\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{gs \mid g \in G, s \in S\}$.
במקרה של אלגברה A: $AS = \{\sum_{\text{finite}} a_i s_i \mid a_i \in A, s_i \in S\}$.

דוגמה V אי פריק אם ורק אם לכל $0 \neq v \in V$ מתקיים כי V נוצר ע"י v.

תת מנות (subquotient) אם V מודול (ביחס לחבורה G או לאלגברה A) ו $U \subseteq V$ תת־מודול, אז V/U הופך למודול הנקרא מודול מנה ע"י

$$g(v+U) = gv + U$$

אם $0 \subseteq U \subseteq W \subseteq V$ שני תתי־מודולים של V, אז W/U הוא מודול הנקרא תת מנה של V. W/U הוא מנה של תת המודול V. כמו כן, יש מודולי מנה W/U ו V/U ויש שיכון $W/U \hookrightarrow V/U$. נסתכל על שיכון כזה כהכלה ונקבל ש W/U הוא תת־מודול של המודול V/U.

למה 5.12 יהי $V \neq 0$ מודול (של חבורה או אלגברה).

1. אם V נוצר סופית אז יש לV מנה אי־פריקה.

2. תמיד יש לV תת מנה אי־פריקה.

הוכחה:

1. בעזרת הלמה של צורן. נניח שV נוצרת ע"י קבוצה סופית S. תהי $\{W_i\}_{i\in I}$ קבוצה סדורה היטב של תת־מודולים (ע"י הכלה) המקיימת $W_i \neq V$ (לכל $i \in I$). אז

$$W \ := \ \bigcup_{i\in I} W_i \neq V$$

כי אחרת $S \subseteq W$ סופית ואז קיים $i \in I$ עם $S \subseteq W_i$ ולכן $W_i = V$. סתירה. אז לכל שרשרת של תת־מודולים שאינם V יש חסם עליון ולכן יש איבר מקסימלי $W \subsetneqq V$ ומתקיים כי V/W מודול פשוט.

2. $V \neq 0$. ניקח $0 \neq v \in V$. יהי W המודול הנפרש ע"י v. אז W תת מודול של V. W נוצר סופית ולכן מהסעיף הקודם יש לW מנה אי־פריקה, וזוהי תת־מנה של V.

■

5.3 שרשראות ז'ורדן־הולדר

יהי V מודול (של חבורה או של אלגברה). יהיו נתונים תתי־מודולים

$$\begin{aligned} 0 &= K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_m = V \\ 0 &= L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n = V \end{aligned}$$

נסמן

$$\begin{aligned} &\binom{i=0,1,\ldots,n-1}{j=0,1,\ldots,m} \qquad A_{ij} = L_i + (L_{i+1} \cap K_j) \\ &\binom{i=0,1,\ldots,n}{j=0,1,\ldots,m-1} \qquad B_{ij} = K_j + (K_{j+1} \cap L_i) \end{aligned}$$

אז $A_{im} = L_{i+1}$ ובאופן דומה $B_{nj} = K_{j+1}$. נקבל סדרה של תתי־מודולים

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ A_{00} \subseteq \cdots \subseteq A_{0,m-1} \subseteq \underbrace{A_{0,m}}_{L_1} = A_{10} \subseteq \ldots \\ &\subseteq A_{1,m-1} \subseteq \underbrace{A_{1,m}}_{L_2} = A_{20} \subseteq \cdots \subseteq A_{n-1,m-1} \subseteq \underbrace{A_{n-1,m}}_{L_n} = V \\ 0 \ &= \ B_{00} \subseteq \cdots \subseteq B_{n-1,0} \subseteq \underbrace{B_{n,0}}_{K_1} = B_{01} \subseteq \ldots \\ &\subseteq B_{n-1,1} \subseteq \underbrace{B_{n,1}}_{K_2} = B_{02} \subseteq \cdots \subseteq B_{n-1,m-1} \subseteq \underbrace{B_{n,m-1}}_{K_m} = V \end{aligned}$$

למה 5.13 יש איזומורפיזמים של מודולים

$$\binom{i=0,1,\ldots,n-1}{j=0,1,\ldots,m-1} \qquad A_{i,j+1}/A_{i,j} \cong B_{i+1,j}/B_{i,j}$$

היוצרים התאמה חד־חד־ערכית ועל בין סדרות המנות של A לבין אלו של B כך שהמנות איזומורפיות.

הוכחה: נראה קיום איזומורפיזמים עבור $i = 0, \ldots, n-1$ ו $j = 0, \ldots, m-1$:

$$\begin{aligned}
\frac{L_{i+1} \cap K_{j+1}}{(L_i \cap K_{j+1}) + (L_{i+1} \cap K_j)} &\overset{f}{\cong} \frac{L_i + (L_{i+1} \cap K_{j+1})}{L_i + (L_{i+1} \cap K_j)} \\
&= \frac{A_{i,j+1}}{A_{i,j}} \\
\frac{L_{i+1} \cap K_{j+1}}{(L_i \cap K_{j+1}) + (L_{i+1} \cap K_j)} &\overset{g}{\cong} \frac{K_j + (K_{j+1} \cap L_{i+1})}{K_j + (K_{j+1} \cap L_i)} \\
&= \frac{B_{i+1,j}}{B_{i,j}}
\end{aligned}$$

כאשר f וg מתקבלות באופן הבא: יהיו U, N, M תתי־מודולים של מודול כלשהו עם $N \subseteq M$. אז יש איזומורפיזם

$$\frac{M}{M \cap (U+N)} \cong \frac{U+M}{U+N}$$

אם $N \subseteq M$ אז $M \cap (U+N) = (M \cap U) + N$. לכן קיבלנו

$$\frac{M}{M \cap (U+N)} = \frac{M}{M \cap U + N} \cong \frac{U+M}{U+N}$$

כדי לקבל את f בוחרים $M = L_{i+1} \cap K_{j+1}$, $U = L_i$ ו $N = L_{i+1} \cap K_j$ ומתקיים $N \subseteq M$ ו $M \cap U = L_i \cap K_{j+1}$ ולכן מקבלים את האיזומורפיזם הנדרש. באופן דומה מקבלים את g. ■

שרשראות

הגדרה 5.14 שרשרת באורך k היא סדרה של תתי־מודולים של V

$$0 = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \ \ldots \ \subsetneqq V_k = V$$

עידון של שרשרת זו מתקבל ע"י הוספת מספר תתי־מודולים מהצורה $V_i \subsetneqq V_{i+1} \leftarrow$ $V_i \subsetneqq W \subsetneqq V_{i+1}$ ושינוי המספור. בהנתן שרשרת נוספת באורך k

$$0 = U_0 \subsetneqq U_1 \subsetneqq \ \ldots \ \subsetneqq U_k = U$$

אומרים שהשרשראות שקולות אם יש תמורה

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, k-1\} \to \{1, 2, \ldots, k-1\}$$

כך ש

$$\frac{V_{i+1}}{V_i} \cong \frac{V_{\sigma(i+1)}}{V_{\sigma(i)}}$$

משפט 5.15 (ז'ורדן): לכל שתי שרשראות יש עידונים שקולים.

הוכחה: נובע מהלמה ומזריקת מודולים היוצרים מנות 0. ∎

הגדרה 5.16 שרשרת

$$0 = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \quad \ldots \quad \subsetneqq V_k = V$$

נקראת רוויה אם אין לה עידון שונה ממנה. כלומר אם V_{i+1}/V_i מודול פשוט לכל i.

מסקנה 5.17

1. תהי (א) $0 = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_k = V$ שרשרת רוויה באורך k ותהי (ב) שרשרת כלשהי באורך l. אז ל(ב) יש עידון איזומורפי ל(א) ובפרט $l \leq k$ וקיים שוויון אם ורק אם גם ב' רוויה.
2. לכל זוג שרשראות רוויות אורך זהה וסדרת מנות זהה עד כדי שקילות (כולל ריבויים). סדרת המנות של (א) היא V_{i+1}/V_i ($i = 0, 1, \ldots, k-1$).
3. אורך של מודול V מוגדר ע"י $l(0) = 0$, ואחרת $l(V)$ מוגדר להיות הסופרימום של אורכי השרשראות בV. $l(V)$ יכול להיות ∞.
4. $l(V) < \infty \iff$ קיימת שרשרת רוויה (או $V = 0$) ובמקרה זה $l(V)$ הוא האורך של כל שרשרת רוויה.
5. אם $U \subseteq V$ תת־מודול אז $l(U) \leq l(V)$ ואם $l(U) = l(V) < \infty$ אז $U = V$.
6. מנות ז'ורדן־הולדר, $\mathrm{JH}(V)$ הן המנות האי־פריקות

$$V_1 = V_1/V_0, V_2/V_1 \quad \ldots \quad V_k/V_{k-1} = V/V_{k-1}$$

בשרשרת רוויה (א). $\mathrm{JH}(V)$ מוגדר כאשר $l(V) < \infty$. הסדרה $\mathrm{JH}(V)$ מוגדרת באופן יחיד עד כדי שקילויות, כולל ריבויים.

סכומים ישרים אם I קבוצה ו $\{M_i \mid i \in I\}$ אוסף של G־מודולים כאשר G חבורה (או אלגברה A) אז כמרחבים וקטוריים:

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \quad = \quad \left\{ (m_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, m_i \in M_i \mid m_i = 0 \text{ for all } i \in I \text{ except for a finite number} \right\}$$

והופך לG מודול עם הפעולה

$$g \cdot (m_i)_{i \in I} \quad = \quad (g \cdot m_i)_{i \in I}$$

אם $M_i = M$ לכל $i \in I$, נסמן $M^I = \bigoplus_{i \in I} M$. במצב זה יש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים:

$$\mathrm{Hom}_G\left(M, M^I\right) \quad \cong \quad \left\{ (f_i)_{i \in I} \mid f_i \in \mathrm{Hom}_G(M, M) \right\}$$

כאשר בצד ימין כל ההעתקות פרט למספר סופי של העתקות הן העתקת האפס.

מסקנה 5.18

.1

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G\left(M, M^I\right) = \begin{cases} \infty & I \text{ or } \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G\left(M, M\right) \text{ are infinite} \\ |I| \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G\left(M, M\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. M^I נפרש ע"י התמונות $\mathrm{Im} f$ כאשר $f \in \mathrm{Hom}_G\left(M, M^I\right)$.

3. אם $U \ncong V$ אי־פריקים אז $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G\left(U^I, V^I\right) = 0$.

4. סימון: $M^I = 0 \iff I = \emptyset$.

5.4 מודולים פשוטים למחצה

הגדרה 5.19 מודול V פשוט למחצה אם $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ כאשר $V_i \subseteq V$ תת־מודול פשוט לכל $i \in I$ או אם $V = 0$.

למה 5.20 יהי V מודול ונניח ש $V = \sum_{i \in I} V_i$ כאשר לכל $i \in I$ מתקיים $V_i \subseteq V$ תת־מודול פשוט. אז לכל תת־מודול $M \subseteq V$ קיימת תת־קבוצה $I' \subseteq I$ כך ש $V = M \oplus \left(\bigoplus_{i \in I'} V_i\right)$ ובפרט ע"י לקיחת $M = 0$ נקבל $V = \bigoplus_{i \in I'} V_i$ עם $I' \subseteq I$ מתאים.

הוכחה: נשתמש בלמה של צורן. נסתכל על תת־קבוצות $J \subseteq I$ כך ש

$$M + \sum_{j \in J} V_j = M \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} V_j\right)$$

למשל, $J = \emptyset$. איחוד שרשרת עולה של Jים מקיים תנאי זה (?). לפי צורן, יש איבר מקסימלי J. נוכיח ש $V = M \oplus \left(\bigoplus_{j \in I} V_j\right)$. בדרך השלילה: אם הדבר לא נכון, קיים $i \in I$ כך ש $V_i \cap \left(M + \sum_{j \in J} V_j\right) = \{0\}$ ואז $i \notin J$ וניתן להוסיף את i לJ, בסתירה. ■

מסקנה 5.21

1. אם V סכום של תתי־מודולים פשוטים למחצה, אז V פשוט למחצה.

2. יהי $V = \sum_{i \in I} V_i$ כאשר כל $V_i \subseteq V$ פשוט.

(א) כל תת מנה של V איזומורפית למודול מהצורה $\bigoplus_{i \in I'} V_i$ (כאשר $I' \subseteq I$)

(ב) כל תת מנה של V איזומורפית לתת מודול של V ולמודול מנה של V

הוכחה: לפי הלמה, א' נכון למנות (כי $V/M \cong \bigoplus_{i \in I'} V_i$). כמו כן, כל תת מודול איזומורפי למנה (כי $M \cong V / \sum_{i \in I'} V_i$) ולכן א' נכון למנות ולתתי מודולים. יהיו $0 \subseteq W \subseteq U \subseteq V$ תתי־מודולים ו U/W תת־מנה. לפי א' לתתי־מודולים, $U \cong \bigoplus_{i \in I'} V_i$ (כאשר $I' \subseteq I$) ולפי א' למנות, $U/W \cong \bigoplus_{i \in I''} V_i$ (כאשר $I'' \subseteq I'$) ולכן א' נכון.

לגבי ב': א' מראה שכל תת־מנה איזומורפית לתת־מודול, וראינו לעיל שכל תת־מודול איזומורפי למנה. ■

טענה 5.22 יהי V מודול. התנאים הבאים שקולים:

1. V פשוט למחצה.
2. לכל תת־מודול $V \supseteq M$ יש משלים ישר, כלומר יש תת־מודול $V \supseteq N$ כך ש $V = M \oplus N$.

הוכחה: $1 \Longleftarrow 2$: מהלמה.

$2 \Longleftarrow 1$: ראשית נראה שכל תת־מודול $0 \neq M \subseteq V$ מכיל תת־מודול פשוט.

ובכן, ראינו שלM תת־מנה פשוטה: כלומר יש תתי־מודולים $0 \subseteq W \subseteq U \subseteq M$ עם U/W פשוט. יהי K משלים ישר של W בV, כלומר $V = W \oplus K$. מאחר ש $W \subseteq U$, נובע ש

$$U = W \oplus (U \cap K)$$

ולכן $U/W \cong U \cap K \subseteq U \subseteq M$ פשוט.

כעת נסמן ב $L \subseteq V$ את הסכום של כל תתי המודולים הפשוטים של V. אז L פשוט למחצה. נוכיח ש $L = V$ בדרך השלילה. אכן, לL יש משלים ישר $V = L \oplus L'$ עם $L' \neq 0$. L' מכיל תת־מודול פשוט של V - סתירה. ■

אורך סופי יהי V מודול, אז V פשוט למחצה ובעל אורך סופי אם ורק אם יש פירוק $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ כאשר $V_i \subseteq V$ מודול פשוט ובמקרה זה

$$l(V) = n$$
$$\mathrm{JH}(V) = \{V_1, \ldots, V_n\}$$

הוכחה: כיוון אחד טריוואלי. נניח $l(V) < \infty$ ותהי

$$0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ \ldots \ \subsetneq U_k = V$$

שרשרת רוויה.

אז כל U_i פשוט למחצה כתת־מודול ולכן יש $V_i \subseteq U_i$ כך ש $U_i = U_{i-1} \oplus V_i$ ואז

$$\begin{aligned} V &= U_k = U_{k-1} \oplus V_k = U_{k-2} \oplus V_{k-1} \oplus V_k = \ldots \\ &= V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \end{aligned}$$

■

5.5 מרכיבים איזוטופיים

הגדרה 5.23 יהי U מודול פשוט. מודול איזומורפי לU^I כאשר I קבוצה נקרא מודול איזוטופי (מטיפוס U).

הגדרה 5.24 (מרכיב איזוטופי): יהי V מודול, ולכל מודול פשוט V_ρ (המתאים להצגה (ρ, V_ρ)) נסמן:

$$V^\rho = \sum_{V_\rho \cong M \subseteq V} M = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_G(V_\rho, V)} \mathrm{Im} f$$

תכונות

1. קיימת קבוצה I כך ש $V^{\rho} \cong V_{\rho}^{I}$
2. אם $f: V \to W$ הומומורפיזם אז $f\left(V^{\rho}\right) \subseteq W^{\rho}$
3. אם V פשוט למחצה ו$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, אז $V^{\rho} = \sum_{V_i \cong V_{\rho}} V_i = \bigoplus_{V_i \cong V_{\rho}} V_i$ ולכן $V \cong \bigoplus_{\rho \in \Omega} V^{\rho}$ כאשר Ω קבוצת נציגים של מודולים פשוטים.
4. יהי $f: V \to W$ הומומורפיזם של מודולים כאשר V וW פשוטים למחצה. אז

$$f\left(V^{\rho}\right) \quad = \quad W^{\rho} \cap \mathrm{Im} f$$

הוכחה: $\subseteq$: נובע מ2.

$\supseteq$: נובע מ

$$f(V) \quad = \quad f\left(\sum_{\rho \in \Omega} V^{\rho}\right) = \sum_{\rho \in \Omega} f\left(V^{\rho}\right)$$

$$f\left(V^{\rho}\right) \quad \subseteq \quad W^{\rho}$$

ובנוסף מ

$$W \quad = \quad \bigoplus_{\rho \in \Omega} W^{\rho}$$

אכן, אם $x \in W^{\rho} \cap \mathrm{Im} f$ אז $x = \sum_{i=0}^{n} x_i$ כאשר $x_i \in f\left(V^{\rho_i}\right)$. נניח כי $\rho_0 = \rho$ ו $\rho_i \ncong \rho_0 \implies i \neq 0$. אז $x_i \in W^{\rho_i}$ (לכל i) ולכן מתוך $\sum_{i=0}^{n} x_i \in W^{\rho}$ נובע ש $x_i = 0$ לכל $i > 0$, כלומר $x = x_0 \in f\left(V^{\rho_0}\right) = f\left(V^{\rho}\right)$. ■

הערה 5.25 בפרט אם W פשוט למחצה ו $V \subseteq W$ תת־מודול, אז $V^{\rho} = W^{\rho} \cap V$. (נובע עם $f =$ הכלה $V \hookrightarrow W$)

5.6 משפט הצפיפות של יעקובסון (ביקומוטנט)

תהי (π, M) הצגה של אלגברה A (עם יחידה). אז M הופך לA מודול

$$(x \in M, a \in A) \qquad a \cdot x = (\pi(a))(x)$$

מסמנים את <u>הקומוטנט</u>:

$$\begin{aligned} C(A) &= \mathrm{Hom}_A(M, M) \\ &= \{\varphi: M \to M \mid \varphi(ax) = a\varphi(x)\, [\forall (x \in M, a \in A)]\} \end{aligned}$$

אז $C(A) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ תת־אלגברה של טרנספורמציות לינאריות, וM גם מודול מעל $C(A)$. לכן יש <u>ביקומוטנט</u>:

$$C(C(A)) \quad = \quad \{f: M \to M \mid f \text{ is a linear transformation} \mid f \text{ commutes with } C(A)\}$$

וברור ש $\pi(A) \subseteq C(C(A))$.

למה 5.26 נניח שM הוא A־מודול פשוט למחצה. אז לכל $\varphi \in C\left(C\left(A\right)\right)$ ו $x \in M$ יש $a \in A$ כך ש $\varphi\left(x\right) = a \cdot x$.

הוכחה: צריך להוכיח ש $\varphi\left(x\right) \subseteq Ax$. כעת $Ax \subseteq M$ תת־מודול. לכן יש משלים ישר

$$M = Ax \oplus N$$

($N \subseteq M$ תת־מודול)

תהי $P : M \to M$ ההטלה על Ax לאורך N: $\mathrm{Ker}P = N$, $\mathrm{Im}P = Ax$. אז $P \in \mathrm{Hom}_A\left(M, M\right)$, אבל $\mathrm{Hom}_A\left(M, M\right) = C\left(A\right)$. לכן $\varphi \in C\left(C\left(A\right)\right)$ מתחלפת עם P ו $x \in Ax$ ומתקיים

$$\varphi x = \varphi P x = P \varphi x \in \mathrm{Im}\varphi = Ax$$

■

משפט 5.27 תהי A אלגברה עם יחידה ונניח M כי הוא A־מודול פשוט למחצה. אז לכל $\varphi \in C\left(C\left(A\right)\right)$ ולכל $x_1, \ldots, x_n \in M$ קיים $a \in A$ כך ש

$$a \cdot x_i = \varphi\left(x_i\right) \qquad \left(i = 1, \ldots, n\right)$$

הוכחה: הוכחנו זאת בלמה עבור $n = 1$. M^n הוא A־מודול והוא פשוט למחצה:

$$M^n = \left(M, 0, \ldots, 0\right) \oplus \cdots \oplus \left(0, 0, \ldots, M\right)$$

כעת, ביחס לפירוק זה A פועלת באופן אלכסוני: אם $\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in M^n$ אז

$$a \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at_1 \\ \vdots \\ at_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

ולכן $C_{M^n}\left(A\right)$ מתואר ע"י מטריצות $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ ($\gamma_{ij} \in \mathrm{Hom}\left(M, M\right)$) המקיימות

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

ומכאן $C_{M^n}\left(A\right)$ מתואר ע"י מטריצה $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ $\gamma_{ij} \in C_M\left(A\right)$.

לכן $C_{M^n}\left(C_{M^n}\left(A\right)\right)$ נתון ע"י $f_{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi & & 0\\ & \ddots\\ 0 & & \varphi\end{pmatrix}$ עם $\varphi\in C_M\left(C_M\left(A\right)\right)$ (כי איבריו מתחלפים עם מטריצות מהצורה $E_{ij}=\begin{pmatrix} & 0 & 0\\ & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ & \vdots\\ & 0 & 0\end{pmatrix}$).

נסמן $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. לפי המקרה $n=1$, קיים $a\in A$ עם $ax=f_{\varphi}\left(x\right)$, כלומר

$$\begin{pmatrix}ax_1\\ \vdots\\ ax_n\end{pmatrix} = a\cdot x=f_{\varphi}\left(x\right)=\begin{pmatrix}\varphi\left(x_1\right)\\ \vdots\\ \varphi\left(x_n\right)\end{pmatrix}$$

■

מסקנה 5.28 באותם סימונים, אם $\dim_{\mathbb{C}}M<\infty$ אז $A=C\left(C\left(A\right)\right)$ (הכוונה באגף שמאל לפעולת A על M)

הוכחה: לוקחים בסיס לM ואז כל איבר ב$C\left(C\left(A\right)\right)$ מתואר ע"י פעולתו על הבסיס, ולפי המשפט קיים $a\in A$ המזיז את איברי הבסיס כמו האיבר ב$C\left(C\left(A\right)\right)$. ■

5.7 הצגות דואליות, מכפלות טנזוריות, Hom

יהי V מרחב וקטורי. נסמן $V^{*}=V'=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(V,\mathbb{C}\right)$. נסמן גם $f\left(v\right)=\left\langle f,v\right\rangle$ (כאשר $f\in V'$ ו $v\in V$).

אם V הוא G-מודול, אז V' הופך לG-מודול ע"י

$$\left\langle gf,v\right\rangle = \left\langle f,g^{-1}v\right\rangle$$

כלומר

$$\left(gf\right)\left(v\right) = f\left(g^{-1}v\right)$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\left\langle \left(g_1g_2\right)f,v\right\rangle &= \left\langle f,\left(g_1g_2\right)^{-1}v\right\rangle\\ &= \left\langle f,g_2^{-1}\left(g_1^{-1}v\right)\right\rangle\\ &= \left\langle g_2f,g_1^{-1}v\right\rangle\\ &= \left\langle g_1\left(g_2f\right),v\right\rangle\end{aligned}$$

הערה 5.29 יש שיכון של מרחבים וקטוריים $t : V \hookrightarrow V''$ ע"י

$$(tv)(f) = f(v) \qquad (f \in V', v \in V)$$

אם U_1, U_2 מודולים מעל G_1, G_2 (או מעל אלגבראות A_1, A_2) אז $U_1 \otimes U_2 = U_1 \otimes_{\mathbb{C}} U_2$ מודול מעל $G_1 \times G_2$ (או $A_1 \otimes A_2$) ע"י

$$(g_1, g_2)(u_1 \otimes u_2) = (g_1 u_1) \otimes (g_2 u_2)$$

הערה 5.30 נסמן ב $\Delta : G \to G \times G$ את ההעתקת האלכסון $g \mapsto (g, g)$. Δ הומומורפיזם ולכן אם U_1, U_2 הם G־מודולים אז $U_1 \otimes U_2$ הופך לG־מודול עם

$$g(u_1 \otimes u_2) = \Delta(g)(u_1 \otimes u_2) = (gu_1) \otimes (gu_2)$$

תכונה אם U_1, U_2 הם G_1, G_2 מודולים ו$H_2 \subseteq G_2$, $H_1 \subseteq G_1$ תתי־חבורות אז $U_1 \otimes U_2$ הוא $G_1 \times G_2$ מודול ומתקיים

$$(U_1 \otimes U_2)^{H_1 \times H_2} = U_1^{H_1} \otimes U_2^{H_2} \subseteq U_1 \otimes U_2$$

הערה 5.31 אם V, W מרחבים וקטוריים ו $W_1 \subseteq W$, $V_1 \subseteq V$ תתי־מרחב, נסתכל על ההעתקה החד־חד־ערכית

$$\begin{array}{rcl} V_1 \otimes W_1 & \to & V \otimes W \\ \alpha \otimes \beta & \mapsto & \alpha \otimes \beta \end{array}$$

כהכלה.

הוכחה: $\supseteq$: מיידי.
$\subseteq$: יהי $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \beta_i \in (V_1 \otimes V_2)^{H_1 \times H_2}$. נקח $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בת"ל ו $\beta_1, \ldots, \beta_n$ בת"ל. לכל $h_1 \in H_1$ נקבל

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (h_1 \alpha_i) \otimes \beta_i &= (h_1, 1_{G_2}) \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \beta_i \\ &= \underbrace{(h_1, 1_{G_2})}_{\in H_1 \times H_2} x = x \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \beta_i \end{aligned}$$

מאחר ש $\beta_1, \ldots, \beta_n$ בת"ל, נקבל כי $h_1 \cdot \alpha_i = \alpha_i$ (לכל i ולכל $h_1 \in H_1$). לכן $\alpha_i \in U_1^{H_1}$ (לכל i) ובאופן דומה מקבלים $\beta_i \in U_2^{H_2}$ (לכל i). ■

סימונים לכרקטרים אם (π,V) הצגה של G ו χ כרקטר של G (כלומר $(\chi,\mathbb{C})$ הצגה), נקח כמכפלה טנזורית $\mathbb{C}\otimes V=V$

$$B:(z,v)\mapsto zv$$

אז ההצגה $(\chi\otimes\pi,\mathbb{C}\otimes V)=(\chi\otimes\pi,V)$ נתונה ע"י

$$\begin{aligned}((\chi\otimes\pi)g)(v) &= ((\chi\otimes\pi)g)(1\otimes v)\\ &= \chi(g)1_{\mathbb{C}}\otimes\pi(g)v\\ &= \chi(g)\pi(g)v\end{aligned}$$

לכן מסמנים $\chi\pi=\chi\otimes\pi\approx\pi\otimes\chi=\pi\chi$.

תכונות אלגבריות

$$\begin{aligned}V_1\otimes V_2 &\cong V_2\otimes V_1\\ (V_1\oplus W_1)\otimes V_2 &= (V_1\otimes V_2)\oplus(W_1\otimes V_2)\end{aligned}$$

(למרחבים וקטוריים ולמודולים)

Hom ראשית עבור V_1,V_2 מרחבים וקטוריים יש הומומורפיזם חד־חד־ערכי:

$$\begin{aligned}\eta:V_1'\otimes V_2 &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1,V_2)\\ (\varphi\otimes v_2) &\mapsto [v_1\mapsto\varphi(v_1)v_2]\end{aligned}$$

נוכיח חד־חד־ערכיות: **הוכחה:** נניח $\mathrm{Ker}\eta\ni\alpha=\sum_{\mathrm{finite}}\varphi_i\otimes v_{2,i}\in V_1'\otimes V_2$ ו $\{v_{2,i}\}$ בת"ל. מתקיים

$$\eta(\alpha)(v_1) = \sum_{\mathrm{finite}}\varphi_i(v_1)v_{2,i}=0$$

לכל $v_1\in V_1$. מאי־תלות $\{v_{2,i}\}$ נקבל כי $\varphi_i(v_1)=0$ ולכל i ולכל v_1. לכן $\varphi_i\equiv 0$ $\Longleftarrow$ $\alpha=0$. ■

הערה 5.32 אם $\dim_{\mathbb{C}}V_2<\infty$ או $\dim_{\mathbb{C}}V_1<\infty$ אז η איזומורפיזם. (לפי חישוב מימדים או פירוק ומעבר למקרים $V_1=\mathbb{C}$ או $V_2=\mathbb{C}$)

כעת נניח שV_1 הוא G_1־מודול ו V_2 הוא G_2־מודול. אז $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1,V_2)$ הופך ל$G_1\times G_2$־מודול ע"י

$$(g_1,g_2)\varphi(v_1)=g_2\varphi\left(g_1^{-1}v_1\right)\qquad(g_i\in G_i,v_1\in V_1)$$

או

$$\langle(g_1,g_2)\varphi,v_1\rangle = g_2\left\langle\varphi,g_1^{-1}v_1\right\rangle$$

תכונה במצב זה η מורפיזם של $G_1 \times G_2$ מודולים. **הוכחה:** עבור $g_i \in G_i$ ו$v_2 \in V_2$ ו $\varphi \in V_1'$ נקבל

$$\begin{aligned}(\forall v_1 \in V_1)\, \eta\left(\left(g_1, g_2\right)\left(\varphi \otimes v_2\right)\right)\left(v_1\right) &= \eta\left(g_1 \varphi \otimes g_2 v_2\right)\left(v_1\right) \\ &= \left(g_1 \varphi\right)\left(v_1\right) \cdot \left(g_2 v_2\right) \\ &= \varphi\left(g_1^{-1} v_1\right)\left(g_2 v_2\right)\end{aligned}$$

מצד שני

$$\left(\eta\left(\varphi \otimes v_2\right)\right)\left(v_1\right) = \varphi\left(v_1\right) v_2$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left[\left(g_1, g_2\right)\left(\eta\left(\varphi \otimes v_2\right)\right)\right]\left(v_1\right) &= \left[g_2\left(\eta\left(\varphi \otimes v_2\right)\right)\right]\left(g_1^{-1} v_1\right) \\ &= g_2\left(\varphi\left(g_1^{-1} v_1\right) v_2\right) \\ &= \varphi\left(g_1^{-1} v_1\right)\left(g_2 v_2\right)\end{aligned}$$

■

בעזרת $\Delta : G \to G \times G$, אם V_1, V_2 הם G־מודולים, אז $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(V_1, V_2\right)$ הופך לG־מודול ע"י

$$(g\varphi)\left(v_1\right) = g\left(\varphi\left(g^{-1} v_1\right)\right)$$

ובמקרה זה

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(V_1, V_2\right)^G = \mathrm{Hom}_G\left(V_1, V_2\right)$$

5.8 הלמה של שור ומסקנות

הלמה של שור יהי M G־מודול אי־פריק עם $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$. אז $\mathrm{Hom}_G(M, M) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_M$. **הוכחה:** יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(M, M)$. יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי, אז $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_M$ לא הפיך. לכן $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_M = 0$ (מאי־פריקות M) $\iff \varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_M$. ■

ניסוח שקול תהיינה (π, V_π) ו(ρ, V_ρ) שתי הצגות אי־פריקות ובעלות מימד סופי של חבורה G. אם $\rho \cong \pi$ אז $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \rho) = 1$, ואם $\rho \ncong \pi$ אז $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \rho) = 0$.

הערה 5.33 יש משפט מקביל להצגות ממימד סופי של אלגבראות עם יחידה.

משפט ברנסייד תהי (π, V) הצגה אי־פריקה של אלגברה A (או חבורה G) כך ש $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$. אז $\pi(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} M$ (במקרה של חבורה: לכל $T : M \to M$ לינארית יש תיאור $T = \sum_{\text{finite}} z_i \pi\left(g_i\right)$ כאשר $g_i \in G$ ו$z_i \in \mathbb{C}$ - נובע ע"י מעבר להצגה של האלגברה $A = \mathbb{C}[G]$) **הוכחה:** לפי משפט הצפיפות $\pi(A) = C(C(\pi(A)))$. לפי שור, $C(\pi(A)) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_M$. לכן $C(C(\pi(A))) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} M$. ■

על מכפלות טנזוריות

משפט 5.34 יהיו M,N שני מודולים פשוטים מעל חבורות G_1,G_2 עם $\dim_{\mathbb{C}} M, \dim_{\mathbb{C}} N < \infty$, אז $M\otimes N$ הוא $G_1\times G_2$ מודול פשוט.

הוכחה: די להוכיח שכל איבר $0\neq x\in M\otimes N$ יוצר את $M\otimes N$ כ$G_1\times G_2$ מודול. נסמן

$$0\neq x \;=\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\otimes\beta_i$$

כך שהαים והβים בת"ל. יהיו $n\in N$, $m\in M$ איברים כלשהם. תהיינה $S:N\to N$ ו $T:M\to M$ העתקות לינאריות כך ש

$$\begin{array}{ll} T\alpha_1=m & T\alpha_2=T\alpha_3=\cdots=T\alpha_n=0\\ T\beta_1=n & S\beta_2=S\beta_3=\cdots=S\beta_n=0\end{array}$$

אז $(T\otimes S)(x)=m\otimes n$.
לפי משפט ברנסייד יש תיאורים

$$\begin{aligned} Ty &= \sum_j z_j g_{1,j}y\\ Sz &= \sum_h z'_h g_{2,j}z\end{aligned}$$

($g_{1,j}\in G_1, g_{2,h}\in G_2$, $z_j,z'_h\in\mathbb{C}$) לכל $y\in M$ ו $z\in N$.
מכאן

$$\begin{aligned} m\otimes n &= (T\otimes S)\,x\\ &= \sum_{j,h} z_j z'_h\left(g_{1,j}\otimes g_{2,h}\right)x\end{aligned}$$

ואגף ימין נמצא ב $G_1\times G_2$־תת־מודול של $M\otimes N$ הנפרש ע"י x. ■

הערה 5.35 אם $M,N\neq 0$ ואחד מהם פריק, אז $M\otimes N$ פריק.

הערה 5.36 עם אותה הוכחה, יש ניסוח לאלגבראות: אם M,N מודולים פשוטים ביחס לאלגברה עם יחידה A_1,A_2, אז $M\otimes N$ הוא $A_1\otimes A_2$־מודול פשוט.

מסקנה 5.37 קיבלנו העתקה

$$\begin{aligned} &\{\text{Simple finite dimensional } A_1\text{-modules}\}\times\\ &\quad\{\text{Simple finite dimensional } A_2\text{-modules}\} \;\to\; \{\text{Simple finite dimensional } A_1\otimes A_2\text{-modules}\}\\ &\qquad (M,N) \;\mapsto\; M\otimes N\end{aligned}$$

כאשר המודולים בקבוצות הן עד כדי שקילות.

משפט 5.38 העתקה זו חד־חד־ערכית ועל.

הוכחה:

חד־חד־ערכיות: נראה $M\otimes N$ קובע את M עד כדי שקילות. יהיו $y_1,\ldots,y_n$ בסיס של N מעל $\mathbb{C}$. אז יש פירוק של מרחבים וקטוריים:

$$M\otimes N = \bigoplus_{i=1}^{n} M\otimes y_i$$

הערה 5.39 $M\otimes N$ הוא A_1־מודול עם

$$\begin{aligned} a_1(m\otimes n) &= (a_1\otimes 1)(m\otimes n) \\ &= a_1 m\otimes n \end{aligned}$$

כA_1 מודולים מתקיים $M\otimes y_i\cong M$ לכן כA_1־מודולים $M\otimes N\cong M^n$. כלומר, המרכיב הM איזוטופי של $M\otimes N$ כA_1־מודול הוא M^n ולכן שאר המרכיבים האיזוטופיים הם 0. לכן M נקבע באופן יחיד.

על: יהי L מודול פשוט מעל $A_1\otimes A_2$ עם $\dim_{\mathbb{C}} L<\infty$. ראשית, L גם A_1־מודול (ע"י $a_1\mapsto a_1\otimes 1$). מאחר ו $\dim_{\mathbb{C}} L<\infty$, יש ל$L$ תת A_1־מודול פשוט M.

אז המרכיב האיזוטופי L^M של L מטיפוס M שונה מ0. אבל איברי A_2 פועלים על L כאיברים ב $\mathrm{Hom}_{A_1}(L,L)$. מאחר וM A_1־פשוט, איברי A_2 פועלים עליו בצורה טריוואלית או בצורה איזומורפית, ולכן איברי A_2 מעבירים את M לA_1־תת־מודול האיזומורפי לM, ולכן L^M נשמר גם ע"י פעולת A_2. לכן, $0\neq L^M\subseteq L$ הוא תת־$A_1\otimes A_2$ מודול ולכן (מאחר וL מודול פשוט) $L=L^M\cong M^{n_1}$ (כA_1 מודולים). באופן דומה, יש A_2־תת־מודול פשוט N כך ש $L=L^N\cong N^{n_2}$ (כA_2 מודולים).

נראה שקיים $A_1\otimes A_2$ הומומורפיזם $M\otimes N\to L$ שונה מאפס (ואז הוא איזומורפיזם כי $M\otimes N$ פשוט). ראשית קיימים A_1 מודול V_1 וA_2 מודול V_2 ו $A_1\otimes A_2$ הומומורפיזם $0\neq\varphi: V_1\otimes V_2\to L$. למשל, נקח כל איבר $0\neq l\in L$. נקח $V_1=A_1$ (A_1 מודול משמאל), $V_2=A_2$ (A_2 מודול מימין) ונקח

$$\begin{aligned} A_1\otimes A_2 &\longrightarrow L \\ a_1\otimes a_2 &\mapsto (a_1\otimes a_2)\,l \end{aligned}$$

דוגמה זו מראה שניתן לקחת V_1,V_2 ציקליים נוצרים ע"י איבר אחד $V_1=A_1v_1$,$V_2=A_2v_2$ ו $l=\varphi(v_1\otimes v_2)\neq 0$.

כעת יש טרנספורמציה לינארית $f: V_1\to L$ ע"י $x\mapsto\varphi(x\otimes v_2)$ וזהו הומומורפיזם של A_1־מודולים. נסמן $K_1=\mathrm{Ker}f$. אז $K_1\subsetneqq V_1$ (שונה ממש כי $v_1\notin K_1$) תת A_1־מודול ומתקיים

$$\begin{aligned} \varphi(K_1\otimes V_2) &= \varphi(K_1\otimes(A_2v_2)) \\ &= (1_{A_1}\otimes A_2)\,\varphi(K_1\otimes v_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ולכן גם לφ יש פקטוריזציה

$$V_1\otimes V_2\to(V_1/K_1)\otimes V_2 \quad\to\quad L$$

ולכן אפשר להניח מראש שf חד־חד־ערכית.

באותה צורה אפשר להניח מראש ש $g: V_2 \to L$ המוגדרת ע"י $y \mapsto \varphi(v_1 \otimes y)$ גם חד־חד־ערכית וg הומומורפיזם של A_2־מודולים.

המסקנה היא שV_1 כA_1־מודול איזומורפי לתת־A_1־מודול של $L \cong M^{n_1}$ (איזומורפיזם של A_1 מודולים).

לכן $V_1 \cong M^{k_1}$ כA_1־מודולים ($k_1 < \infty$) ו $V_2 \cong N^{k_2}$ כA_2־מודולים ($k_2 < \infty$). הראינו

$$\mathrm{Hom}_{A_1 \otimes A_2}\left(M^{k_1} \otimes N^{k_2}, L\right) \neq 0$$

ולכן

$$\mathrm{Hom}_{A_1 \otimes A_2}\left(M \otimes N, L\right) \neq 0$$

$M \otimes N$ וL אי־פריקים, ולכן איזומורפיים. ∎

תתי חבורות מאינדקס סופי

טענה 5.40 יהי V G־מודול ו $H \leq G$ תת־חבורה עם $(G:H) < \infty$. אם V הוא H־מודול פשוט למחצה, אז V הוא G־מודול פשוט למחצה.

הערה 5.41 (מקרה פרטי): אם G סופית, נקח $H = 1$. נובע שV פשוט למחצה (משפט משקה).

הוכחה: יהי $G = \dot\bigcup_{i=1}^{n} g_i H$ פירוק לקוסטים. יהי $U \subseteq V$ תת־מרחב G־שמור. בעזרת משלים H־שמור, נקבל הטלה $P: V \to V$ על U, שהינה H מורפיזם. נסמן

$$Q = \frac{1}{(G:H)} \sum_i g_i P g_i^{-1}$$

תכונות Q

1. אם $u \in U$ אז $g_i^{-1} u \in U$ ולכן $P g_i^{-1} u = g_i^{-1} u$ ולכן $g_i P g_i^{-1} u = u$ ולכן $Qu = u$.
2. $\mathrm{Im} Q \subseteq U$ כי $\mathrm{Im}(g_i P) = g_i U = U$. לכן Q גם הטלה של U. נראה שQ הוא G־מורפיזם: יהי $\sigma \in G$. לכל i יש $h_i \in H$ כך ש $\sigma^{-1} g_i = g_{j(i)} h_i$, כאשר j תמורה

של $\{1,\ldots,n\}$. כלומר $g_i^{-1}\sigma = h_i^{-1}g_{j(i)}^{-1}$ ולבסוף

$$\begin{aligned}
Q\sigma &= \frac{1}{(G:H)}\sum_i g_iPg_i^{-1}\sigma \\
&= \frac{1}{(G:H)}\sum_i g_iPh_i^{-1}g_{j(i)}^{-1} \\
&= \frac{1}{(G:H)}\sum_i g_ih_i^{-1}Pg_{j(i)}^{-1} \\
&= \frac{1}{(G:H)}\sum_i \sigma g_{j(i)}Pg_{j(i)}^{-1} \\
&= \sigma\frac{1}{(G:H)}\sum_i g_{j(i)}Pg_{j(i)}^{-1} \\
&= \sigma Q
\end{aligned}$$

הגרעין של Q הוא תת־מרחב משלים G־שמור, כנדרש.

■

טענה 5.42 יהי V G־מודול, $H \triangleleft G$ תת־חבורה נורמלית עם $(G:H) < \infty$. אם V הוא G־מודול אי־פריק אז V הוא H פשוט למחצה באורך $\geq (G:H)$.

מסקנה 5.43 אם V הוא G־פשוט למחצה אז הוא H־פשוט למחצה.

הוכחה: ראשית נשים לב שכל $g \in G$ שולח תת H־מודול $U \subseteq V$ לתת H־מודול: כי

$$H(gU) = gHU = gU$$

כעת נסמן קוסטים

$$n = (G:H) \qquad G = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} s_iH = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} Hs_i$$

מתקיים שV נוצר סופית כH־מודול: אכן, יהי $0 \neq v \in V$. אז מאחר וV אי־פריק

$$\begin{aligned}
V &= \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{gv \mid g \in G\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{hs_iv \mid h \in H\}
\end{aligned}$$

ולכן V נוצר כH־מודול ע"י $\{s_iv\}$. מאחר שV נוצר סופית כH־מודול, יש לV תת־H־מודול מקסימלי $U \subsetneqq V$. נסמן $U_i = s_iU$ $(i = 1,\ldots,n)$. אז כל $U_i \subsetneqq V$ הוא תת־H־מודול מקסימלי.

לכן כל V/U_i הוא H־מודול פשוט ו $W = \bigoplus_{i=1}^n V/U_i$ הוא H מודול פשוט למחצה באורך n. נשים לב ש $\bigcap_{i=1}^n U_i = 0$. אכן:

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^n U_i &= \bigcap_{i=1}^n s_i U \\ &= \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{h\in H} s_i h U \\ &= \bigcap_{g\in G} gU\end{aligned}$$

לכן $\bigcap_{i=1}^n U_i$ הוא תת־G־מודול ושונה מV כי $V \subsetneq U_1$. לבסוף נקבל H־מורפיזם חד־חד־ערכי

$$\pi : V \to \bigoplus_{i=1}^n V/U_i$$

■

מסקנה 5.44 תהי $G \supseteq H$ עם $(G:H) < \infty$. אז לכל G־מודול V מתקיים: V הוא H פשוט למחצה $\iff$ V הוא G פשוט למחצה.

הוכחה: H מאינדקס סופי ולכן V הוא H פשוט למחצה $\Longleftarrow$ V הוא G פשוט למחצה.
נניח כי V הוא G־פשוט למחצה. H מאינדקס סופי לכן יש $H \leq \Gamma$ כך ש $\Gamma \triangleright G$ וΓ מאינדקס סופי. מהמשפט, G הוא Γ־פשוט למחצה אבל מהמשפט הקודם (מאחר ו$(H:\Gamma) < \infty$) נובע גם כי V הוא H־פשוט למחצה. ■

אלגבראות עם יחידה בעלות מימד בן מניה

.1

- קבוצה J בת מניה אם J סופית או $|J| = \aleph_0$ או $J = \emptyset$.
- $\mathbb{C}$ איננו קבוצה בת מניה.
- לכל מרחב וקטורי יש בסיס לפי צורן.

2. מרחב וקטורי V נקרא ממימד בן־מניה אם יש לו סדרה $\{v_1, v_2, \dots\}$ בV פורשת (סופית או אינסופית או ריקה).

תכונה אם V בן מניה אז כל תת־קבוצה (סדורה) ב$V \supseteq \{u_j \mid j \in J\}$ שהיא בת"ל, מקיימת שJ בת מניה. **הוכחה:** בסימונים לעיל, נסמן

$$J_n = \{j \in J \mid u_j \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}\} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

אז $|J_n| \leq n$, $J = \bigcup_n J_n$ ולכן J בת מניה. ■

מסקנה 5.45

1. V מרחב וקטורי בן־מניה אם ורק אם יש לו בסיס בן מניה.
2. אם V מרחב וקטורי בן־מניה אז כל תת־מרחב $U\subseteq V$ גם בן־מניה (לוקחים בסיס לU והוא בת"ל).

אלגברה ממימד בן מניה בהמשך, כל אלגברה היא עם יחידה $\neq 0$, ואם A אלגברה וM הוא A־מודול, גם נניח ש $1_A v=v$ (לכל $v\in M$).
אם $p\left(x\right)=c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1 x+c_0\in\mathbb{C}\left[x\right]$ פולינום, ו$a\in A$, נסמן

$$p\left(a\right) = c_n a^n+\cdots+c_1 a+c_0 1_A=0$$

ברור ש $A\to\mathbb{C}\left[x\right]$ ע"י $p\mapsto p\left(a\right)$ הומומורפיזם של אלגבראות (לכל $a\in A$ נתון).

למה 5.46 תהי A אלגברה ממימד בן־מניה. אם $a\in A$ מקיים ש $a-z\cdot 1_A$ הפיך משמאל לכל $0\neq z\in\mathbb{C}$, אז a נילפוטנטי, כלומר קיים $k\geq 1$ כך ש $a^k=0$.

הוכחה: הקבוצה הסדורה $\left\{\underbrace{\left(a-z\cdot 1_A\right)^{-1}}_{\text{left inverse}}\mid 0\neq z\in\mathbb{C}\right\}$ תלויה לינארית. לכן קיימים $0\neq z_j\in\mathbb{C}$ ו $0\neq c_j\in\mathbb{C}$ כך ש

$$\sum_{j=1}^{n}c_j\left(a-z_j\cdot 1_A\right)^{-1} = 0$$

נסמן פולינום

$$p\left(x\right) = \sum_{j=1}^{n}c_j\left(x-z_1\right)\cdot\cdots\cdot\widehat{\left(x-z_j\right)}\cdot\cdots\cdot\left(x-z_n\right)$$

ע"י הכפלת $\sum_{j=1}^{n}c_j\left(a-z_j\cdot 1_A\right)^{-1}=0$ ב $\left(a-z_1\cdot 1_A\right)\cdot\cdots\cdot\left(a-z_n\cdot 1_A\right)$ מימין נובע ש $p\left(a\right)=0$.
הוכחה: כמו כן, $p\neq 0$ כי למשל $p\left(z_1\right)=\prod_{j=2}^{n}\left(z_1-z_j\right)\neq 0$. נפרק

$$p\left(x\right) = c\left(\prod_{i=1}^{l}\left(x-\lambda_i\right)\right)x^k$$

עם $c\neq 0\in\mathbb{C}$, $0\neq\lambda_i\in\mathbb{C}$. אז

$$p\left(a\right) = c\left(\prod_{i=1}^{l}\left(a-\lambda_i\cdot 1_A\right)\right)a^k=0$$

ע"י הכפלה משמאל ב $c^{-1}\left(a-\chi_l 1_A\right)^{-1}\cdot\cdots\cdot\left(a-\chi_1 1_A\right)^{-1}$ נקבל כי $a^k=0$. לבסוף $k\geq 1$, כי אחרת נקבל $a^0=1_A=0$. סתירה. ■

■

מסקנה 5.47 תהי A אלגברה בת מניה.

1. לכל $a \in A$ קיים $z \in \mathbb{C}$ כך ש $a - z \cdot 1_A$ אינו הפיך.

הוכחה: אחרת נובע שיש $k \geq 1$ כך ש$a^k = 0$ ואז $a - 0 \cdot 1_A = a$ אינו הפיך. ■

2. אם בנוסף נתון שA אלגברה עם חילוק, כלומר ל$0 \neq a \in A$ מתקיים כי a הפיך, אז $A = \mathbb{C} \cdot 1_A$, ואז $A \cong \mathbb{C}$ (איזומורפיזם של אלגבראות) ובפרט $\dim_{\mathbb{C}} A = 1$.

הוכחה: לכל $a \in A$ נקח $z \in \mathbb{C}$ כך ש $a - z \cdot 1_A$ אינו הפיך, ואז $a - z \cdot 1_A = 0$. ■

הלמה של שור יהי V A־מודול פשוט (A אלגברה עם יחידה)

הערה 5.48

1. $\mathrm{End}_A V = \mathrm{Hom}_A(V, V)$ אלגברה עם חילוק. (כי V פשוט לכן לכל אנדומורפיזם יש גרעין שהוא כל המרחב או אפס)

2. אם A ממימד בן־מניה אז V ממימד בן־מניה. (כי לכל $0 \neq v \in V$ מתקיים $V = Av$)

למה של שור יהי V מודול פשוט מעל אלגברה A ונניח שV מרחב וקטורי בן־מניה. אז לכל $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(V, V)$ יש $z \in \mathbb{C}$ כך ש $\varphi = z \cdot \mathrm{id}_V$. **הוכחה:** יהי $0 \neq v \in V$. מאחר ש $V = Av$, נובע שכל $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(V, V)$ נקבע אופן יחיד ע"י הערך $\varphi(v)$ (כי $\varphi\left(\sum a_i v\right) = \sum a_i \varphi(v)$). לכן הטרנספורמציה הלינארית

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(V, V) &\to V \\ \varphi &\mapsto \varphi(v) \end{aligned}$$

חד־חד־ערכית. לכן $\mathrm{Hom}_A(V, V)$ אלגברה עם חילוק (לפי ההערה) בעלת מימד בן־מנייה (לפי ההערה כי V ממימד בן מנייה, ו$\mathrm{Hom}_A(V, V)$ לתת מרחב של V). לכן $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_A(V, V) = 1$, ולכן $\mathrm{Hom}_A(V, V) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_V$. ■

מסקנה 5.49

1. באותם תנאים נובע $C(C(A)) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ (?) ולכן ממשפט הצפיפות נובע שכל טרנספורמציה לינארית $T : V \to V$ ולכל $v_1, \ldots, v_n \in V$ יש $a \in A$ כך ש $a v_i = T(v_i)$ ($i = 1, \ldots, n$).

2. <u>מכפלות טנזוריות:</u> יהיו U, V מודולים פשוטים מעל אלגבראות A, B ונניח שU מרחב וקטורי בן־מניה. אז $U \otimes V$ מודול פשוט מעל $A \otimes B$.

הוכחה: יהי $0 \neq w = \sum u_i \otimes v_i \in U \otimes V$ כלשהו. אפשר להניח ש $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל ו $v_1 \neq 0$. יהיו $u \in U$ ו $v \in V$ כלשהם. מאחר שV פשוט ו$v_1 \neq 0$, יש $b \in B$ כך ש $b v_1 = v$ (כי $V = B v_1$).

תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית כך ש

$$\begin{aligned} T(u_1) &= u \\ T(u_2) &= \ldots = T(u_n) = 0 \end{aligned}$$

ממשפט הצפיפות נובע שקיים $a \in A$ עם $a \cdot u_1 = u_1$, $a \cdot u_2 = \cdots = a \cdot u_n = 0$.
ואז

$$\begin{aligned}(a \otimes b) w &= (a \otimes b) \left(\sum u_i \otimes v_i \right) \\ &= \left(\sum a u_i \otimes b v_i \right) \\ &= u \otimes v\end{aligned}$$

מכאן הראנו ש $U \otimes V = (A \otimes B) w$ לכל $0 \neq w \in U \otimes V$. ■

שלמות

טענה 5.50 תהי A אלגברה בת־מניה. אז לכל $a \in A$ שאינו נילפוטנטי קיימת הצגה (π, V) אי־פריקה, כך ש $\pi(a) \neq 0$.

הוכחה: לפי הלמה קיים $0 \neq z \in \mathbb{C}$ כך ש $a - z \cdot 1_A$ אינו הפיך משמאל. לכן $A(a - z \cdot 1_A)$ אידאל משמאל של A שאינו מכיל את 1.

בעזרת הלמה של צורן מסיקים שקיים אידאל $I \subseteq A$ משמאל מקסימלי ביחס לתכונות: $I \supseteq A(a - z \cdot 1_A)$, $1_A \notin I$.

בפרט $a - z \cdot 1_A \in I$. נסמן $N = A/I$. אז N הוא A־מודול משמאל וN A־מודול פשוט. (אחרת הייתה סתירה למקסימליות)

בN מתקיים $1_A + I \neq 0_N$ (כי $1_A \notin I$). נסמן את ההצגה של A על N בπ:

$$\pi(\alpha)(x + I) = \alpha \cdot x + I \qquad (x \in A, \alpha \in A)$$

אז

$$\begin{aligned}\pi(a)(1_A + I) &= a + I \\ \underbrace{}_{a - z \cdot 1_A \in I} &= z \cdot 1_A + I \\ \underbrace{}_{\text{multiplication in } N} &= z(1_A + I) \neq 0\end{aligned}$$

כאשר $z(1_A + I) \neq 0$ כי אחרת $z(1_A + I) = 0$ ומכאן נקבל כי $1_A + I = 0$, בסתירה.
מכאן $\pi(a) \neq 0$, כנדרש. ■

כרקטרים של הצגות סופיות של אלגבראות

הכללה של ברנסייד תהי A אלגברה עם יחידה, $\{(\pi_i, V_{\pi_i})\}_{i=1}^n$ הצגות אי־פריקות עם $\dim_{\mathbb{C}} V_i < \infty$ (לכל i). נניח כי $\pi_j \not\approx \pi_i$ ל $i \neq j$. אז

$$\{(\pi_1(a), \ldots, \pi_n(a)) \mid a \in A\} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V_{\pi_1} \times \cdots \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V_{\pi_n}$$

הוכחה: נסתכל על ההצגה

$$(\pi, V) = \bigoplus_{i=1}^{n} (\pi_i, V_{\pi_i})$$

הצגה זו פשוטה למחצה. בפירוק $V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_{\pi_i}$ נקבל תיאור מטריציוני

$$\pi\left(a\right)=\begin{pmatrix}\pi_1\left(a\right) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \pi_n\left(a\right)\end{pmatrix}\qquad\left(a\in A\right)$$

ממשפט הצפיפות (וסוף מימדיות) $\pi\left(A\right)=C\left(C\left(A\right)\right)$. תהי $C=\left(C_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}\in C\left(\pi\left(A\right)\right)$.
מאחר שC מתחלפת עם כל $\pi\left(a\right)$ נובע ש $C_{ij}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(V_{\pi_j},V_{\pi_i}\right)$ מקיימים $\pi_i\left(a\right)C_{ij}=C_{ij}\pi_j\left(a\right)$, כלומר $C_{ij}\in\mathrm{Hom}_{A}\left(V_{\pi_j},V_{\pi_i}\right)$, ולכן $C_{ij}=0$ ל$i\neq j$ (כי ההצגות אינן שקולות) וקיים $\lambda_i\in\mathbb{C}$ עם $C_{ii}=\lambda_i I_{V_{\pi_i}}$. כלומר

$$C=\begin{pmatrix}\lambda_1 I & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n I\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\pi\left(A\right)=C\left(C\left(A\right)\right)=\begin{pmatrix}\mathrm{End}_{\mathbb{C}}V_{\pi_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}V_{\pi_n}\end{pmatrix}$$

(כי אלו בדיוק האיברים שמתחלפים עם כל המטריצות האלכסוניות כנ"ל) ■

כרקטר של הצגה של אלגברה תהי $\left(\pi,V\right)$ הצגה של אלגברה A עם $\dim_{\mathbb{C}}V<\infty$. אז מוגדרת פונקציית כרקטר

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\pi:A &\to \mathbb{C}\\ a &\mapsto \mathrm{tr}\left(\pi\left(a\right)\right)\end{aligned}$$

והיא לינארית.

טענה 5.51 אם $\left\{\left(\pi_i,V_{\pi_i}\right)\right\}_{i=1}^{n}$ הצגות אי־פריקות של A ממימד סופי, כך ש $\pi_i\not\approx\pi_j$ ל$i\neq j$ אז פונקציות הכרקטר $\left\{\mathrm{tr}\pi_i:A\to\mathbb{C}\right\}_{i=1}^{n}$ בת"ל.

הוכחה: תהי תלות $\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{tr}\pi_i=0$. יהי $1\leq i_0\leq n$ כלשהו. יש $a\in A$ עם $\pi_i\left(a\right)=\begin{cases}0 & i\neq i_0\\ \mathrm{id}_{V_{\pi_i}} & i=i_0\end{cases}$ ואז

$$0=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{tr}\pi_i\left(a\right)=c_{i_0}\cdot\mathrm{tr}\left(\mathrm{id}_{V_{\pi_{i_0}}}\left(a\right)\right)=c_{i_0}\cdot\dim_{\mathbb{C}}V_{\pi_{i_0}}$$

ולכן $c_{i_0}=0$. ■

6 חבורות טופולוגיות, מנות ומרחבי G

הגדרה 6.1 חבורה טופולוגית היא קבוצה G עם מבנה של חבורה ומבנה של מרחב טופולוגי האוסדורף כך שפונקציית ההופכי והכפל

$$\begin{aligned} \mathrm{inv}: G \to G \qquad & g \mapsto g^{-1} \\ \cdot : G \times G \to G \qquad & (x,y) \mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

רציפות.

מורפיזם $f: G_1 \to G_2$ של חבורות טופולוגיות הוא פונקציה רציפה שהיא גם הומומורפיזם של חבורות.

אם f הומיאומורפיזם אז גם f^{-1} מורפיזם וf איזומורפיזם, ואומרים שG_1 וG_2 איזומורפיות.

הגדרה 6.2 תהי G חבורה טופולוגית. X מרחב טופולוגי האוסדורף. X הוא G־מרחב (או "G פועלת על X") אם קיימת פונקציה רציפה:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g,x) & \mapsto & gx \end{array}$$

כך ש $1_G \cdot x = x$, $g_1 (g_2 x) = (g_1 g_2) x$. (כאשר $g_1, g_2 \in G$ ו $x \in X$)

G־מורפיזם של מרחבי G הוא פונקציה רציפה $f: X \to Y$ כך ש $f(gx) = gf(x)$ ($x \in X$, $g \in G$). אם f הומיאומורפיזם, אז $f^{-1}: Y \to X$ גם G־מורפיזם וX, Y איזומורפיים.

הערה 6.3 אם X הוא G־מרחב אז לכל $g \in G$ הפונקציה

$$\begin{array}{ccc} (g\cdot): X & \to & X \\ x & \mapsto & gx \end{array}$$

הומיאומורפיזם של X עם הופכית $(g^{-1}\cdot)$.

דוגמאות תהי G חבורה טופולוגית ויהי $g \in G$.

1. הזזות משמאל

$$\begin{array}{ccc} \lambda(g): G & \to & G \\ x & \mapsto & gx \end{array}$$

2. הזזות מימין

$$\begin{array}{ccc} \rho(g): G & \to & G \\ x & \mapsto & xg^{-1} \end{array}$$

3. הצמדות

$$\begin{aligned} c_g : G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

4. לכל $g_1, g_2 \in G \times G$ נגדיר

$$\begin{aligned} G &\to G \\ x &\mapsto g_1 x g_2^{-1} \end{aligned}$$

ואז G הופך $G \times G$ מרחב.

מסלולים ומייצבים יהי X מרחב־G. לכל $x \in X$ המסלול של x הוא

$$Gx = \mathrm{Orb}\,(x) = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$$

X הוא איחוד זר של כל המסלולים, לכל $g \in G$, $g\cdot : X \to X$ שומר את המסלולים ומהווה הומיאומורפיזם של כל מסלול.

עבור $x_1, x_2 \in X$: x_1, x_2 באותו מסלול $\iff$ קיים $g \in G$ כך ש $gx_1 = x_2$.

הערה 6.4 מסלול הוא פתוח $\iff$ הוא מכיל קבוצה פתוחה.

הגדרה 6.5 (מינוח): אם יש מסלול יחיד, אומרים שX מרחב <u>G־הומוגני</u> ואומרים שG <u>פועלת טרנזיטיבית</u> על X.

<u>בפרט,</u> כל מסלול הופך למרחב־G הומוגני (עם הטופולוגיה המושרית).

הגדרה 6.6 (מייצב): לכל $x \in X$ מסמנים

$$\mathrm{Stab}_G x = \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$$

תכונות

1. $\mathrm{Stab}_G x \subseteq G$ תת־חבורה סגורה.
2. יש התאמה חד־חד־ערכית ועל

$$\begin{aligned} \underbrace{G/\mathrm{Stab}_G x}_{\text{Quotient set}} &\to \mathrm{Orb} x \\ g\mathrm{Stab}_G x &\mapsto gx \end{aligned}$$

מרחבי מנה תהי G חבורה טופולגית. $H \subseteq G$ תת־חבורה סגורה. מוגדרת קבוצת מנה והעתקה על

$$\begin{aligned} q : G &\to G/H \\ g &\mapsto gH \end{aligned}$$

ניתן לG/H את טופולוגיית המנה, כלומר $A \subseteq G/H$ פתוחה $\iff$ $q^{-1}(A) \subseteq G$ פתוחה.

הערה 6.7 תת־קבוצה $B \subseteq G$ נקראת רוויה אם

$$B = BH = \{bh \mid b \in B, h \in H\}$$

אוסף הקבוצות הרוויות בG הוא בדיוק אוסף התמונות ההפוכות $q^{-1}(\text{something})$.

מסקנה 6.8 תת הקבוצות הפתוחות של G/H הן בדיוק התמונות של הקבוצות הפתוחות הרוויות בG.

טענה 6.9 G/H האוסדורף ו $q : G \to G/H$ פתוחה.

הוכחה: אכן, אם $\mathcal{O} \subseteq G$ פתוחה אז $\mathcal{O}h$ פתוחה לכל $h \in H$ ולכן $\mathcal{O}H$ רוויה פתוחה ו $q(\mathcal{O}H) = q(\mathcal{O})$ קבוצה פתוחה בG/H. לכן q העתקה פתוחה. יהי $g_1H \neq g_2H$ בG/H. אז $g_2^{-1}g_1 \notin H$ ולכן קיימת סביבה V של 1_G כך ש $\left[V^{-1}\left(g_2^{-1}g_1\right)V\right] \cap H = \emptyset$. (כי H סגורה, והפונקציה $(x,y) \to x^{-1}\left(g_2^{-1}g_1\right)y$ רציפה)
אז $q(g_2V)$ ו $q(g_1V)$ פתוחות בG/H, מכילות את g_1H, g_2H וזרות, כי אם יש $h_1, h_2 \in H$ כך ש $g_1vh_1 = g_2v'h_2$ נקבל כי $h_2h_1^{-1} = v'^{-1}g_2^{-1}g_1v$ ולכן $h_2h_1^{-1} \in H \cap \left[V^{-1}\left(g_2^{-1}g_1\right)V\right]$. ■

הומוגניות G/H היא G־מרחב הומוגני עם הפעולה

$$\begin{aligned} f : G \times (G/H) &\to G/H \\ (g, g_1H) &\mapsto gg_1H \end{aligned}$$

הוכחה: די להוכיח שf רציפה. נשתמש בתרשים

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow[(g,g_1)\mapsto gg_1]{\cdot} & G \\ (g,g_1) \overset{\mathrm{id}_G \times q}{\mapsto} (g, g_1H) \downarrow & & \downarrow gg_1 \overset{q}{\mapsto} gg_1H \\ G \times G/H & \xrightarrow[(g,g_1H)\mapsto gg_1H]{f} & G/H \end{array}$$

מתקיים כי $\mathrm{id}_G \times q$ וq העתקה פתוחה, ופעולת הכפל רציפות, ולכן f רציפה. (כי בהנתן פתוחה בG/H, מוצאים תמונה הפוכה פתוחה ב$G \times G$ (לפי התרשים) ואז $\mathrm{id}_G \times q$ מעבירה קבוצה זו לקבוצה פתוחה ב $G \times G/H$, שהוא התמונה ההפוכה של f) ■

קשר עם מרחבי־G

טענה 6.10 יהי X מרחב־G, ויהי $x_0 \in X$. נסמן $H = \mathrm{Stab}_G x_0$. אז ההעתקה

$$\begin{aligned} \nu : G/H &\to Gx_0 \\ gH &\mapsto gx_0 \end{aligned}$$

היא רציפה, והיא מורפיזם של מרחבי G, והיא חד־חד־ערכית ועל.
בפרט אם X הומוגני, יש מורפיזם חד־חד־ערכי ועל

$$\begin{aligned} \nu : G/H &\to X \\ gH &\mapsto gx_0 \end{aligned}$$

הוכחה: צריך להוכיח רציפות

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "g \mapsto g \cdot x_0"] & \\ G/H \arrow[rr, "\nu"] & & X \end{tikzcd}$$

ההעתקה $(\cdot x_0)$ רציפה, q פתוחה, ולכן ν רציפה. ∎

טענה 6.11 תהי G חבורה טופולוגית, $K \triangleleft G$ תת־חבורה סגורה נורמלית. אז G/K הופכת לחבורה טופולוגית והמנה $q : G \to G/K$ מורפיזם של חבורות טופולוגיות.

הוכחה: צריך להוכיח שG/K חבורה טופולוגית. רציפות: הפכי:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{inv}} & G \\ q\downarrow & & \downarrow q \\ G/K & \xrightarrow{\text{inv}} & G/K \end{array}$$

כפל:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\cdot} & G \\ q \times q \downarrow & & \downarrow q \times q \\ G/K & \xrightarrow{\cdot} & G/K \end{array}$$

∎

אוניברסליות

הגדרה 6.12 מרחב טופולוגי Ω נקרא קומפקטי מקומית אם Ω האוסדורף ולכל $x \in \Omega$ קיימת סביבה פתוחה $x \in U$ עם $\overline{U}$ קומפקטי.

הערה 6.13 אם Ω האוסדורף, אז כל נקודה x וקומפקט K עם $x \notin K$ אפשר להפריד ע"י קבוצות פתוחות. (מפרידים כל נקודה בK מx, מוצאים תת־כיסוי סופי וחותכים)

בסיס יהי Ω קומפקטי מקומית. אם $\mathcal{O} \subseteq \Omega$ פתוחה ו $x \in \mathcal{O}$, אז קיימת קבוצה פתוחה עם $x \in U \subseteq \mathcal{O}$ ו $\overline{U} \subseteq \mathcal{O}$ קומפקטי. **הוכחה:** קיימת $x \in W \subseteq \Omega$ עם $\overline{W}$ קומפקטית. ע"י החלפת W ב $W \cap \mathcal{O}$, אפשר להניח ש $W \subseteq \mathcal{O}$ (כי תת־קבוצה סגורה של קומפקט היא קומפקטית). אז $\overline{W} \setminus W$ קומפקטית ולא מכילה את x. לכן יש קבוצות פתוחות וזרות U, V עם $\overline{W} \setminus W \subseteq V$ ו $x \in U$. ע"י החלפת U ב $U \cap W$, אפשר להניח $x \in U \subseteq W \subseteq \mathcal{O}$ ואז $\overline{U} \subseteq \overline{W}$ ולכן $\overline{U}$ קומפקטית. ולבסוף

$$\overline{U} \cap \left(\overline{W} \setminus W\right) \subseteq \overline{U} \cap V \quad = \quad \emptyset$$

(כי אם $x \in \overline{U} \cap V$ אז כל סביבה של x חותכת את U, אבל V סביבה של x שאינה חותכת את U)
ולכן $\overline{U} \subseteq W \subseteq \mathcal{O}$. ■

מסקנה 6.14 אם Ω קומפקטי מקומית, $Z \subseteq \Omega$ סגורה, $K \subseteq \Omega$ קומפקטית ו $Z \cap K = \emptyset$, אז יש $Z \subseteq V$, $K \subseteq U$ עם $U \cap V = \emptyset$, U, V פתוחות.

הוכחה: לכל $k \in K$ יש $k \in U_k \subseteq \overline{U_k} \subseteq \Omega \setminus Z$, U_k פתוחה. לוקחים כיסוי סופי $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} \supseteq K$ ו $V = \Omega \setminus U$. ■

תתי מרחב יהי Ω קומפקטי מקומית.

1. אם $Z \subseteq \Omega$ סגורה, אז Z קומפקטי מקומית.
2. אם $\mathcal{O} \subseteq \Omega$ פתוחה, אז $\mathcal{O}$ קומפקטי מקומית.

הלמה של Baire יהי X קומפקטי מקומית. תהי $Z_n \subseteq X$ סדרת קבוצות סגורות. אם $(\forall n)\, \mathrm{int} Z_n = \emptyset$ אז $\mathrm{int} \bigcup_n Z_n = \emptyset$. **הוכחה:** די להוכיח שאם $\emptyset \neq \mathcal{O}_1 \subseteq X$ פתוחה עם $\overline{\mathcal{O}_1}$ קומפקטי, אז $\mathcal{O}_1 \nsubseteq \bigcup_n Z_n$. ראשית $\mathcal{O}_1 \setminus Z_1$ קבוצה פתוחה לא ריקה (לו הייתה ריקה אז $\mathcal{O}_1 \subseteq Z_1$). נקח $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \setminus Z_1$ עם $\overline{\mathcal{O}_2} \subseteq \mathcal{O}_1 \setminus Z_1$. אז $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ פתוחה לא ריקה ו $\overline{\mathcal{O}_2} \cap Z_1 = \emptyset$. באופן דומה יש $\mathcal{O}_3$ פתוחה לא ריקה עם $\overline{\mathcal{O}_3} \cap Z_2 = \emptyset$.
בצורה זו נקבל סדרה $\ldots \supseteq \mathcal{O}_2 \supseteq \mathcal{O}_1$ ואז $\ldots \supseteq \overline{\mathcal{O}_2} \supseteq \overline{\mathcal{O}_1}$ סדרה של קבוצות קומפקטיות לא ריקות, כך ש $\overline{\mathcal{O}_{n+1}} \cap Z_n = \emptyset$. אז $\emptyset \neq \bigcap_n \overline{\mathcal{O}_n} \subseteq \overline{\mathcal{O}_1}$. יהי $\xi \in \bigcap_n \overline{\mathcal{O}_n}$, אז $\xi \notin Z_n$ לכל n ולכן $\xi \notin \bigcup_n Z_n$ ומכאן $\mathcal{O}_1 \nsubseteq \bigcup_n Z_n$. ■

הגדרה 6.15 (מינוח): מרחב טופולוגי Ω יקרא σ־קומפקטי אם Ω איחוד קבוצות בן־מניה של תת מרחבים קומפקטים.

טענה 6.16 תהי G חבורה טופולוגית, קומפקטית מקומית וσ־קומפקטית. יהי $X \neq \emptyset$ מרחב G־הומוגני (כלומר בעל מסלול אחד) קומפקטי מקומית(?). אז לכל $x_0 \in X$ ההעתקה

$$\begin{aligned} f : G &\to X \\ g &\mapsto g x_0 \end{aligned}$$

היא פתוחה.

לכן

$$\begin{aligned} G/\mathrm{Stab}_G x_0 &\to X \\ g\left(\mathrm{Stab}_G x_0\right) &\mapsto gx_0 \end{aligned}$$

איזומורפיזם של מרחבי־G.

מסקנה 6.17 לכל מרחב־G ולכל מסלול פתוח $Gx_0 \subseteq X$ (G קומפקטי מקומית ו־σ־קומפקטית) ההעתקה

$$\begin{aligned} G &\to X \\ g &\mapsto gx_0 \end{aligned}$$

פתוחה כי נתונה ע"י $G \to Gx_0 \hookrightarrow X$ ושני החצים העתקות פתוחות.

הוכחה: (של הטענה): תהי $\mathcal{O} \subseteq G$ קבוצה פתוחה. תהי $x \in f(\mathcal{O})$ ונוכיח ש $f(\mathcal{O})$ סביבה של x. קיים $g \in \mathcal{O}$ עם $x = gx_0$. קיימת סביבה קומפקטית $1_G \in K \subseteq G$ עם $K^{-1}Kg \subseteq \mathcal{O}$. מאחר ו$G$ היא σ־קומפקטית ו $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, יש כיסוי $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n K$ (ע"י הזזות של K וכיסוי כל אחד מהקומפקטים ע"י מספר סופי של הזזות). לכן

$$X = Gx = Ggx_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n K g x_0$$

כל תת־קבוצה $g_n K g x_0 \subseteq X$ קומפקטית ובפרט סגורה. ממשפט Baire, יש n עם $\mathrm{int}\left(g_n K g x_0\right) \neq \emptyset$ ולכן $\mathrm{int}\left(K g x_0\right) \neq \emptyset$. יהי $k \in K$ כך ש $kgx_0 \in \mathrm{int}\left(Kgx_0\right)$. אז

$$\begin{aligned} x &= gx_0 \\ &= k^{-1}\left(kgx_0\right) \in \mathrm{int}\left(k^{-1}Kgx_0\right) \subseteq \mathrm{int}\left(K^{-1}Kgx_0\right) \subseteq \mathrm{int}\left(\mathcal{O}x_0\right) = \mathrm{int}\left(f\left(\mathcal{O}\right)\right) \end{aligned}$$

■

מסלולים פתוחים

טענה 6.18 תהי G חבורה קומפקטית מקומית, σ־קומפקטית ויהי X מרחב־G קומפקטי מקומית. אם לX יש מספר סופי (או בן מניה) של מסלולים, אז קיים מסלול פתוח.

הוכחה: תהי $U \subseteq G$ סביבה פתוחה של 1_G עם $\overline{U}$ קומפקטית. מאחר שG היא σ־קומפקטית נובע שיש כיסוי

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n U = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \overline{U}$$

יהיו $x_1, \ldots, x_l \in X$ כך ש $X = \bigcup_{j=1}^{l} Gx_j$. אז $X = \bigcup_{n=1,j=1}^{\infty,l} g_n \overline{U} x_j$. לפי Baire יש n, j עם $\mathrm{int}\left(g_n \overline{U} x_j\right) \neq \emptyset$ ואז $\mathrm{int}\left(Gx_j\right) \supseteq$ מסלול פתוח Gx_j (כי מסלול הוא פתוח $\Longleftrightarrow$ הוא מכיל קבוצה פתוחה). ■

מסלולים סגורים מקומית

הגדרה 6.19 יהי X מרחב טופולוגי. חיתוך תת קבוצה סגורה עם תת קבוצה פתוחה נקראת קבוצה סגורה מקומית בX.

הערה 6.20 אם $X \supseteq \Gamma$ סגורה מקומית, ו $\Gamma \supseteq A$ סגורה מקומית, אז $X \supseteq A$ סגורה מקומית כי

$$\begin{aligned} A &= (\text{open set of } \Gamma) \cap (\text{closed set of } \Gamma) \\ &= (\text{open set of } X) \cap (\text{closed set of } X) \cap \Gamma \end{aligned}$$

טענה 6.21 תהי G חבורה טופולוגית קומפקטית מקומית וσ־קומפקטית. יהי X מרחב־G קומפקטי מקומית. אם יש מספר סופי של מסלולים, אז כל מסלול הוא סגור מקומית.

הוכחה: באינדוקציה על n = מספר המסלולים. אם $n = 1$ הטענה ברורה.

יהיו $Gx_1, \ldots, Gx_n$ המסלולים. מהטענה הקודמת קיים מסלול פתוח. אפשר להניח בה"כ כי Gx_n מסלול פתוח. נסמן $Y = X \setminus (Gx_n)$. זו קבוצה סגורה בX ולכן סגורה מקומית. אז Y מרחב־G קומפקטי מקומית עם $(n-1)$ מסלולים, וכל מסלול סגור מקומית בY, ולכן גם בX. ■

7 חבורות

הגדרה 7.1 תהי G חבורה טופולוגית (האוסדורף). התנאים הבאים שקולים:

1. G מרחב־l.
2. יש בסיס לסביבות של היחידה המורכב מתת־חבורות פתוחות קומפקטיות.

במקרה זה נאמר שG חבורת־l. (B.Z. page 6)
אומרים גם שG פרוסופית מקומית. (BH page 8)

הערה 7.2 תת־חבורה סגורה (או פתוחה) של חבורת־l היא חבורת־l.

הוכחה: $1 \Longleftarrow 2$: תהי W סביבה פתוחה וקומפקטית של היחידה. לכל $g \in W$ יש סביבה פתוחה של 1_G כך ש $gU_g^2 \subseteq W$ ואז

$$g \in g \underbrace{U_g}_{\text{open}} \quad \subseteq \quad gU_g^2 \subseteq W$$

מאחר וW קומפקטית, יש $g_1, \ldots, g_l \in W$ כך ש $W = (g_1U_1) \cup \cdots \cup (g_lU_l)$. נסמן $U = U_{g_1} \cap \cdots \cap U_{g_l}$ אז U סביבה פתוחה של 1_G ו $WU = W$. (כי אם $g \in W$ אז $g \in g_iU_{g_i}$ ומתקיים $gU \subseteq g_iU_{g_i}U_{g_i} \subseteq W$)

לבסוף נסמן $V = W \cap W^{-1} \cap U \cap U^{-1}$. אז V סביבה פתוחה של 1_G וכמו כן $V = V^{-1}$.

נראה ש $V^n \subseteq W$ ($n=1,2,\dots$) באינדוקציה. עבור $n=1$ זה מיידי.

$$V^{n+1} \quad = \quad V^n V \subseteq WV \subseteq WU = W$$

מאחר ו $1 \in V = V^{-1}$ נובע ש $K = \bigcup_n V^n \subseteq W$ היא תת־חבורה של G הנוצרת ע"י V. $K \subseteq W$ תת־חבורה פתוחה, ולכן סגורה, ומאחר שW קומפקטית, גם K קומפקטית. ■

הערה 7.3 תהי G חבורת־l. $K \subseteq G$ תת־חבורה קומפקטית פתוחה. תהי $H \subseteq K$ תת חבורה פתוחה. אז

1. $(K:H) < \infty$ (כי מכסים את K ע"י מספר סופי של הזזות של H)
2. H סגורה ולכן קומפקטית.
3. קיימת תת־חבורה $\Gamma \subseteq H$ פתוחה קומפקטית ונורמלית בK: $\Gamma \triangleleft K$: לוקחים

$$\Gamma \quad = \quad \bigcap_{k \in K} kHk^{-1} = \bigcap_{kH \in \underbrace{K/H}_{\text{finite set}}} kHk^{-1}$$

הערה 7.4 (למת כיסוי): תהי G חבורת־l ותהי $\mathcal{O} \subseteq G$ תת־קבוצה פתוחה קומפקטית. אז לכל כיסוי פתוח $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ ולכל קבוצה פתוחה $\mathcal{O}_0 \subseteq G$ קיימת $K \subseteq G$ תת־חבורה פתוחה כך ש

$$\mathcal{O} \quad = \quad \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} g_j K$$

ולכל $j = 1, \dots, n$ יש $i \in I$ עם $g_j K \subseteq \mathcal{O}_i$ ו $K \subseteq \mathcal{O}_0$.

הוכחה: לכל $g \in \mathcal{O}$ יש $i \in I$ עם $g \in \mathcal{O}_i$ וקיימת תת־חבורה $K_g \subseteq G$ קומפקטית פתוחה עם $gK_g \subseteq \mathcal{O}_i$ (נקח גם $K_g \subseteq \mathcal{O}_0$) ואז $\mathcal{O} = \bigcup_{g \in \mathcal{O}} gK_g$. מאחר ו$\mathcal{O}$ קומפקטית, קיים תת־כיסוי סופי

$$\mathcal{O} \quad = \quad \bigcup_{t=1}^{l} g_t K_{g_t}$$

נסמן $K = \bigcap_{t=1}^{l} K_{g_t} \subseteq \mathcal{O}_0$. אז $K \subseteq G$ קומפקטית פתוחה וכל K_{g_t} הוא איחוד מספר סופי של קוסטים מתוך G/K. ■

טענה 7.5 תהי G חבורת־l, $H \leq G$ תת־חבורה סגורה. אז G/H חבורת־l.

הוכחה: תהי $A \subseteq G/H$ סביבה פתוחה של $gH \in G/H$. אז $q^{-1}(A) \subseteq G$ פתוחה ו $g \in q^{-1}(A)$. לכן קיימת סביבה פתוחה וקומפקטית

$$g \in \Gamma \quad \subseteq \quad q^{-1}(A)$$

ואז $gH = q(g) \subseteq q(\Gamma) \subseteq A$ ו$q(\Gamma) \subseteq G/H$ פתוחה וקומפקטית. ■

8 אלגברת הדיסטריבוציות עם תומך קומפקטי

מכאן והלאה, G חבורת־l ו"$K \subseteq G$" משמעו $K \subseteq G$ תת־חבורה פתוחה וקומפקטית.

8.1 קונבולוציה של דיסטריבוציות עם תומך קומפקטי

תזכורת יהי X מרחב־l. $T \in \mathcal{D}(X)$

1. $\mathrm{supp}T \subseteq X$ קבוצה סגורה ו $U = X \setminus \mathrm{supp}T$ הוא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר כך ש $\mathrm{supp}\varphi \subseteq U \implies \langle T, \varphi\rangle = 0$ (לכל $\varphi \in C_c^\infty(X)$)
2. נניח כי $T \in \mathcal{D}_c(X)$. אז לכל $f \in C^\infty(X)$ הגדרנו

$$\int_X f(x)\, dT(x) = \langle T, f\rangle := \langle T, \chi_V f\rangle$$

כאשר $\mathrm{supp}T \subseteq V \subseteq X$ וV פתוחה וקומפקטית.

תכונה אם $\mathrm{supp}f \cap \mathrm{supp}T = \emptyset$ אז $\langle T, f\rangle = 0$, כי מאחר ש $\mathrm{supp}f$ קבוצה סגורה (וגם פתוחה), ומאחר ש $\mathrm{supp}T$ קומפקטית, ניתן לקחת V כך ש $V \cap \mathrm{supp}f = \emptyset$ (מכסים את $\mathrm{supp}T$ במספר סופי של סביבות פתוחות קומפקטיות מחוץ ל$\mathrm{supp}f$) ואז $\chi_V f = 0$.

קונבולוציה תהיינה $T, S \in \mathcal{D}_c(G)$, אז $T \otimes S \in \mathcal{D}_c(G \times G)$. נסמן ב

$$\begin{aligned} m : G \times G &\to G \\ (x,y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

את הכפל .· אז לכל $f \in C_c^\infty(G)$ נקבל $f \circ m \in C^\infty(G \times G)$.

$$(f \circ m)(x,y) = f(xy)$$

ונגדיר את הקונבולוציה $T * S \in \mathcal{D}(G)$ ע"י

$$(f \in C_c^\infty(G)) \qquad \langle T * S, f\rangle = \langle T \otimes S, f \circ m\rangle$$

התומך מקיים $\mathrm{supp}(T * S) \subseteq (\mathrm{supp}T)(\mathrm{supp}S)$ ובפרט $T * S \in \mathcal{D}_c(G)$. **הוכחה:** תהי $f \in C^\infty(G)$ כך ש $\mathrm{supp}f \subseteq G \setminus ((\mathrm{supp}T)(\mathrm{supp}S))$. נוכיח $\langle T * S, f\rangle = 0$. אכן,

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(T \otimes S) \cap \mathrm{supp}(f \circ m) &= \\ \left\{(x,y) \in G^2 \mid x \in \mathrm{supp}T, y \in \mathrm{supp}S, xy \in \mathrm{supp}f\right\} &= \emptyset \end{aligned}$$

ולכן $\langle T * S, f\rangle = \langle T \otimes S, f \circ m\rangle = 0$. ■

תיאור קונבולוציה באמצעות פוביני יהיו $T,S\in\mathcal{D}_c\left(G\right)$ ו $f\in C_c^{\infty}\left(G\right)$ אז

$$\begin{aligned}\int_G f\left(g\right)d\left(T*S\right)\left(g\right) &= \langle T*S,f\rangle\\ &= \langle T\otimes S,f\circ m\rangle\\ &= \int_{G\times G} f\left(xy\right)d\left(T\otimes S\right)\left(x,y\right)\\ &= \int_G\left[\int_G f\left(xy\right)dT\left(x\right)\right]dS\left(y\right)\\ &= \int_G\left[\int_G f\left(xy\right)dS\left(y\right)\right]dT\left(x\right)\end{aligned}$$

כאשר האיברים בסוגריים הם ב $C^{\infty}\left(G\right)$ וגם נמצאים ב $C_c^{\infty}\left(G\right)$. נבדוק זאת על

$$y\;\mapsto\;\int_G f\left(xy\right)dT\left(x\right)$$

אכן $\operatorname{supp}\left[x\mapsto f\left(xy\right)\right]=\left(\operatorname{supp}f\right)\cdot y^{-1}$ וכדי לקבל $\int_G f\left(xy\right)dT\left(x\right)\neq 0$ דרוש $\left(\left(\operatorname{supp}f\right)\cdot y^{-1}\right)\cap\left(\operatorname{supp}T\right)\neq\emptyset$. כלומר, $gy^{-1}=g'$ כאשר $g\in\operatorname{supp}T$ ו $g'\in\operatorname{supp}f$ כלומר $g'^{-1}g=y$ כלומר $y\in\left(\operatorname{supp}T\right)^{-1}\left(\operatorname{supp}f\right)$ ו$\left(\operatorname{supp}T\right)^{-1}\left(\operatorname{supp}f\right)$ היא קבוצה קומפקטית (מרציפות $\left(g_1,g_2\right)\mapsto g_1^{-1}g_2$).

אסוציאטיביות תהיינה $T,S,R\in\mathcal{D}_c\left(G\right)$. אז $\left(T*S\right)*R=T*\left(S*R\right)$. **הוכחה:** לכל $f\in C_c^{\infty}\left(G\right)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\langle\left(T*S\right)*R,f\rangle &= \int_G\left[\int_G f\left(xz\right)d\left(T*S\right)\left(x\right)\right]dR\left(z\right)\\ &= \int_G\left[\int_G\left[\int_G f\left(xyz\right)dT\left(x\right)\right]dS\left(y\right)\right]dR\left(z\right)\end{aligned}$$

נסמן $\varphi\left(g\right)=\int_G f\left(xg\right)dT\left(x\right)$. ראינו כי $\varphi\in C_c^{\infty}\left(G\right)$ לכן נקבל

$$\begin{aligned}\langle\left(T*S\right)*R,f\rangle &= \int_G\left[\int_G\left[\int_G f\left(xyz\right)dT\left(x\right)\right]dS\left(y\right)\right]dR\left(z\right)\\ &= \int_G\left[\int_G\varphi\left(yz\right)dS\left(y\right)\right]dR\left(z\right)\\ &= \int_G\varphi\left(g\right)d\left(S*R\right)\left(g\right)\\ &= \int_G\left[\int_G f\left(xg\right)dT\left(x\right)\right]d\left(S*R\right)\left(g\right)\\ &= \langle T*\left(S*R\right),f\rangle\end{aligned}$$

■

הערה 8.1 מאחר ש $T*S\in\mathcal{D}_c(G)$ (עבור $T,S\in\mathcal{D}_c(G)$) ניתן להגדיר $\langle T*S,h\rangle$ גם עבור $h\in C^\infty(G)$ כללי. נקח $\mathrm{supp}S\subseteq V$, $\mathrm{supp}T\subseteq U$, כאשר U,V פתוחות קומפקטיות, אז $\mathrm{supp}(T*S)\subseteq UV$ ולכן לכל $h\in C^\infty(G)$

$$\begin{aligned}\int_G h(g)\,d(T*S)(g) &= \langle T*S,h\rangle\\ &= \langle T*S,\chi_{UV}\cdot h\rangle\\ &= \langle T\otimes S,(\chi_{UV}\cdot h)\circ m\rangle\\ &= \int_{G\times G}\chi_{UV}(xy)\,h(xy)\,d(T\otimes S)(x,y)\\ &= \int_{G\times G}h(xy)\,d(T\otimes S)(x,y)\\ &= \int_G\left[\int_G h(xy)\,dT(x)\right]dS(y)\\ &= \int_G\left[\int_G h(xy)\,dS(y)\right]dT(x)\end{aligned}$$

והפונקציות בסוגריים ב$C^\infty(G)$.

פעולת ההופכי משתמשים ב

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}:G &\to G\\ x &\mapsto x^{-1}\end{aligned}$$

שהינו בפרט הומיאומורפיזם. לכן נגדיר לכל $f\in C^\infty(G)$, פונקציה $\check{f}\in C^\infty(G)$ ע"י

$$\check{f}(g) = f\left(g^{-1}\right)$$

ואז $\mathrm{supp}\check{f}=(\mathrm{supp}f)^{-1}$ והמרחב $C_c^\infty(G)$ נשמר.
לכל $T\in\mathcal{D}(G)$ נגדיר $\check{T}\in\mathcal{D}(G)$ ע"י

$$\left\langle\check{T},\varphi\right\rangle=\langle T,\check{\varphi}\rangle\qquad(\varphi\in C_c^\infty(G))$$

ושוב $\mathrm{supp}\check{T}=(\mathrm{supp}T)^{-1}$, והמרחב $\mathcal{D}_c(G)$ נשמר והנוסחה $\left\langle\check{T},\varphi\right\rangle=\langle T,\check{\varphi}\rangle$ נכונה גם עבור $T\in\mathcal{D}_c(G)$ ו $\varphi\in C^\infty(G)$.

תכונות ($f\in C^\infty(G),T\in\mathcal{D}(G)$)

1. $\check{\check{f}}=f$,$\check{\check{T}}=T$
2. $\widecheck{fT}=\check{f}\check{T}$

הוכחה: (בדיקה):

$$\begin{aligned}\left\langle\widecheck{fT},\varphi\right\rangle &= \langle fT,\check{\varphi}\rangle\\ &= \langle T,f\check{\varphi}\rangle\\ &= \left\langle\check{T},\check{f}\varphi\right\rangle\\ &= \left\langle\check{f}\check{T},\varphi\right\rangle\end{aligned}$$

■

3. $\widecheck{\delta_g} = \delta_{g^{-1}}$

4.

$$\begin{aligned}\int_G f\left(g^{-1}\right) dT(g) &= \left\langle T, \check{f}\right\rangle \\ &= \left\langle \check{T}, f\right\rangle \\ &= \int_G f(g)\, d\check{T}(g)\end{aligned}$$

(גם ל $T \in \mathcal{D}_c(G)$ ו $f \in C^\infty(G)$)

5. $\left(\widetilde{T * S}\right) = \check{S} * \check{T}$

הוכחה: (בדיקה):

$$\begin{aligned} (\varphi \in C^\infty(G)) \qquad & \left\langle \widetilde{(T*S)}, \varphi\right\rangle \\ &= \langle T * S, \check{\varphi}\rangle \\ &= \int_G \left[\int_G \check{\varphi}(xy)\, dT(x)\right] dS(y) \\ &= \int_G \left[\int_G \varphi\left(y^{-1}x^{-1}\right) dT(x)\right] dS(y) \\ &= \int_G \left[\int_G \varphi(yx)\, d\check{T}(x)\right] d\check{S}(y) \\ &= \left\langle \check{S} * \check{T}, \varphi\right\rangle \end{aligned}$$

■

הזזות הפעולות על G, $\rho(g)h = hg^{-1}$, $\lambda(g)h = gh$. מכאן מקבלים הצגות של G על $C^\infty(G)$, $C_c^\infty(G)$ ע"י

$$\begin{aligned}(\lambda(g) f)(h) &= f\left(\lambda\left(g^{-1}\right)h\right) = f\left(g^{-1}h\right) \\ (\rho(g) f)(h) &= f\left(\rho\left(g^{-1}\right)h\right) = f(hg)\end{aligned}$$

ומקבלים הצגות של G על $\mathcal{D}(G)$ ו $\mathcal{D}_c(G)$ ע"י

$$\begin{aligned}\langle \lambda(g) T, f\rangle &= \left\langle T, \lambda(g)^{-1} f\right\rangle = \langle T, [h \mapsto f(gh)]\rangle \\ \langle \rho(g) T, f\rangle &= \left\langle T, \rho(g)^{-1} f\right\rangle = \left\langle T, \left[h \mapsto f\left(hg^{-1}\right)\right]\right\rangle\end{aligned}$$

נוסחאות אלה נכונות גם ל $f \in C^\infty(G)$ ו $T \in \mathcal{D}_c(G)$.

נוסחאות ותיאומים

.1

$$\begin{aligned}\lambda(g)\chi_A &= \chi_{gA}=\chi_{\lambda(g)A}\\ \rho(g)\chi_A &= \chi_{Ag^{-1}}=\chi_{\rho(g)A}\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}\lambda(g)\delta_x &= \delta_{gx}=\delta_{\chi(g)x}\\ \rho(g)\delta_x &= \delta_{xg^{-1}}=\delta_{\rho(g)x}\end{aligned}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\langle\lambda(g)\delta_x,\varphi\rangle &= \left\langle\delta_x,\lambda(g)^{-1}\varphi\right\rangle\\ &= \left(\lambda(g)^{-1}\varphi\right)(x)\\ &= \lambda(gx)\\ &= \langle\delta_{gx},\varphi\rangle\end{aligned}$$

■

.3

$$\widecheck{(\lambda(g)T)} = \rho(g)\check{T}$$

ומכאן גם

$$\begin{aligned}\widecheck{(\rho(g)T)} &= \widecheck{\left(\rho(g)\check{\check{T}}\right)}\\ &= \widecheck{\left(\widecheck{(\lambda(g)\check{T})}\right)}\\ &= \lambda(g)\check{T}\end{aligned}$$

הוכחה: (בדיקה):

$$\begin{aligned}\left\langle\widecheck{\lambda(g)T},f\right\rangle &= \langle\lambda(g)T,\check{f}\rangle\\ &= \left\langle T,\lambda(g)^{-1}\check{f}\right\rangle\\ &= \left\langle T,h\mapsto\check{f}(gh)=f\left(h^{-1}g^{-1}\right)=\left(\rho(g)^{-1}f\right)\left(h^{-1}\right)=\widecheck{\left(\rho(g)^{-1}f\right)}(h)\right\rangle\\ &= \left\langle T,\widecheck{\rho(g)^{-1}f}\right\rangle\\ &= \left\langle\check{T},\rho(g)^{-1}f\right\rangle\\ &= \langle\rho(g)\check{T},f\rangle\end{aligned}$$

■

תיאור פעולת G על דיסטריבוציות בעזרת קונבולוציה תהי $T\in\mathcal{D}_c(G)$, $g\in G$ אז

$$\begin{aligned}\delta_g * T &= \lambda(g)\,T\\ T*\delta_g &= \rho(g)^{-1}\,T\end{aligned}$$

הוכחה: תהי $f\in C_c^\infty(G)$ אז

$$\begin{aligned}\langle\delta_g * T, f\rangle &= \int_G\left[\int_G f(xy)\,d\delta_g(x)\right]dT(y)\\ &= \int_G f(gy)\,dT(y)\\ &= \left\langle T,\lambda(g)^{-1}f\right\rangle\\ &= \langle\lambda(g)\,T,f\rangle\end{aligned}$$

הנוסחה השניה נובעת נובעת ע"י

$$\begin{aligned}\widetilde{T*\delta_g} &= \check{\delta_g}*\check{T}\\ &= \delta_{g^{-1}}*\check{T}\\ &= \lambda\left(g^{-1}\right)\check{T}\\ &= \widetilde{\rho\left(g^{-1}\right)T}\end{aligned}$$

כאשר המעבר השלישי נובע מהנוסחה הקודמת, והמעבר האחרון נובע ממה שהוכחנו קודם.
■

מסקנה 8.2 $\mathcal{D}_c(G)$ היא אלגברה עם יחידה δ_{1_G}.

$$\delta_g*\delta_h=\delta_{gh}\qquad(g,h\in G)$$

$$\begin{aligned}\delta_g*\delta_h &= \lambda(g)\,\delta_h\\ &= \delta_{\lambda(g)h}\\ &= \delta_{gh}\end{aligned}$$

מסקנה 8.3

$$\begin{aligned}G &\to (\mathcal{D}_c(G))^\times\\ g &\mapsto \delta_g\end{aligned}$$

הומומורפיזם של חבורות. (כאשר $(\mathcal{D}_c(G))^\times$ ההפיכים של $\mathcal{D}_c(G)$)

$G\times G$ פועלת על G ע"י

$$((\lambda\times\rho)(g_1,g_2))(g) = g_1 g g_2^{-1}$$

ולכן גם על $C_c^\infty(G)$ ע"י

$$((\lambda\times\rho)(g_1,g_2)f)(g) = f\left(g_1^{-1} g g_2\right)$$

ולכן גם על $\mathcal{D}_c(G)$ ע"י

$$\langle(\lambda\times\rho)(g_1,g_2)T,f\rangle = \left\langle T,(\lambda\times\rho)\left(g_1^{-1},g_2^{-1}\right)f\right\rangle$$

ברור ש

$$\begin{aligned}(\lambda\times\rho)(g_1,g_2) &= (\lambda\times\rho)(g_1,1_{G_2})\circ(\lambda\times\rho)(1_{G_1},g_2)\\ &= \lambda(g_1)\circ\rho(g_2)\end{aligned}$$

ולכן

$$((\lambda\times\rho)(g_1,g_2))T = \delta_{g_1} * T * \delta_{g_2^{-1}}$$

(כי

$$\begin{aligned}\lambda(g)T &= \delta_g * T\\ \rho(g)T &= T * \delta_{g^{-1}}\end{aligned}$$

)

מכפלה של חבורות

הכנה יהיו $X.Y$ מרחבי־l ו $\tau : X\to Y$ פונקציה רציפה. אז לכל $f\in C^\infty(Y)$ מתקיים $f\circ\tau\in C^\infty(X)$. כעת תהי $T\in\mathcal{D}_c(X)$, אז ניתן להגדיר $\tau T\in\mathcal{D}(Y)$ ע"י

$$\langle\tau T,f\rangle = \langle T,f\circ\tau\rangle$$

כאשר $f\in C_c^\infty(Y)$. ברור ש

$$T \mapsto \tau T$$

לינארית, וכמו כן $\mathrm{supp}(\tau T)\subseteq\tau(\mathrm{supp}T)$, כי אם $f=0$ על $\tau(\mathrm{supp}T)$ אז $f\circ\tau=0$ על $\mathrm{supp}T$ ולכן

$$\langle\tau T,f\rangle = \langle T,f\circ\tau\rangle = 0$$

(וכמו כן $\tau(\mathrm{supp}T)$ קומפקטית ולכן סגורה)
בפרט $\tau T\in\mathcal{D}_c(Y)$.

הערה 8.4

1. הנוסחה $\langle \tau T, f\rangle = \langle T, f\circ\tau\rangle$ נכונה לכל $f\in C^{\infty}(Y)$: אכן, תהי $V\subseteq Y$ פתוחה קומפקטית עם

$$\text{supp}\tau T \quad\subseteq\quad \tau(\text{supp}T)\subseteq V$$

אז

$$\begin{aligned}
\langle \tau T, f\rangle &= \langle \tau T, \chi_V f\rangle \\
&= \langle T, (\chi_V f)\circ\tau\rangle \\
&= \left\langle T, \chi_{\tau^{-1}(V)}\cdot(f\circ\tau)\right\rangle \\
&= \langle T, f\circ\tau\rangle
\end{aligned}$$

המעבר האחרון נכון כי $\tau^{-1}(V)$ פתוחה עם $\text{supp}T\subseteq\tau^{-1}(V)$.

2. אם $\tau: Z\hookrightarrow X$ הכלה של תת־קבוצה Z סגורה בX הגדרנו

$$0 \quad\longrightarrow\quad \mathcal{D}(Z)\xrightarrow{p_Z^*}\mathcal{D}(X)$$

על פי

$$\langle p_Z^* T, \varphi\rangle \quad=\quad \langle T, \varphi\restriction_Z\rangle$$

ולכן במקרה זה $p_Z^*\tau = \tau T$.

מכפלת מרחבים אם $\tau_1: X_1\to Y_1$, $\tau_2: X_2\to Y_2$ (כל המרחבים הם מרחבי־l) ונסמן $\tau_1\times\tau_2: X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$. אז

$$(\tau_{1,2}\in\mathcal{D}_c(X_{1,2}))\qquad \tau_1T_1\otimes\tau_2T_2 = (\tau_1\times\tau_2)(T_1\otimes T_2)$$

שני הצדדים ב $\mathcal{D}_c(Y_1\times Y_2)$. **הוכחה:** די לבדוק את פעולת שני הצדדים על $\varphi\in C_c^{\infty}(Y_1\times Y_2)$ מהצורה

$$\varphi(y_1,y_2) \quad=\quad \varphi_1(y_1)\varphi_2(y_2)$$

כאשר $\varphi_1\in C^{\infty}(Y_1)$, $\varphi_2\in C^{\infty}(Y_2)$. מתקיים

$$\begin{aligned}
\langle(\tau_1\times\tau_2)T_1\otimes T_2, \varphi\rangle &= \langle T_1\otimes T_2, \varphi\circ(\tau_1\times\tau_2)\rangle \\
&= \langle T_1\otimes T_2, (x_1,x_2)\mapsto\varphi_1(\tau_1(x_1))\varphi_2(\tau_2(x_2))\rangle \\
&= \langle T_1, \varphi_1\circ\tau_1\rangle\langle T_2, \varphi_2\circ\tau_2\rangle \\
&= \langle \tau_1T_1, \varphi_1\rangle\langle\tau_2T_2, \varphi_2\rangle \\
&= \langle \tau_1T_1\otimes\tau_2T_2, (y_1,y_2)\mapsto\varphi_1(y_1)\varphi_2(y_2)\rangle \\
&= \langle \tau_1T_1\otimes\tau_2T_2, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

■

הומומורפיזם של חבורות־l יהי $\tau:G'\to G$ הומומורפיזם של חבורות־l. אז $\tau:\mathcal{D}_c(G')\to\mathcal{D}_c(G)$ הומומורפיזם של אלגבראות. **הוכחה:** מתקיים

$$\tau(\delta_{1_G}) = \tau\left(\delta_{1_{G'}}\right)$$

כי

$$\begin{aligned}\left\langle\tau\delta_{1_{G'}},\varphi\right\rangle &= \left\langle\delta_{1_{G'}},\varphi\circ\tau\right\rangle\\ &= (\varphi\circ\tau)(1_{G'})\\ &= \varphi(\tau(1_{G'}))\\ &= \varphi(1_G)\\ &= \langle\delta_{1_G},\varphi\rangle\end{aligned}$$

כמו כן, עבור $T,S\in\mathcal{D}_c(G')$ ו $\varphi\in C_c^\infty(G')$:

$$\begin{aligned}\langle\tau(T*S),\varphi\rangle &= \langle T*S,\varphi\circ\tau\rangle\\ &= \langle T\otimes S,\varphi\circ\tau\circ m_{G'}\rangle\end{aligned}$$

כאשר $m_{G'}:G'\times G'\to G'$ הכפל. מאחר וτ הומומורפיזם נקבל

$$\tau\circ m_{G'} = m_G\circ(\tau\times\tau)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\langle T\otimes S,\varphi\circ\tau\circ m_{G'}\rangle &= \langle T\otimes S,\varphi\circ m_G\circ(\tau\times\tau)\rangle\\ &= \langle(\tau\times\tau)(T\otimes S),\varphi\circ m_G\rangle\\ &= \langle\tau T\otimes\tau S,\varphi\circ m_G\rangle\\ &= \langle(\tau T)*(\tau S),\varphi\rangle\end{aligned}$$

וקיבלנו $\tau(T*S)=(\tau T)*(\tau S)$. ■

שיכון חבורה במכפלה תהיינה G_1,G_2 חבורות־l ו

$$\begin{aligned}\tau_1:G_1 &\to G_1\times G_2\\ x_1 &\mapsto (x_1,1_{G_2})\end{aligned}$$

השיכון הסטנדרטי. אז

$$(T\in\mathcal{D}_c(G_1))\qquad \tau_1T=T\otimes\delta_{1_{G_2}}$$

הוכחה: תהי $\varphi \in C_c^\infty(G_1 \times G_2)$ מהצורה $\varphi(x_1,x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ (ראינו שכל פונקציה ב$C_c^\infty(G_1 \times G_2)$ היא סכום של פונקציות כאלה). אז

$$\begin{aligned}
\langle \tau_1 T, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi \circ \tau_1 \rangle \\
&= \langle T, [x_1 \mapsto \varphi \circ \tau_1(x_1)] \rangle \\
&= \langle T, [x_1 \mapsto \varphi(x_1, 1_{G_2})] \rangle \\
&= \langle T, [x_1 \mapsto \varphi_1(x_1)\varphi_2(1_{G_2})] \rangle \\
&= \langle T, \varphi_1 \rangle \varphi_2(1_{G_2}) \\
&= \langle T, \varphi_1 \rangle \left\langle \delta_{1_{G_2}}, \varphi_2 \right\rangle \\
&= \left\langle T \otimes \delta_{1_{G_2}}, (x_1,x_2) \mapsto \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \right\rangle \\
&= \left\langle T \otimes \delta_{1_{G_2}}, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

■

מסקנה 8.5

1. מאחר שτ_1 גם הומומורפיזם אז מתקיים

$$\begin{aligned}
&\tau_1(T * S) = \tau_1(T) * \tau_1(S) && (T, S \in \mathcal{D}_c(G_1)) \\
&(T *_{G_1} S) \otimes \delta_{1_{G_2}} = \left(T \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) *_{G_1 \times G_2} \left(S \otimes \delta_{1_{G_2}}\right)
\end{aligned}$$

הערה 8.6 יש גם תכונות ביחס לרכיב השני.

2.

$$\left(T_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) * \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes T_2\right) = T_1 \otimes T_2 \qquad (T_{1,2} \in \mathcal{D}_c(G_{1,2}))$$

שני הצדדים ב $\mathcal{D}_c(G_1 \times G_2)$.

הוכחה: (בדיקה): לכל $\varphi \in C^\infty(G_1 \times G_2)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(T_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) * \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes T_2\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle \left(T_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) \otimes \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes T_2\right), \varphi \circ m_{G_1 \times G_2} \right\rangle \\
&= \langle (\tau_1 T_1) \otimes (\tau_2 T_2), \varphi \circ m_{G_1 \times G_2} \rangle \\
&= \langle (\tau_1 \times \tau_2)(T_1 \otimes T_2), \varphi \circ m_{G_1 \times G_2} \rangle \\
&= \langle (T_1 \otimes T_2), \varphi \circ m_{G_1 \times G_2} \circ (\tau_1 \times \tau_2) \rangle
\end{aligned}$$

נשים לב כי $m_{G_1 \times G_2} \circ (\tau_1 \times \tau_2) = \mathrm{id}_{G_1 \times G_2}$ כי

$$\begin{aligned}
(m_{G_1 \times G_2} \circ (\tau_1 \times \tau_2))(g_1, g_2) &= m_{G_1 \times G_2}(\tau_1(g_1), \tau_2(g_2)) \\
&= \tau_1(g_1) \cdot \tau_2(g_2) \\
&= (g_1, 1_{G_2}) \cdot (1_{G_1}, g_2) \\
&= (g_1, g_2)
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left\langle\left(T_1\otimes\delta_{1_{G_2}}\right)*\left(\delta_{1_{G_1}}\otimes T_2\right),\varphi\right\rangle &= \left\langle\left(T_1\otimes T_2\right),\varphi\circ m_{G_1\times G_2}\circ\left(\tau_1\times\tau_2\right)\right\rangle\\ &= \left\langle\left(T_1\otimes T_2\right),\varphi\right\rangle\end{aligned}$$

ולכן קיבלנו $T_1\otimes T_2=\left(T_1\otimes\delta_{1_{G_2}}\right)*\left(\delta_{1_{G_1}}\otimes T_2\right)$. ■

טענה 8.7 תהי G חבורת־l ו $T,S\in\mathcal{D}_c\left(G\right)$. אם כל $x\in\mathrm{supp}T$ מתחלף עם כל $y\in\mathrm{supp}S$ אז $T*S=S*T$.

הוכחה: (בדיקה):

$$\begin{aligned}\left(\varphi\in C_c^\infty\left(G\right)\right)\qquad &\left\langle T*S,\varphi\right\rangle\\ &= \int_G\varphi\left(xy\right)d\left(T\otimes S\right)\left(x,y\right)\\ &= \int_G\varphi\left(yx\right)d\left(T\otimes S\right)\left(x,y\right)\\ &= \int_G\left[\int_G\varphi\left(yx\right)dT\left(x\right)\right]dS\left(y\right)\\ &= \int_G\left[\int_G\varphi\left(yx\right)dS\left(y\right)\right]dT\left(x\right)\\ &= \left\langle S*T,\varphi\right\rangle\end{aligned}$$

■

טענה 8.8 תהיינה G_1,G_2 חבורות־l, אז יש הומומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$\begin{aligned}\eta:\mathcal{D}_c\left(G_1\right)\otimes\mathcal{D}_c\left(G_2\right) &\to \mathcal{D}_c\left(G_1\times G_2\right)\\ T\otimes_a S &\mapsto T\otimes S\end{aligned}$$

כאשר צד שמאל איבר אלגברי (כלומר איבר של $\mathcal{D}_c\left(G_1\right)\otimes\mathcal{D}_c\left(G_2\right)$, הסימון $\otimes_a$ מייצג איבר בקבוצה זו) וצד ימין זו דיסטריבוציה. זהו הומומורפיזם: ראשית הוא שולח יחידה ליחידה

$$\eta\left(\delta_{1_{G_1}}\otimes_a\delta_{1_{G_2}}\right) = \delta_{1_{G_1\times G_2}}$$

מספיק לבדוק על $\varphi\left(g_1,g_2\right)=\varphi_1\left(g_1\right)\varphi_2\left(g_2\right)$ (כאשר $\varphi_1\in C_c^\infty\left(G_1\right)$, $\varphi_2\in C_c^\infty\left(G_2\right)$)

$$\begin{aligned}\left\langle\delta_{1_{G_1}}\otimes\delta_{1_{G_2}},\varphi\right\rangle &= \left\langle\delta_{1_{G_1}}\otimes\delta_{1_{G_2}},\left(g_1,g_2\right)\mapsto\varphi_1\left(g_1\right)\varphi_2\left(g_2\right)\right\rangle\\ &= \left\langle\delta_{1_{G_1}},g_1\mapsto\varphi_1\left(g_1\right)\right\rangle\left\langle\delta_{1_{G_2}},g_2\mapsto\varphi_2\left(g_2\right)\right\rangle\\ &= \left\langle\delta_{1_{G_1}},\varphi_1\right\rangle\left\langle\delta_{1_{G_2}},\varphi_2\right\rangle\\ &= \varphi_1\left(1_{G_1}\right)\varphi_2\left(1_{G_2}\right)\\ &= \varphi\left(1_{G_1},1_{G_2}\right)\\ &= \varphi\left(1_{G_1\times G_2}\right)\\ &= \left\langle\delta_{1_{G_1\times G_2}},\varphi\right\rangle\end{aligned}$$

כפליות צריך להוכיח שעבור $T_1, S_1 \in \mathcal{D}_c(G_1)$ ו $T_2, S_2 \in \mathcal{D}_c(G_2)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\eta(T_1 \otimes_a T_2) *_{G_1 \times G_2} \eta(S_1 \otimes_a S_2) &= \eta((T_1 \otimes_a T_2)(S_1 \otimes_a S_2)) \\ &= \eta((T_1 *_{G_1} S_1) \otimes_a (T_2 *_{G_2} S_2))\end{aligned}$$

כלומר צריך להוכיח ש

$$(T_1 \otimes T_2) *_{G_1 \times G_2} (S_1 \otimes S_2) = (T_1 *_{G_1} S_1) \otimes (T_2 *_{G_2} S_2)$$

אבל צד שמאל שווה ל

$$(T_1 \otimes T_2) *_{G_1 \times G_2} (S_1 \otimes S_2) = \left(T_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) *_{G_1 \times G_2} \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes T_2\right) *_{G_1 \times G_2} \left(S_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) *_{G_1 \times G_2} \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes S_2\right)$$

כעת

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\delta_{G_1} \otimes T_2) &= \operatorname{supp}\tau_2 T_2 \subseteq 1_{G_1} \times G_2 \\ \operatorname{supp}(S_1 \otimes \delta_{G_2}) &\subseteq G_1 \times 1_{G_2}\end{aligned}$$

מתחלפים איבר־איבר ולכן נוכל להחליף את הסדר במכפלה

$$\begin{aligned}\left(T_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) *_{G_1 \times G_2} \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes T_2\right) *_{G_1 \times G_2} \left(S_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) *_{G_1 \times G_2} \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes S_2\right) &= \\ \left(T_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) *_{G_1 \times G_2} \left(S_1 \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) *_{G_1 \times G_2} \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes T_2\right) *_{G_1 \times G_2} \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes S_2\right) &= \\ \left((T_1 *_{G_1} S_1) \otimes \delta_{1_{G_2}}\right) *_{G_1 \times G_2} \left(\delta_{1_{G_1}} \otimes (T_2 *_{G_2} S_2)\right) &= \\ (T_1 *_{G_1} S_1) *_{G_1 \times G_2} (T_2 *_{G_2} S_2)&\end{aligned}$$

9 הצגות חלקות

תהי (π, V) הצגה של G.

תזכורת לכל $H \subseteq G$ הגדרנו

$$V^H = \{v \in V \mid \pi(h) v = v \mid \forall h \in H\}$$

מתקיים כי $H_1 \subseteq H_2 \Longleftarrow V^{H_2} \subseteq V^{H_1}$.

הגדרה 9.1 (π, V) נקראת <u>חלקה</u> אם לכל $v \in V$ קיימת תת־חבורה קומפקטית פתוחה $K \subseteq G$ כך ש $v \in V^K$. (אצל [BZ] זה נקרא Algebraic)

הערה 9.2

1. אפשר לתת הגדרה גם למודולים.
2. אם π חלקה אז לכל קבוצה סופית $v_1, \ldots, v_m \in V$ יש $K \subseteq G$ כך ש $v_i \in V^k$ ($i = 1, \ldots, m$). (חותכים את כל הK הנ"ל)

3. תנאי שקול: לכל $v\in V$, $\mathrm{stab}_G\left(v\right)$ תת־חבורה פתוחה.

4. $\left(\pi,V\right)$ חלקה $\Longleftrightarrow$ $V=\bigcup_{K\subseteq G}V^{K}$ כאשר האיחוד רץ על כל התת־חבורות הקומפקטיות הפתוחות של K.

5. <u>מכפלות טנזוריות:</u> תהיינה $\left(\pi_1,V_1\right)$, $\left(\pi_2,V_2\right)$ הצגות חלקות של חבורות־l, G_1, G_2. אז $\left(\pi_1\otimes\pi_2,V_1\otimes V_2\right)$ הצגה חלקה של $G_1\times G_2$. אכן, יהי $\xi\in V_1\otimes V_2$, אז לξ יש תיאור ע"י

$$\xi = \sum_{i=1}^{n}v_1^{i}\otimes v_2^{i}$$

כאשר $v_1^{i}\in V_1,v_2^{i}\in V_2$. קיימים $K_{1,2}\subseteq G_{1,2}$ כך ש $v_{1,2}^{i}\in V_{1,2}^{K_{1,2}}$ ואז

$$\xi \in V_1^{K_1}\otimes V_2^{K_2}\subseteq\left(V_1\otimes V_2\right)^{K_1\times K_2}$$

6. הצגת מנה ותת הצגה (ולכן גם תת־מנה) של הצגה חלקה היא חלקה.

הצגות ממימד סופי וכרקטרים תהי $\rho:G\to\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ הצגה "מופשטת". התנאים הבאים שקולים:

1. $\left(\rho,\mathbb{C}^n\right)$ הצגה חלקה.

2. קיימת $K\subseteq G$ כך ש $\rho\left(K\right)=I_n$.

3. $\mathrm{Ker}\rho$ תת־קבוצה פתוחה של G, ולכן יש פירוק של ρ

$$\rho:G \longrightarrow G/\mathrm{Ker}\rho\xrightarrow{\rho'}\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$$

כאשר $G/\mathrm{Ker}\rho$ חבורה דיסקרטית.

4. קיימת $K\subseteq G$ כך שהפונקציה ρ קבועה על קוסטים KgK.

5. הפונקציה

$$G\xrightarrow{\rho}\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^n\right)$$

שייכת ל $C^{\infty}\left(G,\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^n\right)\right)$. כלומר ρ רציפה כאשר ל $\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ טופולוגיה דיסקרטית.

6. ρ רציפה כאשר ל $\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ טופולוגיה רגילה.

הוכחה: נראה $6\Longleftarrow 2$. (השאר טריוואלי):
למטריצה $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$. נסמן $\left\Vert A\right\Vert_{\mathrm{HS}}=\sqrt{\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2}$. אז לפי 6 קיימת $K\subseteq G$ תת־חבורה קומפקטית פתוחה כך ש

$$\rho\left(K\right) \subseteq \left\{ A\in\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\mid\left\Vert A-I_n\right\Vert_{\mathrm{HS}}<\frac{1}{2}\right\}$$

כעת $\rho\left(K\right)$ חבורה (קומפקטית) ולכן $\rho\left(K\right)=I_n$. (?) ∎

הערה 9.3 יש תיאור דומה להצגות על מרחבים וקטוריים או מודולים.

הערה 9.4 נקח $n=1$ ונזהה $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$. אז נתייחס לכרקטר "מופשט" $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ והתנאים לעיל שקולים לכך שχ חלק.

כפל בכרקטר של דיסטריבוציות יהי $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ כרקטר (חלק). אז χ יוצר איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{D}_c(G) &\to \mathcal{D}_c(G) \\ T &\mapsto \chi T \end{aligned}$$

איזומורפיזם זה הוא כפלי ולכן אוטומורפיזם של האלגברה $\mathcal{D}_c(G)$. **הוכחה:** $T, S \in \mathcal{D}_c(G)$.

$$\begin{aligned} \langle (\chi T) * (\chi S), \varphi \rangle &= \int_G \left[\int_G [\varphi(xy)]\, d(\chi T)(x) \right] d(\chi S)(y) \\ &= \int_G \chi(y) \left[\int_G [\chi(x)\varphi(xy)]\, dT(x) \right] dS(y) \\ &= \int_G \left[\int_G \left[\underbrace{\chi(x)\chi(y)}_{\chi(xy)} \varphi(xy) \right] dT(x) \right] dS(y) \\ &= \int_G \left[\int_G [(\chi\varphi)(xy)]\, dT(x) \right] dS(y) \\ &= \int_G (\chi\varphi)\, d(T*S)(x) \\ &= \langle T*S, \chi\varphi \rangle \\ &= \langle \chi(T*S), \varphi \rangle \end{aligned}$$

■

חבורות קומפקטיות (חבורות־l) תהי Γ חבורת־l קומפקטית ו(π, V) הצגה חלקה. נניח שπ בעלת מימד סופי, כלומר $\dim_{\mathbb{C}}(V) < \infty$. ראינו ש $\mathrm{Ker}\pi \subseteq \Gamma$ פתוחה ושπ מתפרקת כך

$$\Gamma \overset{\text{quotient}}{\longrightarrow} \underbrace{\Gamma/\mathrm{Ker}\pi}_{\text{Discrete topology}} \overset{\pi'}{\longrightarrow} \mathrm{GL}(V)$$

אבל $\Gamma/\mathrm{Ker}\pi$ סופית (כי Γ קומפקטית).

מסקנה 9.5 π פשוטה למחצה, כי π' פשוטה למחצה ($\Gamma/\mathrm{Ker}\pi$ סופית) ולπ וπ' אותם תת־מרחבים שמורים בV.

למה 9.6 יהי V מודול חלק של G ותהי $\Gamma \subseteq G$ תת חבורה קומפקטית. אז לכל $v \in V$ תת־המרחב הΓ־שמור הנפרש ע"י v, כלומר

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Gamma v) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\gamma v \mid \gamma \in \Gamma\}$$

הוא בעל מימד סופי.

הוכחה: תהי $K\subseteq G$ עם $v\in V^K$ אז $K\cap\Gamma$ פתוחה ב־Γ ולכן $(\Gamma:K\cap\Gamma)<\infty$. יהי $\Gamma=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}\gamma_i\left(K\cap\Gamma\right)$ פירוק. אז

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left(\Gamma v\right) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\gamma_i v \mid i=1,\ldots,n\right\}$$

■

מסקנה 9.7 תהי K חבורת־l קומפקטית.

1. כל הצגה אי־פריקה של K היא בעלת מימד־סופי.
2. כל הצגה חלקה של K היא פשוטה למחצה.

הוכחה: לפי הלמה, ההצגה היא סכום של הצגות סופיות, ואלה פשוטות למחצה. לכן קיים פירוק

$$V = \bigoplus_{\rho\in\widehat{K}} V^{\rho}$$

(כאשר לחבורת־l G, $\widehat{G}$ קבוצת נציגים של ההצגות האי־פריקות החלקות)
אם K קומפקטית, כל איבר $\rho\in\widehat{K}$ הוא בעל מימד סופי. ■

הערה 9.8 נתייחס ל־$\rho=1=(1,\mathbb{C})\in\widehat{K}$. אז

$$V^K = V^{(1,\mathbb{C})}$$

(?)

הפונקטור $V\mapsto V^K$

טענה 9.9 יהיו U,V,W G־מודולים חלקים ותהי נתונה סדרה

$$W\xrightarrow{f}V\xrightarrow{h}U \qquad (S)$$

של G־הומומורפיזמים. כמו כן, לכל $K\subseteq G$ נסתכל על הסדרה של מרחבים וקטוריים:

$$W^K\xrightarrow{f^K}V^K\xrightarrow{h^K}U^K \qquad \left(S^K\right)$$

אז S מדויקת (בהתאמה $h\circ f=0$) אם ורק אם S^K מדויקת לכל $K\subseteq G$ ($h^K\circ f^K=0$).

הוכחה: $S\implies S^K$:
נניח ש S מדויקת. נוכיח שS^K מדויקת. $h^K\circ f^K=0$ נובע מיד מ $h\circ f=0$. לכן $\mathrm{Ker}h^K\supseteq\mathrm{Im}f^K$.
יהי $v\in V^K$ המקיים $h^K\left(v\right)=h\left(v\right)=0$. מאחר ו$S$ מדויקת, $v\in\mathrm{Im}f$ ולכן

$$\begin{aligned} v \in\ & V^K\cap\mathrm{Im}f= \\ & V^{(1,\mathbb{C})}\cap\mathrm{Im}f= \\ & f\left(W^{(1,\mathbb{C})}\right)= \\ & f\left(W^K\right)= \\ & \mathrm{Im}f^K \end{aligned}$$

(חושבים על V כעל K־מודול ואז מתקיים $V^{K}=V^{(1,\mathbb{C})}$ כאשר $(1,\mathbb{C})$ ההצגה הטריוואלית של K)

כיוון הפוך: נראה שקיימת קבוצה Λ של חבורות קומפקטיות פתוחות בG (Cofinal) כך שלכל $K_1\subseteq G$ יש $K\in\Lambda$ עם $K\subseteq G$ ו $K\subseteq K_1$, אז S מדויקת ($h\circ f=0$). (?)
$h\circ f=0$ כי לכל $w\in W$ יש $K_1\subseteq G$ כך ש $w\in W^{K_1}$ ויש $K\in\Lambda$ כך ש $K\subseteq K_1$, $K\subseteq G$ ואז $w\in W^{K}$, ומאחר ו $h^{K}\circ f^{K}=0$ נקבל $\left(h^{K}\circ f^{K}\right)(w)=\left(h\circ f\right)(w)=0$.
דיוק: יהי $v\in V$ עם $h\left(v\right)=0$. אז יש $K\in\Lambda$ כך ש $v\in V^{K}$. מתוך $h^{K}\left(v\right)=h\left(v\right)=0$ נובע $v\in\mathrm{Im}f^{K}\subseteq\mathrm{Im}f$. ■

המודול $V\left(N\right)$

הגדרה 9.10 (סימון): תהי Γ חבורה כלשהי ו $N\subseteq\Gamma$ תת חבורה. V Γ־מודול מופשט. נסמן

$$V\left(N\right) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{v-nv\mid v\in V,n\in N\right\}$$

(סימונים: אצל Bump מסומן V_N, אצל [B.H.] מסומן $V\left(N\right)$, אצל [B.Z] מסומן $E\left(N\right)$)

הערה 9.11

1. להצגה $\left(V,\pi\right)$ נסמן

$$V\left(N\right) = \left\{v-\pi\left(n\right)v\mid v\in V,n\in N\right\}$$

2. אם V_i Γ־מודולים $\left(i\in I\right)$ אז ב $\bigoplus_{i\in I}V_i$ מתקיים

$$\left(\bigoplus_{i\in I}V_i\right)\left(N\right) = \bigoplus_{i\in I}V_i\left(N\right)$$

3. אם $\gamma\in\Gamma$ מנרמל את N (כקבוצה, כלומר $\gamma^{-1}N\gamma=N$) אז $V\left(N\right)$ הוא γ שמור:

$$\gamma\left(v-nv\right) = \gamma v-\left(\underbrace{\gamma n\gamma^{-1}}_{\in N}\right)\gamma v\in V\left(N\right)$$

בפרט אם $M\subseteq\Gamma$ תת־חבורה המנרמלת את N: $M\subseteq N_{\Gamma}\left(N\right)$ אז $V\left(N\right)$ הוא M מודול ו $V/V\left(N\right)$ הוא M־מודול.
[אצל Bump: $J\left(V\right)=V/V\left(N\right)$, אצל [BZ] ו[BH] זה מסומן V_N.]
בנוסף $V\mapsto V\left(N\right)$ (וגם $V\mapsto V/V\left(N\right)$) פונקטור מ$\Gamma$־מודולים ל$M$־מודולים.

4. אם $\varphi:V\to U$ Γ־מורפיזם על אז $\varphi\left(V\left(N\right)\right)=U\left(N\right)$.

5. $V\left(N\right)=0\iff nv=v$ לכל $n\in N$ ו$v\in V$, כלומר אם N פועל טריוואלית על V.

6. נניח שV מודול פשוט של Γ, אז:

$$V(\Gamma) = \begin{cases} V & (\pi, V) \not\approx (1, \mathbb{C}) \\ 0 & (\pi, V) \approx (1, \mathbb{C}) \end{cases}$$

הוכחה: $V(\Gamma)$ הוא Γ־מודול. לכן $V(\Gamma) = 0$ או $V(\Gamma) = V$.
$V(\Gamma) = 0 \iff \Gamma$ פועלת טריוואלית $\iff (\pi, V) \cong (1, \mathbb{C})$ ■

טענה 9.12 תהי K חבורת־l קומפקטית, V K־מודול חלק. אז יש תת־מודול יחיד $U \subseteq V$ כך ש $V = V^K \oplus U$ והוא נתון ע"י $U = V(K)$, בפרט מתקיים גם $V = V^K \oplus V(K)$ ולבסוף גם $V(K) = \bigoplus_{1 \not\approx \rho \in \widehat{K}} V^\rho$.

הוכחה: נשתמש ב

$$V = \bigoplus_{\rho \in \widehat{K}} V^\rho$$

נסמן $W = \bigoplus_{1 \not\cong \rho \in \widehat{K}} V^\rho$. אז W תת־מודול של V ו$V = V^K \oplus W$ (כי $V^K = V^{(1,\mathbb{C})}$).
מאחר שכל V^ρ ($\rho \neq 1$) סכום ישר של מודולים V_ρ (אי־פריקים), מתקיים $V^\rho(K) = V^\rho$ לו $\rho \neq 1$ (כי $V_\rho(K) = V_\rho$ כי $1 \not\approx \rho$). לכן

$$W(K) = \bigoplus_{1 \not\approx \rho \in \widehat{K}} V^\rho(K) = V^\rho = W$$

בנוסף $V^K(K) = 0$ (כי K טריוואלית על V^K) ולכן נובע

$$\begin{aligned} V(K) &= \left(V^K \oplus W\right)(K) \\ &= V^K(K) \oplus W(K) \\ &= W(K) \\ &= W \end{aligned}$$

נוכיח יחידות, נניח ש $V = V^K \oplus U$ כאשר U תת K־מודול של V. אז יש איזומורפיזם של K־מודולים:

$$U \cong V/V^K \cong W$$

מאחר ש$W(K) = W$ נובע ש $U(K) = U$ ולכן $V(K) = V^K(K) \oplus U(K) = 0 \oplus U = U$ ולכן $U = V(K)$. ■

הזזות של פונקציות עם תומך קומפקטי תהי G חבורת־l, X מרחב־l ונניח שX הוא מרחב G.
כל איבר $g \in G$ יוצר הומיאומורפיזם

$$\begin{aligned} g\cdot : X &\longrightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

ו$C^{\infty}(X)$ הופך בצורה זו לG-מודול ע"י

$$(gf)(x) = f\left(g^{-1}x\right)$$

ו$C_c^{\infty}(X)$ תת G-מודול.

נסמן ב $C^{\infty}(X)^K$ את הפונקציות ב $C^{\infty}(X)$ שהן קבועות על K-מסלולים.

טענה 9.13 הG-מודול $C_c^{\infty}(X)$ חלק.

הוכחה: תהי $f \in C_c^{\infty}(X)$. נסמן $S = \operatorname{supp} f$. (ראינו ש$S$ פתוחה וקומפקטית בX) לכל $x \in S$ יש סביבה פתוחה $x \in \mathcal{O}_x \subseteq X$ כך ש $f\restriction_{\mathcal{O}_x}$ קבועה, ויש $K_x \subseteq G$ כך ש $K_x \cdot x \subseteq \mathcal{O}_x$. מקומפקטיות, יש כיסוי סופי $S = \bigcup_{i=1}^{n} K_{x_i} \cdot x_i$. נסמן $K = \bigcap_{i=1}^{n} K_{x_i}$. אז f קבועה על K מסלולים. ■

יישום לG G הוא מרחב G עם הזזות משמאל:

$$\begin{aligned} \lambda(g_1)g &= gg_2 \\ \rho(g_2)g &= gg_2^{-1} \end{aligned}$$

G הוא מרחב $G \times G$ עם הפעולה

$$(\lambda \times \rho)(g_1, g_2)g = g_1 g g_2^{-1}$$

מסקנה 9.14 ההצגות המתקבלות על $C_c^{\infty}(G)$ חלקות.

סימונים תהי $K \subseteq G$

$$\begin{aligned} C_c^{\infty}(G/K) &= \left\{f \in C_c^{\infty}(G) \mid f(x) = f(xk)\, \forall k \in K\right\} \\ &= C_c^{\infty}(G)^{\rho(K)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_c^{\infty}(K \setminus G) &= \left\{f \in C_c^{\infty}(G) \mid f(x) = f(kx)\, \forall k \in K\right\} \\ &= C_c^{\infty}(G)^{\lambda(K)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(G,K) &= C_c^{\infty}(K \setminus G/K) = C_c^{\infty}(G//K) \\ &= C_c^{\infty}(K \setminus G) \cap C_c^{\infty}(G/K) \end{aligned}$$

אז לאור החלקות

$$\begin{aligned} H(G) &= C_c^{\infty}(G) \\ &= \bigcup_{K \subseteq G} C_c^{\infty}(K \setminus G) = \bigcup_{K \subseteq G} C_c^{\infty}(G/K) \\ &= \bigcup_{K \subseteq G} C_c^{\infty}(K \setminus G/K) = \bigcup_{K \subseteq G} H(G,K) \end{aligned}$$

10 חלק חלק של הצגה

תהי G חבורת־l ו־(π, V) הצגה מופשטת של G. נסמן

$$V_S = \bigcup_{K \subseteq G} V^K$$

ל־V_S קוראים החלק החלק (Smooth part) של V.

הגדרה 10.1 (מינוח): $v \in V_S$ נקרא וקטור חלק.

תכונות

1. V_S הוא G־שמור כי $g\left(V^K\right) = V^{gKg^{-1}}$.
2. ההצגה (π_S, V_S) כאשר $\pi_S(g) = \pi(g) \restriction_{V_S}$ $(g \in G)$ חלקה.
3. אם (ρ, W) הצגה נוספת ו $f : V \to W$ G־מורפיזם אז $f\left(V^K\right) \subseteq W^K$ $(K \subseteq G)$ ולכן $f(V_S) \subseteq W_S$ ונקבל G־מורפיזם $f_S : V_S \to W_S$.
   בפרט: אם V מודול חלק (כלומר $V_S = V$) אז $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}_G(V, W_S)$ כי
   $$f(V) = f(V_S) \subseteq W_S \qquad (f \in \mathrm{Hom}_G(V, W))$$
4. אם $U \subseteq V$ תת־G־מודול אז $U_S = U \cap V_S$
5. תהי Λ אוסף תתי־חבורות $K \subseteq G$ (פתוחות קומפקטיות), כך שלכל $K_1 \subseteq G$ יש $K \in \Lambda$ עם $K \subseteq K_1$ ("Λ קו־סופית") אז
   $$V_S = \bigcup_{K \in \Lambda} V^K$$

מכפלות טנזוריות יהיו V_1, V_2 מודולים של חבורות־l G_1, G_2, אז $V_1 \otimes V_2$ הוא $G_1 \times G_2$ מודול. אז

$$(V_1 \otimes V_2)_S = (V_1)_S \otimes (V_2)_S$$

כי

$$\begin{aligned}
(V_1)_S \otimes (V_2)_S &= \left(\bigcup_{K_1 \subseteq G_1} V_1^{K_1}\right) \otimes \left(\bigcup_{K_2 \subseteq G_2} V_2^{K_2}\right) \\
&= \bigcup_{K_1 \times K_2 \subseteq G_1 \times G_2} V_1^{K_1} \otimes V_2^{K_2} \\
&= \bigcup_{K_1 \times K_2 \subseteq G_1 \times G_2} (V_1 \otimes V_2)^{K_1 \times K_2} \\
&= (V_1 \otimes V_2)_S
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון מתבצע ע"י שימוש בכך שהאוסף $\{K_1 \times K_2 \mid K_1 \times K_2 \subseteq G\}$ הוא Cofinal (ב־$G_1 \times G_2$).

הגדרה 10.2 (מינוח): $f \in C^\infty(G)$ נקראת רציפה במ"ש משמאל (מימין) אם קיימת $K \subseteq G$ כך ש $f \in C^\infty(G)^{\lambda(K)}$ $\left(f \in C^\infty(G)^{\rho(K)}\right)$, כלומר אם $f \in C^\infty(G)_{\lambda,S}$ $\left(f \in C^\infty(G)_{\rho,S}\right)$.

11 הצגה דואלית (Contragredient)

תכונות תהי (π, V) הצגה חלקה של G (חבורת־l), ראינו שקיימת הצגה דואלית מופשטת (π', V') על $V' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ ע"י

$$\langle \pi'(g) v', v \rangle = \left\langle v', \pi\left(g^{-1}\right) v \right\rangle$$

נסמן $\tilde{V} := (V')_S$. זהו החלק החלק של V' ביחס ל־π'. זהו תת־מרחב שמור, ונסמן את ההצגה עליו ב־$\left(\tilde{\pi}, \tilde{V}\right)$. <u>בפרט, $\left(\tilde{\pi}, \tilde{V}\right)$ חלקה</u> ו

$$\langle \tilde{\pi}(g) \tilde{v}, v \rangle = \left\langle \tilde{v}, \pi\left(g^{-1}\right) v \right\rangle$$

אלא שכאן $g \in G, v \in V, \tilde{v} \in \tilde{V}$.

תיאור אחר:

$$\tilde{V} = (V')_S = \bigcup_{K \subseteq G} (V')^K \subseteq V'$$

הערה 11.1 לכל $K \subseteq G$ מתקיים

$$\tilde{V}^K = (V')^K$$

הוכחה: $\subseteq$ טריוואלי. $\supseteq$ נובע מכך ש $(V')^K \subseteq \tilde{V}$. ■

הומומורפיזם אם $f : V \to W$ G־הומומורפיזם של G־מודולים חלקים נקבל $f' : W' \to V'$ ומכאן $\tilde{f} : \tilde{W} \to \tilde{V}$.

קשר עם תבנית בילינארית אם U, V מרחבים וקטוריים אז יש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V') \xrightarrow{\approx} \mathrm{Bil}(U, V)$$

כאשר $\mathrm{Bil}(U, V)$ אוסף כל התבניות הבילינאריות $U \times V \to \mathbb{C}$. האיזומורפיזם נתון ע"י

$$f \mapsto B = (u, v) \mapsto B(u, v) := (f(u))(v)$$

כעת נניח שU הוא G_1־מודול, V הוא G_2־מודול. נגדיר פעולה של $G_1 \times G_2$ על $\mathrm{Bil}(U,V)$ ע"י

$$((g_1,g_2)B)(u,v) = B\left(g_1^{-1}u, g_2^{-1}v\right)$$

אז η הוא איזומורפיזם של $G_1 \times G_2$ מודולים. **הוכחה:** עבור $v \in V$ ו $u \in U$ ו $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V')$ ו $g_1 \in G_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\eta((g_1,g_2)f)(u,v) &= (((g_1,g_2)f)(u))v \\
&= \left(g_2 f\left(g_1^{-1}u\right)\right)v \\
&= f\left(g_1^{-1}u\right)\left(g_2^{-1}v\right) \\
&= \eta(f)\left(g_1^{-1}u, g_2^{-1}v\right) \\
&= ((g_1,g_2)\eta(f))(u,v)
\end{aligned}$$

■

כעת נניח שU,V הם G־מודולים, אז $\mathrm{Bil}(U,V)$ הוא G־מודול ומקבלים איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$\mathrm{Hom}_G(U,V') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V')^G \underset{\eta}{\cong} \mathrm{Bil}(U,V)^G$$

כאשר

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bil}(U,V)^G &= \left\{B \in \mathrm{Bil}(U,V) \mid g^{-1}B = B\,(\forall g \in G)\right\} \\
&= \left\{B \in \mathrm{Bil}(U,V) \mid \underbrace{B(gu,gv)}_{(g^{-1}B)(u,v)} = B(u,v)\,(\forall g \in G, u \in U, v \in V)\right\}
\end{aligned}$$

כעת נניח שG חבורת־ו ו U,V G־מודולים חלקים. מאחר שU חלק

$$\mathrm{Hom}_G(U,V') = \mathrm{Hom}_G\left(U, \underbrace{\tilde{V}}_{(V')_S}\right)$$

ולכן נקבל

$$\mathrm{Hom}_G\left(U,\tilde{V}\right) = \mathrm{Bil}(U,V)^G \cong \mathrm{Hom}_G\left(V,\tilde{U}\right)$$

מרחבים אורתוגונליים יהיו U,V G־מודולים. $B : U \times V \to \mathbb{C}$ תבנית בילינארית G־אינווריאנטית.

סימונים אם $L \subseteq U$ תת מרחב אז

$$V \supseteq L^{\perp} = \{v \in V \mid B(L,v) = 0\}$$

אם $M \subseteq U$ תת־מרחב אז $L \perp M$ אם $M \subseteq L^{\perp}$.

תכונות

1. אם $W \subseteq U$ תת G־מודול אז $W^{\perp} \subseteq V$ תת־G־מודול.

הוכחה:

$$\begin{aligned} B(W, gv) &= B\left(g^{-1}W, v\right) \\ &= B(W, v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

עבור כל $v \in W^{\perp}$ ו$g \in G$. ■

2. לכל תת־חבורה Γ: $U(\Gamma) \perp V^{\Gamma}$

הוכחה: עבור $v \in V^{\Gamma}$, $u \in U$ ו $\gamma \in \Gamma$ מתקיים

$$\begin{aligned} B(u - \gamma u, v) &= B(u, v) - B(\gamma u, v) \\ &= B(u, v) - B\left(u, \gamma^{-1}v\right) \\ &= B(u, v) - B(u, v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

מרחבים אורתוגונליים ב־V' ו־$\tilde{V}$ V G־מודול חלק. יש תבנית אינווריאנטית

$$\begin{aligned} V' \times V &\to \mathbb{C} \\ (v', v) &\mapsto v'(v) = \langle v', v \rangle \end{aligned}$$

ויש לה צמצום ל $\tilde{V} \times V \to \mathbb{C}$. לכן לכל תת מרחב וקטורי $W \subseteq V$ יש מרחבים אורתוגונליים

$$\begin{aligned} V' \supseteq W^{\perp V'} &= \{v' \in V' \mid v' \restriction_W = 0\} \\ \tilde{V} \supseteq W^{\perp} &= W^{\perp V'} \cap \tilde{V} \end{aligned}$$

הערה 11.2 יש זיהוי (נניח שW תת G־מודול)

$$\begin{aligned} (V/W)' &\cong W^{\perp V'} \\ \widetilde{V/W} &\cong W^{\perp} \end{aligned}$$

תת חבורה קומפקטית (לא בהכרח פתוחה) V G־מודול חלק. $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה קומפקטית. מתקיים

$$V \supseteq V(\Gamma)^{\perp V'} = (V')^{\Gamma}$$

הוכחה: $\varphi \in (V')^{\Gamma} \iff \varphi - \gamma\varphi = 0$ לכל $\gamma \in \Gamma \iff \langle \varphi - \gamma\varphi, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ ו$\gamma \in \Gamma \iff \langle \varphi, v - \gamma v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ ו$\gamma \in \Gamma \iff \varphi \restriction_{V(\Gamma)} = 0$ כלומר $\varphi \in V(\Gamma)^{\perp V'}$. ■

מסקנה 11.3 לאור הפירוק $V = V^{\Gamma} \oplus V(\Gamma)$ יש איזומורפיזם

$$\left(V'\right)^{\Gamma} = V(\Gamma)^{\perp V'} \quad \longrightarrow \quad \left(V^{\Gamma}\right)'$$

כאשר האיזומורפיזם $\longrightarrow$ נתון ע"י צמצום ל V^{Γ} ו $\longleftarrow$ נתון ע"י הרחבה ל0 על $V(\Gamma)$.

תת חבורות קומפקטיות פתוחות יהי V G-מודול חלק. $K \subseteq G$ (תת־חבורה קומפקטית פתוחה). אז:

$$\begin{aligned} \tilde{V} \supseteq \left(\tilde{V}\right)^{K} &= \left(V'\right)^{K} \\ &= V(K)^{\perp V'} \\ &= V(K)^{\perp} \end{aligned}$$

מסקנה 11.4

1. כל פונקציונל לינארי על V שמתאפס על תת מרחב מסוג $V(K)$ $(K \subseteq G)$ הוא חלק (שייך ל $\left(\tilde{V}\right)^{K}$) ו

$$\tilde{V} = \bigcup_{K \subseteq G} \left(\tilde{V}\right)^{K}$$

2. לכל $0 \neq v \in V$ יש $\varphi \in \tilde{V}$ עם $\varphi(v) \neq 0$.

הוכחה: נקח $K \subseteq G$ עם $v \in V^{K}$. נקח $\varphi : V^{K} \to G$ לינארי עם $\varphi(v) \neq 0$ ונרחיב את φ כ0 על $V(K)$, אז φ חלק. ■

3. $V \neq 0 \iff \tilde{V} \neq 0$.

טענה 11.5 יהי V G-מודול חלק. $K \subseteq G$. ישנם פירוקים

$$\begin{aligned} V &= V^{K} \oplus V(K) \\ \tilde{V} &= \tilde{V}^{K} \oplus \tilde{V}(K) \end{aligned}$$

אז

1. $\tilde{V}^{K} = V(K)^{\perp}$ (ראינו)
2. $\tilde{V}(K) = \left(V^{K}\right)^{\perp}$

הוכחה: ראינו ש $\tilde{V}(K) \subseteq \left(V^{K}\right)^{\perp}$ (משיקולי תבניות: לכל תת־חבורה Γ מתקיים $U(\Gamma) \perp V^{\Gamma}$ - כאן $U = \tilde{V}$ ו $\Gamma = K$). לאור זאת ולאור הפירוק $\tilde{V} = \tilde{V}^{K} \oplus \tilde{V}(K)$, די להוכיח

$$\tilde{V}^{K} \cap \left(V^{K}\right)^{\perp} = 0$$

(כי אז $\left(V^K\right)^\perp \subseteq \tilde{V}(K)$: אם נכתוב איבר ב $\left(V^K\right)^\perp$ כסכום של איבר ב$\tilde{V}^K$ ואיבר ב$\tilde{V}(K)$, אז האיבר ב$\tilde{V}(K)$ מתאפס על כל איבר של V^K ולכן גם האיבר ב$\tilde{V}^K$ מתאפס על כל איבר של V^K ולכן הוא ב $\tilde{V}^K \cap \left(V^K\right)^\perp = 0$).

לפי 1 די להוכיח $V(K)^\perp \cap \left(V^K\right)^\perp = 0$ וזה נכון לפי הפירוק $V = V^K \oplus V(K)$. ■

דיוק אם

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{h} W \longrightarrow 0$$

סדרה מדויקת של G-מודולים, אז

$$0 \longrightarrow \tilde{W} \xrightarrow{\tilde{h}} \tilde{V} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{U} \longrightarrow 0$$

מדויקת. **הוכחה:** לכל $K \subseteq G$ התרשים הבא חילופי:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \left(\tilde{W}\right)^K & \longrightarrow & \left(\tilde{V}\right)^K & \longrightarrow & \left(\tilde{U}\right)^K & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & & \\
0 & \longrightarrow & \left(W^K\right)' & \longrightarrow & \left(V^K\right)' & \longrightarrow & \left(U^K\right)' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

כאשר החצים מלמעלה למטה הם העתקת הצמצום.

אבל מתקיים כי

$$0 \longrightarrow U^K \xrightarrow{f} V^K \xrightarrow{h} W^K \longrightarrow 0$$

מדויקת. לכן הסדרה התחתונה מדויקת לכל $K \subseteq G$. לכן הסדרה העליונה מדויקת לכל $K \subseteq G$. ראינו שזה שקול לכך שהסדרה

$$0 \longrightarrow \tilde{W} \xrightarrow{\tilde{h}} \tilde{V} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{U} \longrightarrow 0$$

מדויקת. (כי $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$ חלקים) ■

מסקנה 11.6 V פריקה $\Longleftarrow$ V' פריקה.

הוכחה: יש סדרה מדויקת של G-מודולים.

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

עם $U \neq 0$ ו$W \neq 0$. אז

$$0 \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow \tilde{V} \longrightarrow \tilde{U} \longrightarrow 0$$

מדויקת ו $\tilde{U} \neq 0$ ו $\tilde{W} \neq 0$. ■

12 פעולת הצגה על דיסטריבוציות

הגדרה 12.1 תהי (π, V) הצגה חלקה של G (חבורת־l). לכל $v \in V$ הפונקציה

$$\begin{aligned} \pi(\cdot)v : G &\longrightarrow V \\ g &\mapsto \pi(g)v \end{aligned}$$

חלקה מקומית (כלומר ב $C^{\infty}(G, V)$)

לכל $T \in \mathcal{D}_c(G)$ נגדיר

$$\pi(T) : V \longrightarrow V$$

ע"י

$$\pi(T)v = \langle T, \pi(\cdot)v \rangle = \int_G \pi(g)vdT(g) \qquad (v \in V)$$

הערה 12.2 $\pi(\delta_g) = \pi(g)$ (לכל $g \in G$)

הוכחה:

$$\begin{aligned} \pi(\delta_g)v &= \int_G \pi(x)vd\delta_g(x) \\ &= \langle \delta_g, \pi(\cdot)v \rangle \\ &= \pi(g)v \end{aligned}$$

■

כפליות $\pi(S) \circ \pi(T) = \pi(S * T)$ ($S, T \in \mathcal{D}_c(G)$) **הוכחה:**

$$\begin{aligned} \pi(S) \circ \pi(T)v &= \pi(S)(\pi(T)v) \\ &= \int_G \pi(h)(\pi(T)v)dS(h) \\ &= \int_G \pi(h)\left(\int_G \pi(g)vdT(g)\right)dS(h) \\ &= \int_G \left[\int_G \pi(hg)vdT(g)\right]dS(h) \\ &= \int_G \pi(g')vd(S*T)(g') \\ &= \pi(S*T)v \end{aligned}$$

■

מסקנה 12.3 V הופך ל $\mathcal{D}_c(G)$־מודול.

תיאור $\pi(T)v$ בהנתן $v\in V$ יהי $K\subseteq G$ עם $v\in V^K$. אפשר גם להניח ש

$$\mathrm{supp}T = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} g_iK$$

(ע"י הקטנת K).

$$\begin{aligned}\pi(T)v &= \int_G \chi_{\dot\bigcup_{i=1}^n g_iK}(g)\,\pi(g)\,vDT(g)\\ &= \sum_i \int_G \chi_{g_iK}(g)\,\pi(g)\,vDT(g)\\ &= \sum_i \int_G \chi_{g_iK}(g)\left(\pi(g_i)\,v\right)DT(g)\\ &= \sum_i \left(\int_G \chi_{g_iK}(g)\,DT(g)\right)\pi(g_i)\,v\\ &= \sum_i T(g_iK)\,\pi(g_i)\,v\end{aligned}$$

כאשר המעבר השלישי מתבצע ע"י שימוש בעובדה שK פועלת טריוואלית על v.

מסקנה 12.4

1. אם $V\subseteq U$ תת מרחב וקטורי אז U G־שמור אם ורק אם U הוא $\mathcal{D}_c(G)$־שמור.
2. אם $f\in \mathrm{Hom}_G(\pi,\sigma)$ (עם π וσ חלקות) אז $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_c(G)}(V_\pi,V_\sigma)$.

פעולת $\mathcal{D}_c(G)$ **כהומומורפיזם בין מודולים** תהי (π,V) הצגה חלקה של G. ראינו ש $\mathcal{D}_c(G)$ הוא $G\times G$ מודול ביחס להצגה $\lambda\times\rho$ וש

$$(g_1,g_2)\,T = ((\lambda\times\rho)(g_1,g_2))(T) = \delta_{g_1} * T * \delta_{g_2^{-1}} \qquad (g_1,g_2\in G)$$

כמו כן, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ הוא $G\times G$־מודול עם

$$(g_1,g_2)\,\varphi = \pi(g_1)\circ\varphi\circ\pi\left(g_2^{-1}\right) \qquad \left({}^{g_1,g_2\in G}_{\varphi\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)}\right)$$

אז ההעתקה

$$\begin{aligned}\pi:\mathcal{D}_c(G) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)\\ T &\mapsto \pi(T)\end{aligned}$$

היא $G\times G$־מורפיזם, כי

$$\begin{aligned}\pi((g_1,g_2)\,T) &= \pi\left(\delta_{g_1}*T*\delta_{g_2^{-1}}\right)\\ &= \pi(\delta_{g_1})\,\pi(T)\,\pi\left(\delta_{g_2^{-1}}\right)\\ &= \pi(g_1)\,\pi(T)\,\pi\left(g_2^{-1}\right)\\ &= (g_1,g_2)(\pi(T))\end{aligned}$$

הערה 12.5 בפרט לכל $v \in V$ ההעתקה

$$\begin{array}{rcl} \eta : \mathcal{D}_c(G) & \longrightarrow & V \\ T & \mapsto & \pi(T)v \end{array}$$

שייכת ל $\mathrm{Hom}_G(\lambda,\pi)$ כאשר λ הן הזזות משמאל על $\mathcal{D}_c(G)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} \eta(\lambda(g)T) &= \pi(\lambda(g)T)v \\ &= \pi(\delta_g * T)v \\ &= \pi(\delta_g)\pi(T)v \\ &= \pi(g)(\pi(T)v) \\ &= \pi(g)\eta(T) \end{aligned}$$

■

תבניות והצגה צמודה תהיינה (π,V) ו (σ,U) הצגות חלקות על G, ו $B : U \times V \to \mathbb{C}$ תבנית בילינארית G־אינווריאנטית, אז

$$\binom{T\in\mathcal{D}_c(G)}{\substack{u\in U\\ v\in V}} \qquad B(\sigma(T)u,v) = B\left(u,\pi\left(\check{T}\right)v\right)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} B(\sigma(T)u,v) &= B\left(\int_G \sigma(g)u\,dT(g),v\right) \\ &= \int_G B(\sigma(g)u,v)\,dT(g) \\ &= \int_G B\left(u,\pi\left(g^{-1}\right)v\right)dT(g) \\ &= \int_G B(u,\pi(g)v)\,d\check{T}(g) \\ &= B\left(u,\int_G \pi(g)v\,d\check{T}(g)\right) \\ &= B\left(u,\pi\left(\check{T}\right)v\right) \end{aligned}$$

(אפשר להוציא את האינטגרל מהתבנית בילנארית מהתיאור של האינטגרל כסכום סופי) ■

מכפלה טנזורית תהי (π_1,V_1) הצגה חלקה של חבורת־ל G_1, (π_2,V_2) הצגה חלקה של חבורת־ל G_2. אז V_1,V_2 הם מודולים מעל $\mathcal{D}_c(G_2)$, $\mathcal{D}_c(G_1)$. כמו כן, $(\pi_1\otimes\pi_2,V_1\otimes V_2)$ הצגה חלקה של $G_1\times G_2$ ולכן $V_1\otimes V_2$ מודול מעל $\mathcal{D}_c(G_1\times G_2)$ וראינו שיש הומומורפיזם של אלגבראות

$$\mathcal{D}_c(G_1)\otimes\mathcal{D}_c(G_2) \longrightarrow \mathcal{D}_c(G_1\times G_2)$$

טענה 12.6

$$\binom{T\in\mathcal{D}_c(G_1)}{S\in\mathcal{D}_c(G_2)} \qquad (\pi_1\otimes\pi_2)(T\otimes S)=\pi_1(T)\otimes\pi_2(S)$$

הוכחה: יהיו $v_1\in V_1$ ו $v_2\in V_2$.

$$\begin{aligned}
((\pi_1\otimes\pi_2)(T\otimes S))(v_1\otimes v_2) &= \int_{G_1\times G_2}(\pi_1\otimes\pi_2)(g_1,g_2)(v_1\otimes v_2)\,d(T\otimes S)(g_1,g_2)\\
&= \int_{G_1\times G_2}(\pi_1(g_1)v_1)\otimes(\pi_2(g_2)v_2)\,d(T\otimes S)(g_1,g_2)\\
\underbrace{}_{\text{Fubini}} &= \left[\int_{G_1}(\pi_1(g_1)v_1)\,dT(g_1)\right]\otimes\left[\int_{G_2}(\pi_1(g_2)v_2)\,dS(g_2)\right]\\
&= (\pi_1(T)v_1)\otimes(\pi_2(S)v_2)\\
&= (\pi_1(T)\otimes\pi_2(S))(v_1,v_2)
\end{aligned}$$

■

מסקנה 12.7 ניתן לראות את $V_1\otimes V_2$ כמודול מעל $\mathcal{D}_c(G_1)\otimes\mathcal{D}_c(G_2)$ בשתי צורות

1. בעזרת ההומורפיזם $\mathcal{D}_c(G_1)\otimes\mathcal{D}_c(G_2)\longrightarrow\mathcal{D}_c(G_1\otimes G_2)$
2. כמכפלת המודולים V_1,V_2 (מעל $\mathcal{D}_c(G_1),\mathcal{D}_c(G_2)$)

ומבנים אלה זהים.

13 מידת האר (אלגברית) על חבורת־l

13.1 דיסטריבוציות ומידות (תזכורת)

יהי X מרחב־l, $I\in\mathcal{D}(X)$, כלומר $I:C_c^\infty(X)\to\mathbb{C}$ לינארית. נסמן ב $\Sigma=\Sigma(X)$ את אוסף תת הקבוצות הפתוחות הקומפקטיות על X.
סימנו $I(\mathcal{O})=I(\chi_{\mathcal{O}})$ ($\mathcal{O}\in\Sigma$). ננסח זאת כך: לI נתאים פונקציה

$$\mu=\mu_I:\Sigma\quad\longrightarrow\quad\mathbb{C}$$

ע"י

$$(\mathcal{O}\in\Sigma)\qquad\mu(\mathcal{O})=I(\chi_{\mathcal{O}})$$

תכונות

1. $\mu(\emptyset)=0$
2. אם $A,B\in\Sigma$ זרות אז $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$

הגדרה 13.1 (מינוח): מידה תהיה פונקציה μ עם תכונות $1+2$. בכיוון ההפוך, בהנתן מידה μ ניתן להגדיר איבר

$$\mathcal{D}(X)\ni\quad I\quad=I_{\mu}:C_{c}^{\infty}(X)\longrightarrow\mathbb{C}$$

ע"י $I(0)=0$ ואם $0\neq f\in C_{c}^{\infty}(X)$, יש לה תיאור בצורה $f=\sum_{i=1}^{n}c_{i}\chi_{\mathcal{O}_{i}}$ $(\mathcal{O}_{i}\in\Sigma)$ ונקבע

$$I(f)\quad=\quad\sum_{i=1}^{n}c_{i}\mu(\mathcal{O}_{i})$$

נסמן גם $\int_{X}fd\mu=I(f)$.

13.2 אינווריאנטיות

תהי $I\in\mathcal{D}(G)$, μ המידה המתאימה.

הגדרה 13.2 I אינווריאנטית משמאל אם $\lambda(g)I=I$ $(g\in G)$, כלומר אם

$$\binom{f\in C_{c}^{\infty}(G)}{g\in G}\qquad\begin{aligned}\langle I,f\rangle&=\langle\lambda(g)I,f\rangle\\&=\left\langle I,\lambda\left(g^{-1}\right)f\right\rangle\end{aligned}$$

או

$$\int_{G}f(gx)\,d\mu(x)\quad=\quad\int_{G}f(x)\,d\mu(x)$$

(כותבים גם $\int_{G}f(x)\,d\mu(x)=\int_{G}f(x)\,d\mu\left(g^{-1}x\right)$ או $d\mu(x)=d\mu\left(g^{-1}x\right)$ לכל $g\in G$)

תרגום למידות מאחר ש $\lambda(g)\chi_{\mathcal{O}}=\chi_{g\mathcal{O}}$ אז I אינווריאנטית $\Longleftrightarrow$ המידה $\mu=\mu_{I}$ מקיימת

$$\binom{\mathcal{O}\in\Sigma}{g\in G}\qquad\mu(g\mathcal{O})=\mu(\mathcal{O})$$

חיוביות

תזכורת אם $G \supseteq U_1 \neq \emptyset$, $G \supseteq U \neq \emptyset$ קבוצות פתוחות קומפקטיות אז קיימת $G \supseteq K$ עם

$$U_1 = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} g_i K$$
$$U = \dot{\bigcup_{j=1}^{m}} h_j K$$

למה 13.3 תהי $I : C_c^{\infty}(G) \to \mathbb{C}$ דיסטריבוציה אינווריאנטית מימין או משמאל ו $\mu = \mu_I$ המידה המתאימה. נניח שקיימת $U_1 \in \Sigma$ כך ש $\mu(U_1) > 0$ (בהתאמה $\mu(U_1) = 0$) אז $\mu(U) > 0$ לכל $U \in \Sigma$ (בהתאמה $\mu = 0$ ו $I = 0$) ו $I(f) > 0$ לכל $C^{\infty}(G) \ni f \geq 0$ עם $f \neq 0$.

מסקנה 13.4 עד כדי סקלר $0 \neq$ קיימת לכל היותר דיסטריבוציה אינווריאנטית משמאל (מימין) אחת.

הגדרה 13.5 דיסטריבוציה I האינווריאנטית משמאל (מימין) נקראת <u>פונקציונל האר</u> אם I חיובית במובן הלמה.

הערה 13.6 אם I פונקציונל אינווריאנטי משמאל (מימין) וקיימת $C^{\infty}(G) \ni f \geq 0$ כך ש $I(f) > 0$ אז I חיובי.

הערה 13.7 מידת האר משמאל (מימין) נקבעת עד כדי סקלר חיובי.

טענה 13.8 תהי G חבורת־l, אז קיימת על G מידת האר משמאל (מימין) והיא נקבעת באופן יחיד עד כדי סקלר חיובי.

הוכחה: תהי $G \supseteq K_0$ תת־חבורה קומפקטית פתוחה. לכל $G \supseteq \mathcal{O}$ פתוחה קומפקטית קיימת $G \supseteq K$ עם $K_0 \supseteq K$ כך שיש פירוק $\mathcal{O} = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} g_i K$ (כלומר $\mathcal{O}$ היא K־אינווריאנטית משמאל). נגדיר

$$\mu(\mathcal{O}) = \frac{n}{(K_0 : K)}$$

נראה שμ מוגדרת היטב (אינווריאנטיות משמאל ברורה וחיוביות ברורה כי $\mu(K_0) = 1$).

די לבדוק שנקבל אותה תוצאה $\mu(\mathcal{O})$ ע"י שימוש ב $K_0 \supseteq K'$ עם $K_0 \supseteq K \supseteq K'$. נסמן

$$K = \bigcup_{j=1}^{(K:K')} k_j K'$$

אז

$$\mathcal{O} = \dot{\bigcup_{i,j=1}^{n,(K:K')}} g_i k_j K'$$

ונקבל

$$\mu(\mathcal{O}) = \frac{n(K:K')}{(K_0:K')} = \frac{n(K:K')}{(K_0:K)\cdot(K:K')} = \frac{n}{(K_0:K)} = \mu(\mathcal{O})$$

כאשר בצד שמאל כתובה מידת האר לפי K' ובצד ימין לפי K. ■

מכפלת חבורות תהיינה μ_1, μ_2 מידות האר משמאל (מימין) של חבורות-l G_1, G_2 אז $\mu_1 \otimes \mu_2$ (מכפלה טנזורית של דיסטריבוציות) היא מידת האר משמאל (מימין) על $G_1 \times G_2$.
הוכחה: נבדוק אינווראינטיות משמאל. מאחר ש

$$C_c^\infty(G_1 \times G_2) = C_c^\infty(G_1) \otimes C_c^\infty(G_2)$$

די לבדוק שלכל $f \in C_c^\infty(G_1)$, $h \in C_c^\infty(G_2)$ הפונקציה

$$\begin{aligned} G_1 \times G_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (g_1, g_2) &\mapsto \int_{G_1 \times G_2} f(g_1 x) h(g_2 y)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) \end{aligned}$$

קבועה, ואכן היא שווה ל

$$\begin{aligned} \int_{G_1 \times G_2} f(g_1 x) h(g_2 y)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) &= \int_{G_1} \left[\int_{G_2} f(g_1 x) h(g_2 y)\, d\mu_2(y)\right] d\mu_1(x) \\ &= \int_{G_1} f(g_1 x) \left[\int_{G_2} h(g_2 y)\, d\mu_2(y)\right] d\mu_1(x) \\ &= \int_{G_1} f(x) \left[\int_{G_2} h(y)\, d\mu_2(y)\right] d\mu_1(x) \\ &= \left[\int_{G_1} f(x)\, d\mu_1(x)\right] \left[\int_{G_2} h(y)\, d\mu_2(y)\right] \end{aligned}$$

ומכאן אינווריאנטיות וכמו כן נובעת חיוביות. ■

סימונים והערות

1. מידת האר משמאל:

$$\begin{aligned} \int_G f(gx)\, d\mu_l(x) &= \text{"} \int_G f(x)\, d\mu_l\left(g^{-1} x\right) \text{"} \\ &= \int_G f(x)\, d\mu_l(x) \end{aligned}$$

או

$$d\mu_l(gx) = d\mu_l(x)$$

או

$$\int_G f(gx)\, d_l(x) = \int_G f(x)\, d_l(x)$$

2. מימין

$$\begin{aligned}d\mu_r(xg) &= d\mu_r(x)\\ \int_G f(xg)\,d_r(x) &= \int_G f(x)\,d_r(x)\end{aligned}$$

בשני המקרים אם $\mathcal{O}\subseteq G$ קומפקטית פתוחה אז

$$\mu(\mathcal{O}) = \int_G \chi_{\mathcal{O}}(g)\,d\mu(g)$$

3. תומך: אם μ מידת האר משמאל או מימין, אז $\mathrm{supp}\mu = G$ כי $\mathrm{supp}\mu \neq 0$ ואינווריאנטית משמאל או מימין.

13.3 כפל בפונקציה עם תומך קומפקטי

הערה 13.9 אם $T\in\mathcal{D}(X)$ (X מרחב־l) ו $h\in C_c^\infty(X)$ ראינו ש

$$\mathrm{supp}(hT) = \mathrm{supp}(h)\cap\mathrm{supp}(T)$$

ובפרט $hT\in\mathcal{D}_c(X)$ ומתקיים

$$(f\in C^\infty(X))\qquad \langle hT,f\rangle = \langle T,hf\rangle$$

אכן, אם $\mathcal{O}\subseteq X$ קומפקטית פתוחה עם $\mathrm{supp}h\subseteq\mathcal{O}$ אז

$$\begin{aligned}\langle hT,f\rangle &= \langle hT,\chi_{\mathcal{O}}f\rangle\\ &= \langle T,h\chi_{\mathcal{O}}f\rangle\\ &= \langle T,hf\rangle\end{aligned}$$

(? - זאת לא ההגדרה פשוט?)
בשפה של מידות, אם μ מידה על G ו $h\in C_c^\infty(G)$ אז מוגדרת דיסטריבוציה $h\mu$ עם תומך קומפקטי ו

$$(f\in C^\infty(G))\qquad \int_G f(x)\,d(h\mu)(x) = \int_G h(x)\,f(x)\,d\mu(x)$$

(גם לf וקטורית)

תהי (π,V) הצגה חלקה של G, $h\in C_c^\infty(G)$ ו μ מידה על G. אז $h\mu\in\mathcal{D}_c(G)$ ולכן מוגדר $\pi(h\mu):V\to V$ לפי

$$\begin{aligned}\pi(h\mu)v &= \langle h\mu,\pi(\cdot)v\rangle\\ &= \int_G \pi(g)\,vd(\mu h)(g)\\ &= \int_G h(g)\,\pi(g)\,vd(\mu)(g)\end{aligned}$$

כעת נניח ש $\mu=\mu_l$ אינווריאנטית משמאל. תהי $K\subseteq G$ כך ש

1. $v \in V^K$
2. $h \in C_c^\infty (G)^{\rho(K)}$

אז יש פירוק זר $\text{supp} h = \dot{\bigcup}_{i=1}^n g_i K$ ו-h קבועה על $g_i K$. לכן:

$$\begin{aligned}
\pi (h\mu_l) v &= \int_G h(g) \pi(g) v \mu_l (g) \\
&= \int_G \underbrace{\left[\sum_{i=1}^n h(g_i) \chi_{g_i K}(g)\right]}_{h(g)} \pi(g) v \mu_l (g) \\
&= \sum_{i=1}^n h(g_i) \int_G \chi_{g_i K}(g) \pi(g) v \mu_l (g) \\
&= \sum_{i=1}^n h(g_i) \int_G \chi_{g_i K}(g) \pi(g_i) v \mu_l (g) \\
&= \sum_{i=1}^n h(g_i) \left(\int_G \chi_{g_i K}(g) \mu_l (g)\right) \pi(g_i) v \\
&= \sum_{i=1}^n h(g_i) \underbrace{\mu_l (g_i K)}_{\mu_l(K)} \pi(g_i) v \\
&= \mu_l (K) \sum_{i=1}^n h(g_i) \pi(g_i) v
\end{aligned}$$

תת־חבורה פתוחה תהי $H \subseteq G$ תת־חבורה פתוחה ו-μ מידת האר מימין או משמאל על G. נסמן ב-μ_H את צמצום μ על H, כלומר

$$\mu_H (\mathcal{O}) = \mu (\mathcal{O}) \qquad (\mathcal{O} \subseteq H \text{ is open and compact})$$

אז μ_H מידת האר (מאותו צד). האינטגרל נתון ע"י

$$C_c^\infty (H) \ni f \quad \mapsto \quad \int_H f(h) \mu_H (h) = \int_G f(g) \chi_H (g) d\mu_H (g) d\mu (g)$$

כאשר משמעות הביטוי $f(g) \chi_H (g)$ מחוץ ל-H הוא הערך הקבוע 0, כלומר זאת הרחבת 0 שסימנו ע"י $i_H (f)$.

הערה 13.10 לכל מרחב־l X, ותת קבוצה פתוחה U הגדרנו

$$\begin{aligned}
i_U^* : \mathcal{D}(X) &\to \mathcal{D}(U) \\
\langle i_U^* T, \varphi \rangle &= \langle T, i_U \varphi \rangle
\end{aligned}$$

כאשר $i_U \varphi$ היא הרחבת φ ל-0 מחוץ ל-U.
במקרה שלנו $\mu_H = i_H^* \mu$.

14 פונקציית מודולוס

תהי G חבורת־l, μ מידת האר משמאל או מימין. לכל $\sigma \in \mathrm{Aut}\left(G\right)$ (אוטומורפיזם אלגברי וטופולוגי) יש מידה $\sigma^{*}\mu$ לפי

$$\begin{aligned} & \int_{G} f\left(x\right) d\left(\sigma^{*}\mu\right)\left(x\right) && \left(f \in C_{c}^{\infty}\left(G\right)\right) \\ = & \int_{G} \left(f \circ \sigma\right)\left(x\right) d\mu\left(x\right) \\ = & \int_{G} f\left(\sigma\left(x\right)\right) d\mu\left(x\right) \\ = & \text{"} \int_{G} f\left(g\right) d\mu\left(\sigma^{-1}\left(g\right)\right) \text{"} \end{aligned}$$

מתקיים

$$\left(\sigma_{1} \circ \sigma_{2}\right)^{*} = \sigma_{2}^{*} \circ \sigma_{1}^{*}$$

כמו כן, ל $\mathcal{O} \subseteq G$ פתוחה מתקיים

$$\begin{aligned} \left(\sigma^{*}\mu\right)\left(\mathcal{O}\right) & = \left(\sigma^{*}\mu\right)\left(\chi_{\mathcal{O}}\right) \\ & = \mu\left(\chi_{\mathcal{O}} \circ \sigma\right) \\ & = \mu\left(\chi_{\sigma^{-1}\left(\mathcal{O}\right)}\right) \\ & = \mu\left(\sigma^{-1}\left(\mathcal{O}\right)\right) \end{aligned}$$

סה"כ $\left(\sigma^{*}\mu\right)\left(\mathcal{O}\right) = \mu\left(\sigma^{-1}\left(\mathcal{O}\right)\right)$, בפרט $\sigma^{*}\mu$ חיובית.

אינווריאנטיות

$$\begin{aligned} \int_{G} f\left(gx\right) d\left(\sigma^{*}\mu\right)\left(x\right) & = \int_{G} f\left(g\sigma\left(x\right)\right) d\mu\left(x\right) \\ & = \int_{G} f\left(\sigma\left(\sigma^{-1}\left(g\right)\right)\sigma\left(x\right)\right) d\mu\left(x\right) \\ & = \int_{G} f\left(\sigma\left(\sigma^{-1}\left(g\right)x\right)\right) d\mu\left(x\right) \\ & = \int_{G} f\left(\sigma\left(x\right)\right) d\mu\left(x\right) \\ & = \int_{G} f\left(x\right) d\left(\sigma^{*}\mu\right)\left(x\right) \end{aligned}$$

לכן $\sigma^{*}\mu$ מידת האר משמאל או ימין (לפי μ).

מסקנה 14.1 קיים מספר $\delta\left(\sigma\right) > 0$ כך ש

$$\sigma^{*}\mu = \delta\left(\sigma\right)^{-1} \cdot \mu \qquad \left(\sigma \in \mathrm{Aut}\left(G\right)\right)$$

הגדרה 14.2 (מינוח): $\delta(\sigma)$ (או $\delta(\sigma)^{-1}$) נקרא המודולוס של σ.

מתקיים $\delta(\sigma_1\circ\sigma_2)=\delta(\sigma_1)\cdot\delta(\sigma_2)$ ובפרט $\delta(\sigma^{-1})=\delta(\sigma)^{-1}$.
מתקיים גם:

$$\begin{aligned}(f\in C_c^{\infty}(G)) \qquad & \int_G f(\sigma(x))\,d\mu \\ =\ & \int_G f(x)\,d(\sigma^*\mu)(x) \\ =\ & \delta(\sigma)^{-1}\int_G f(x)\,d\mu(x) \\ =\ & \text{"}\int_G f(x)\,d\mu(\sigma^{-1}x)\text{"}\end{aligned}$$

או

$$d\mu(\sigma x) = \delta(\sigma)\,d\mu(x)$$

וגם

$$\mu\left(\sigma^{-1}(\mathcal{O})\right) = (\sigma^*\mu)(\mathcal{O})=\delta(\sigma)^{-1}\mu(\mathcal{O})$$

כלומר

$$\mu(\sigma\mathcal{O}) = \delta(\sigma)\cdot\mu(\mathcal{O})$$

תיאור $\delta(\sigma)$ **בעזרת קוסטים** תהי $K\subseteq G$ אז $\mu(\sigma K)=\delta(\sigma)\cdot\mu(K)$. נסמן $H=K\cap(\sigma K)$ ו $n=(\sigma K:H)$, $m=(K:H)$. אז

$$\begin{aligned}K &= \dot{\bigcup_{j=1}^{m}} t_jH \\ \sigma K &= \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} s_iH\end{aligned}$$

אם μ אינווריאנטית משמאל נקבל

$$\begin{aligned}\mu(K) &= m\mu(H)=(K:H)\,\mu(H) \\ \mu(\sigma K) &= n\mu(H)=(\sigma K:H)\,\mu(H)\end{aligned}$$

לכן

$$\delta(\sigma) = \frac{\mu(\sigma K)}{\mu(K)}=\frac{(\sigma K:H)}{(K:H)}$$

אם μ אינווריאנטית מימין אז יש פירוקים

$$\begin{aligned} K &= \dot{\bigcup_{j=1}^{m}} Ht'_j \\ \sigma K &= \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} Hs'_i \end{aligned}$$

ושוב נקבל $\delta(\sigma) = \frac{(\sigma K:H)}{(K:H)}$.

מסקנה 14.3

1. $\delta(\sigma)$ אינו תלוי במידת האר μ (ובצד האינוואריאנטי של μ) ולכן תלוי רק ב־σ.
2. אם קיים $K \subseteq G$ כך $\sigma K = K$ אז $\delta(\sigma) = 1$.
3. לכל $g \in G$ יש אוטומורפיזם

$$\begin{aligned} c_g : G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

הגדרה 14.4 הפונקציה המודולרית "Modulus" של G

$$\delta_G = \delta : G \to (0, \infty)$$

נתונה ע"י

$$(g \in G) \qquad \delta(g) = \delta(c_g)$$

תכונות

1. $\delta : G \to (0, \infty)$ הומומורפיזם של חבורות.
2. אם $K \subseteq G$ פתוחה וקומפקטית אז $\delta\restriction_K = 1$.
3. $\delta \in C^\infty(G)$ וגם δ רציפה במ"ש מימין או משמאל. בפרט, δ חלקה ביחס להזזות מימין או משמאל.
4. **הגדרה 14.5** G נקראת אונימודולרית אם $\delta\restriction_G = 1$.
5. אם G קומפקטית אז G אונימודולרית.
6. אם G חילופית אז G אונימודולרית (כי $c_g = \mathrm{id}$)

מתקיים ($f \in C_c^\infty(G)$)

$$\begin{aligned}\int_G f\left(gxg^{-1}\right) d\mu(x) &= \delta(g)^{-1} \int_G f(x)\, d\mu(x) \\ &= \text{"} \int_G f(x)\, d\mu\left(g^{-1}xg\right) \text{"}\end{aligned}$$

כאן μ מידת האר מימין או משמאל. או

$$d\mu\left(gxg^{-1}\right) = \delta(g)\, d\mu(x)$$

ו

$$(\mathcal{O} \subseteq G \text{ is compact and open}) \qquad \mu\left(g\mathcal{O}g^{-1}\right) = \delta(g)\, \mu(\mathcal{O})$$

14.1 נוסחאות למידות האר מימין ומשמאל

פתוחה קומפקטית

1. נניח ש μ_l מידת האר משמאל אז

$$\begin{aligned}d\mu_l\left(xg^{-1}\right) &= \delta(g)\, d\mu_l(x) \\ \mu_l\left(\mathcal{O}g^{-1}\right) &= \delta(g)\, \mu_l(\mathcal{O})\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}\int_G f(xg)\, d\mu_l(x) &= \int_G f(y)\, d\mu_l\left(yg^{-1}\right) \\ &= \delta(g) \int_G f(x)\, d\mu_l(x)\end{aligned}$$

2. אם μ_r מידת האר מימין אז

$$\begin{aligned}d\mu_r(gx) &= \delta(g)\, d\mu_r(x) \\ d\mu_r(g\mathcal{O}) &= \delta(g)\, \mu_r(\mathcal{O})\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}\int_G f(gx)\, d\mu_r(x) &= \int_G f(y)\, d\mu_r\left(g^{-1}y\right) \\ &= \delta(g)^{-1} \int_G f(y)\, d\mu_r(y) \\ &= \delta(g)^{-1} \int_G f(x)\, d\mu_r(x)\end{aligned}$$

א) $\rho(g)\,\mu_l = \delta(g)^{-1}\,\mu_l$, $\lambda(g)\,\mu_l = \mu_l$ כי

$$\begin{aligned} (f \in C_c^{\infty}(G)) \qquad & \langle \rho(g)\,\mu_l, f\rangle \\ &= \left\langle \mu_l, \rho(g)^{-1} f\right\rangle \\ &= \int_G f\left(xg^{-1}\right) d\mu_l(x) \\ &= \delta\left(g^{-1}\right) \int_G f(x)\, d\mu_l(x) \\ &= \delta(g)^{-1} \langle \mu_l, f\rangle \end{aligned}$$

ב) $\rho(g)\,\mu_r = \mu_r$, $\lambda(g)\,\mu_r = \delta(g)^{-1}\,\mu_r$ כי

$$\begin{aligned} \langle \lambda(g)\,\mu_r, f\rangle &= \left\langle \mu_r, \lambda(g)^{-1} f\right\rangle \\ &= \int_G f(gx)\, d\mu_r(x) \\ &= \delta(g)^{-1} \int_G f(x)\, d\mu_r(x) \\ &= \delta(g)^{-1} \langle \mu_r, f\rangle \end{aligned}$$

מעבר בין מידות האר מימין ומשמאל

תכונה אם μ_l מידת האר משמאל, אז $\mu_r = \delta \cdot \mu_l$ הוא מידת האר היחידה כך ש $\mu_r(K) = \mu_l(K)$ לכל (או עבור) $K \subseteq G$. **הוכחה:** חיוביות מיידית כי $\delta > 0$. נבדוק אינווריאנטיות מימין.

$$\begin{aligned} \langle \delta\mu_l, \rho(g)\, f\rangle &= \int_G \delta(x)\,(\rho(g)\, f)(x)\, d\mu_l(x) \\ &= \int_G \delta(x)\, f(xg)\, d\mu_l(x) \\ &= \delta\left(g^{-1}\right) \int_G \delta(xg)\, f(xg)\, d\mu_l(x) \\ \underbrace{\qquad}_{\substack{y=xg^{-1} \\ d\mu_l(y)=\delta(g)d\mu_l(x)}} &= \delta\left(g^{-1}\right) \int_G \delta(y)\, f(y)\, \delta(g)\, d\mu_l(y) \\ &= \int_G f(y)\, \delta(y)\, d\mu_l(y) \\ &= \langle \delta \cdot \mu_l, f\rangle \end{aligned}$$

לבסוף $\delta\restriction_K=1$ ולכן

$$\begin{aligned}\mu_r(K) &= (\delta\mu_l)(\chi_K)\\ &= \mu_l(\delta\cdot\lambda_K)\\ &= \mu_l(\lambda_K)\\ &= \mu_l(K)\end{aligned}$$

■

מסקנה 14.6 G אונימודולרית $\iff$ אוסף מידות האר מימין שווה לאוסף מידות האר משמאל.

פעולת הופכי תהי μ_l מידת האר משמאל, אז $\widecheck{\mu_l}$ מידת האר מימין:

$$\begin{aligned}\int_G f(xg)\,d\widecheck{\mu_l}(x) &= \int_G f\left(x^{-1}g\right)d\mu_l(x)\\ &= \int_G f\left(\left(g^{-1}x\right)^{-1}\right)d\mu_l(x)\\ &= \int_G f\left(x^{-1}\right)d\mu_l(x)\\ &= \int_G f(x)\,d\widecheck{\mu_l}(x)\end{aligned}$$

בנוסף אם $K\subseteq G$ אז

$$\begin{aligned}\widecheck{\mu_l}(K) &= \widecheck{\mu_l}(\chi_K)\\ &= \mu_l(\widecheck{\chi_K})\\ &= \mu_l(\chi_K)\\ &= \mu_l(K)\end{aligned}$$

מסקנה 14.7 $\widecheck{\mu_l}=\delta\cdot\mu_l=\mu_r$ כאשר μ_r מנורמלת כמקודם.

מסקנה 14.8

1.

$$\begin{aligned}(f\in C_c^\infty(G)) \qquad & \int_G f\left(x^{-1}\right)d\mu_l(x)\\ &= \int_G f(x)\,d\widecheck{\mu_l}(x)\\ &= \int_G f(x)\,\delta(x)\,d\mu_l(x)\end{aligned}$$

2. אם G אונימודולרית אז $\widecheck{\mu_l}=\mu_l$.

15 מידות הנוצרות ממידות האר על תת־חבורות קומפקטיות

תזכורת יהי X מרחב־ו, $Z \subseteq X$ סגורה. יש שיכון

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(Z) \xrightarrow{p_Z^*} \mathcal{D}(X)$$

לפי

$$\begin{pmatrix} T\in\mathcal{D}(Z) \\ f\in C_c^\infty(X) \end{pmatrix} \qquad \langle p_Z^* T, f\rangle = \langle T, p_Z f\rangle = \langle T, f\restriction_Z\rangle$$

כלומר

$$\langle p_Z^* T, f\rangle = \int_Z f\restriction_Z dT = \int_Z f(z)\, dT(z)$$

ראינו

$$\mathrm{Im} p_Z^* = \{T\in\mathcal{D}(Z) \mid \mathrm{supp} T\subseteq Z\}$$

הערה 15.1 הנוסחה $\langle p_Z^* T, f\rangle = \int_Z f\restriction_Z dT = \int_Z f(z)\, dT(z)$ נכונה גם לפונקציות וקטוריות.

הערה 15.2 ל $T\in\mathcal{D}(Z)$ מתקיים

$$\mathrm{supp}\left(p_Z^* T\right) = \mathrm{supp} T$$

כאשר צד ימין היא תת־קבוצה של X וצד שמאל תת־קבוצה של Z.

הוכחה: $\subseteq$: יהי $x\in\mathrm{supp}\left(p_Z^* T\right)$. מהשוויון

$$\mathrm{Im} p_Z^* = \{T\in\mathcal{D}(Z) \mid \mathrm{supp} T\subseteq Z\}$$

נובע כי $x\in Z$. נראה $x\in\mathrm{supp} T$. תהי $U\subseteq Z$ סביבה פתוחה של x בZ. תהי $V\subseteq X$ קבוצה פתוחה עם $V\cap Z=U$. מאחר ש $x\in\mathrm{supp}\left(p_Z^* T\right)$ נובע שיש $f\in C_c^\infty(X)$ עם $\mathrm{supp} f\subseteq V$ ו $\langle p_Z^*, f\rangle = \langle T, f\restriction_Z\rangle \neq 0$. ולבסוף $f\restriction_Z\in C_c^\infty(Z)$, $\mathrm{supp}\left(f\restriction_Z\right)\subseteq U$ ומאחר שU סביבה כלשהי, נובע $x\in\mathrm{supp} T$.

$\supseteq$: יהי $z\in Z$ עם $z\in\mathrm{supp} T$. תהי $z\in V\subseteq X$ סביבה פתוחה של z בX. נסמן $U=V\cap Z$, אז קיימת $\varphi\in C_c^\infty(Z)$ עם $\mathrm{supp}\varphi\subseteq U$ ו $\langle T,\varphi\rangle\neq 0$. ראינו שקיימת $f\in C_c^\infty(X)$ עם $f\restriction_Z=\varphi$. ע"י החלפת f ב $\chi_V f$ אפשר להניח כי $\mathrm{supp} f\subseteq V$ ואז

$$\begin{aligned} \langle p_Z^* T, f\rangle &= \langle T, f\restriction_Z\rangle \\ &= \langle T,\varphi\rangle \neq 0 \end{aligned}$$

מאחר שV סביבה כלשהי של $z\in X$ נובע כי $z\in\mathrm{supp}\left(p_Z^* T\right)$. ■

הגדרה 15.3 תהי G חבורת־l ותהי $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה קומפקטית, לא בהכרח פתוחה. נסמן ב $\mu_\Gamma \in \mathcal{D}(\Gamma)$ את מידת האר של Γ המנורמלת כך ש $\mu_\Gamma(\Gamma) = 1$. נגדיר

$$\varepsilon_\Gamma = p_\Gamma^*(\mu_\Gamma) \in \mathcal{D}(G)$$

כלומר:

$$\int_G f(g)\, d\varepsilon_\Gamma(g) = \int_\Gamma f(\gamma)\, d\mu_\Gamma(\gamma) \qquad (f \in C_c^\infty(G))$$
$$\langle \varepsilon_\Gamma, f \rangle = \langle \mu_\Gamma, f \restriction_\Gamma \rangle$$

תכונות מאפיינות

טענה 15.4

1. $\langle \varepsilon_\Gamma, 1 \rangle = 1$
2. $\lambda(\gamma)\varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\Gamma$ (בהתאמה $\rho(\gamma)\varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\Gamma$) לכל $\gamma \in \Gamma$
3. $\mathrm{supp}\varepsilon_\Gamma \subseteq \Gamma$

ותכונות אלו מאפיינות את הדיסטריבוציה $\varepsilon_\Gamma \in \mathcal{D}(G)$ באופן יחיד.

הוכחה:

1. מיידי מהגדרה ε_Γ ונרמול μ_Γ.
2. מיידי כי

$$\left(\lambda^G(\gamma) f\right) \restriction_\Gamma = \lambda^\Gamma(\gamma)(f \restriction_\Gamma)$$

(ובדומה לρ)

3. מיידי כי $\varepsilon_\Gamma \in \mathrm{Im} p_\Gamma^*$.

בכיוון ההפוך, תהי $T \in \mathcal{D}(G)$ המקיימת את התכונות הנ"ל. לפי 3 מתקיים $\mathrm{supp}\varepsilon_\Gamma \subseteq \Gamma$ ולכן $T \in \mathrm{Im} p_\Gamma^*$ ומכאן יש דיסטריבוציה $\mu \in \mathcal{D}(\Gamma)$ המקיימת $T = p_\Gamma^*(\mu)$. לפי 2, ומאחר שהצמצום $f \mapsto f \restriction_\Gamma$ הוא על, נובע שμ אינווריאנטית משמאל (מימין). לפי 1 נובע ש $\mu(\Gamma) = 1$, ובפרט μ חיובית, ולכן μ מידת האר על Γ ו $\mu(\Gamma) = 1$ מראה ש $\mu = \mu_\Gamma$. ■

תכונות נוספות

1. $\mathrm{supp}\varepsilon_\Gamma = \Gamma$. כי

$$\mathrm{supp}\varepsilon_\Gamma = \mathrm{supp}(p_\Gamma^* \mu_\Gamma) = \mathrm{supp}\mu_\Gamma = \Gamma$$

2. $\delta_\gamma * \varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\Gamma * \delta_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. אכן, לפי

$$\begin{aligned}\delta_\gamma * \varepsilon_\Gamma &= \lambda(\gamma)\,\varepsilon_\Gamma\\ \varepsilon_\Gamma * \delta_\gamma &= \rho(\gamma)^{-1}\,\varepsilon_\Gamma\end{aligned}$$

ותכונה זו שקולה לתכונה 2 מקודם.

3. $\breve{\varepsilon_\Gamma} = \varepsilon_\Gamma$, כי $\breve{\varepsilon_\Gamma}$ מקיימת את התכונות מקודם.

4.

$$\varepsilon_{g\Gamma g^{-1}} = \delta_g * \varepsilon_\Gamma * \delta_{g^{-1}} = \lambda(g)\circ\rho(g)(\varepsilon_\Gamma) \qquad (g \in G)$$

הוכחה: (בדיקה): ∎

(א)

$$\begin{aligned}\langle \lambda(g)\circ\rho(g)\,\varepsilon_\Gamma, 1\rangle &= \left\langle \varepsilon_\Gamma, \rho(g)^{-1}\,\lambda(g)^{-1}\,1\right\rangle\\ &= \langle \varepsilon_\Gamma, 1\rangle = 1\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}\underset{(\gamma\in\Gamma)}{\lambda\left(g\gamma g^{-1}\right)\lambda(g)\,\rho(g)\,\varepsilon_\Gamma} &= \rho(g)\,\lambda(g\gamma)\,\varepsilon_\Gamma\\ &= \rho(g)\,\lambda(g)\,\underbrace{\lambda(\gamma)\,\varepsilon_\Gamma}_{\varepsilon_\Gamma}\\ &= \rho(g)\,\lambda(g)\,\varepsilon_\Gamma\end{aligned}$$

(ג)

$$\operatorname{supp}\left(\delta_g * \varepsilon_\Gamma * \delta_{g^{-1}}\right) \subseteq \left(\operatorname{supp}\delta_g\right)\left(\operatorname{supp}\varepsilon_\Gamma\right)\left(\operatorname{supp}\delta_{g^{-1}}\right) = g\Gamma g^{-1}$$

לכן $\delta_g * \varepsilon_\Gamma * \delta_{g^{-1}} = \lambda(g)\circ\rho(g)(\varepsilon_\Gamma)$ מקיימת את התכונות $1,2,3$ שמאפיינות את $\varepsilon_{g\Gamma g^{-1}}$ ולכן הן שוות.

5. תהי $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ תת־חבורה קומפקטית נוספת, אז

$$\varepsilon_{\Gamma_1} * \varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\Gamma * \varepsilon_{\Gamma_1}$$

הוכחה: תהי $f \in C_c^\infty(G)$. אז

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_\Gamma * \varepsilon_{\Gamma_1}, f\rangle &= \int_G \left[\int_G f(xy)\, d\varepsilon_\Gamma(x)\right] d\varepsilon_{\Gamma_1}(y) \\
&= \int_{\Gamma_1} \left[\int_\Gamma f(\gamma\gamma_1)\, d\mu_\Gamma(\gamma)\right] d\mu_{\Gamma_1}(\gamma_1) \\
&= \int_{\Gamma_1} \left[\underbrace{\int_\Gamma f(\gamma)\, d\mu_\Gamma(\gamma)}_{\langle \varepsilon_\Gamma, f\rangle}\right] d\mu_{\Gamma_1}(\gamma_1) \\
&= \langle \varepsilon_\Gamma, f\rangle
\end{aligned}$$

לכן $\varepsilon_\Gamma * \varepsilon_{\Gamma_1} = \varepsilon_\Gamma$ ולבסוף

$$\varepsilon_\Gamma * \varepsilon_{\Gamma_1} = \check{\varepsilon_\Gamma} * \check{\varepsilon_{\Gamma_1}} = \widetilde{(\varepsilon_\Gamma * \varepsilon_{\Gamma_1})} = \check{\varepsilon_\Gamma} = \varepsilon_\Gamma$$

■

מסקנה 15.5

1. $\varepsilon_\Gamma * \varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\Gamma$
2. לכל הצגה חלקה (π, V) של G, $\pi(\varepsilon_\Gamma)^2 = \pi(\varepsilon_\Gamma)$, כלומר $\pi(\varepsilon_\Gamma)$ הטלה ב־V.

יישום לפירוק הצגות

טענה 15.6 תהי (π, V) הצגה חלקה של חבורת־l G. תהי $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה קומפקטית, אז $\mathrm{Ker}\pi(\varepsilon_\Gamma) = V(\Gamma)$ ו $\mathrm{Im}\pi(\varepsilon_\Gamma) = V^\Gamma$, ומתקיים

$$V = \mathrm{Im}(\varepsilon_\Gamma) \oplus \mathrm{Ker}\pi(\varepsilon_\Gamma)$$

הוכחה: לכל $v \in V$ ו $\gamma \in \Gamma$

$$\pi(\gamma) \circ \pi(\varepsilon_\Gamma) v = \pi(\delta_\gamma * \varepsilon_\Gamma) v = \pi(\varepsilon_\Gamma) v$$

ולכן $\mathrm{Im}\pi(\varepsilon_\Gamma) \subseteq V^\Gamma$. מצד שני, אם $v \in V^\Gamma$ אז

$$\begin{aligned}
\pi(\varepsilon_\Gamma) v &= \int_G \pi(x) v d\varepsilon_\Gamma(x) \\
&= \int_\Gamma \pi(\gamma) v d\mu_\Gamma(x) \\
&= \int_\Gamma v d\mu_\Gamma(x) \\
&= v
\end{aligned}$$

ולכן $V^{\Gamma} \supseteq \mathrm{Im}\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)$, ומכאן $V^{\Gamma} = \mathrm{Im}\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)$.

מאחר ו $\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)^{2} = \pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)$ נובע כי $\mathrm{Ker}\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)$ משלים ישר ל$\mathrm{Im}\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)$, לכן די להוכיח ש $\mathrm{Ker}\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right) = V\left(\Gamma\right)$.

כדי להוכיח זאת, די להוכיח כי $\mathrm{Ker}\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)$ סגור ביחס לΓ (ראינו שהמרחב U היחיד הסגור לΓ המקיים $V = V^{\Gamma} \oplus U$ הוא $V\left(\Gamma\right)$): אכן, אם $w \in \mathrm{Ker}\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)$, $\gamma \in \Gamma$ אז

$$\begin{aligned} \pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)\left(\pi\left(\gamma\right)w\right) &= \pi\left(\varepsilon_{\Gamma} * \delta_{\gamma}\right)w \\ &= \pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)w \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

תיאור דיסטריבוציות אינווריאנטיות ביחס לΓ

טענה 15.7 תהי G חבורת־ו, $\Gamma \subseteq G$ תת־חבורה קומפקטית, אז לכל $T \in \mathcal{D}_c\left(G\right)$ התנאים הבאים שקולים:

1. $\lambda\left(\gamma\right)T = T$ (בהתאמה $\rho\left(\gamma\right)T = T$) לכל $\gamma \in \Gamma$
2. $T \in \mathcal{D}_c\left(G\right)^{\lambda(\Gamma)}$ (בהתאמה $T \in \mathcal{D}_c\left(G\right)^{\rho(\Gamma)}$)
3. $T = \varepsilon_{\Gamma} * T$ (בהתאמה $T = T * \varepsilon_{\Gamma}$)
4. $T \in \varepsilon_{\Gamma} * \mathcal{D}_c\left(G\right)$ (בהתאמה $T \in \mathcal{D}_c\left(G\right) * \varepsilon_{\Gamma}$)

הוכחה: $2 \iff 1$: כי אלה ניסוחים שקולים.

$4 \iff 3$: כי $\varepsilon_{\Gamma} * \varepsilon_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma}$.

$3 \implies 2$: כי

$$\lambda\left(\gamma\right)T = \delta_{\gamma} * T = \delta_{\gamma} * \varepsilon_{\Gamma} * T = \varepsilon_{\Gamma} * T = T$$

$2 \implies 3$: כי לכל $f \in C_c^{\infty}\left(G\right)$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \left\langle \varepsilon_{\Gamma} * T, f\right\rangle &= \int_G \left[\int_G f\left(xy\right)dT\left(y\right)\right]d\varepsilon_{\Gamma}\left(x\right) \\ &= \int_{\Gamma}\left\langle T, \lambda\left(x^{-1}\right)f\right\rangle d\mu_{\Gamma}\left(x\right) \\ &= \int_{\Gamma}\left\langle \lambda\left(x\right)T, f\right\rangle d\mu_{\Gamma}\left(x\right) \\ &= \int_{\Gamma}\left\langle T, f\right\rangle d\mu_{\Gamma}\left(x\right) \\ &= \left\langle T, f\right\rangle \end{aligned}$$

הוכחת השקילות בסוגריים דומה, או נובעת בעזרת $T \leftrightarrow \check{T}$. ■

מסקנה 15.8

$$\mathcal{D}_c\left(G\right)^{(\lambda\times\rho)(\Gamma\times\Gamma)} = \varepsilon_{\Gamma} * \mathcal{D}_c\left(G\right) * \varepsilon_{\Gamma}$$

ε_K **כאשר** $K \subseteq G$ **תת־חבורה פתוחה וקומפקטית**

טענה 15.9 תהי $K \subseteq G$ (כרגיל) תת־חבורה פתוחה קומפקטית. אז

$$\varepsilon_K = \chi_K \mu_l = \chi_K \mu_r$$

כאשר μ_r, μ_l מנורמלות ע"י

$$\mu_l (K) = \mu_r (K) = 1$$

הוכחה: ראשית מאחר ו $\delta \restriction_K = 1$ נובע

$$\chi_K \mu_r = \chi_K \delta \mu_l = \chi_K \mu_l$$

נבדוק ש $\chi_K \mu_l$ מקיים את הדרישות:

.1

$$\langle \chi_K \mu_l, 1 \rangle = \langle \mu_l, \chi_K \rangle = \mu_l (K) = 1$$

.2

$$\begin{aligned} (k \in K) & \\ \lambda (k) (\chi_K \mu_l) &= (\lambda (k) \chi_K) (\lambda (k) \mu_l) \\ &= \chi_K \mu_l \end{aligned}$$

.3

$$\mathrm{supp} (\chi_K \mu_l) = \mathrm{supp} \chi_K = K$$

■

הערה 15.10

1. בסעיף 2 השתמשנו גם ב

$$\begin{aligned} \lambda (g) (fT) &= (\lambda (g) f) (\lambda (g) T) \\ \rho (g) (fT) &= (\rho (g) f) (\rho (g) T) \\ (f \in C_c^\infty (G), T \in \mathcal{D} (G)) & \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}\left(\widecheck{fT}\right) &= \check{f}\check{T}\\ \left\langle\widecheck{fT},\varphi\right\rangle &= \langle fT,\check{\varphi}\rangle\\ &= \langle T,f\check{\varphi}\rangle\\ &= \left\langle T,\widecheck{\check{f}\varphi}\right\rangle\\ &= \left\langle\check{T},\check{f}\varphi\right\rangle\\ &= \left\langle\check{f}\check{T},\varphi\right\rangle\end{aligned}$$

16 קונבולוציה של דיסטריבוציה עם פונקציה

הגדרה 16.1 תהיינה $f\in C_c^\infty(G)$, $T\in\mathcal{D}_c(G)$ (אפשר גם דיסטריבוציה עם תומך לא קומפקטי). מגדירים פונקציה

$$T*f:G\to\mathbb{C}$$

ע"י

$$(T*f)(x) = \int_G f\left(g^{-1}x\right)dT(g)$$

קשר עם הזזות משמאל ראינו ש $C_c^\infty(G)$ מודול חלק ביחס להזזות משמאל (וגם לגבי הזזות מימין). לכן מוגדר

$$\lambda(T):C_c^\infty(G)\to C_c^\infty(G)$$

(לכל $T\in\mathcal{D}_c(G)$)
מתקיים:

$$\left(\substack{f\in C_c^\infty(G)\\ T\in\mathcal{D}_c(G)}\right)\qquad T*f=\lambda(T)f\in C_c^\infty(G)$$

הוכחה: לפי הגדרת $\lambda(T)$:

$$\lambda(T)f = \int_G\lambda(g)f\,dT(g)$$

מאחר ש

$$\begin{aligned}C_c^\infty(G) &\to \mathbb{C}\\ f &\mapsto f(x)\end{aligned}$$

העתקה לינארית מתקיים

$$\begin{aligned}(\lambda(T)f)(x) &= \int_G (\lambda(g)f)(x)\,dT(g)\\ &= \int_G f\left(g^{-1}x\right)dT(g)\\ &= (T*f)(x)\end{aligned}$$

■

תיאור הפעולה ε_Γ^* תהי $\Gamma\subseteq G$ תת־חבורה קומפקטית. אז

$$\begin{aligned}\varepsilon_\Gamma * : C_c^\infty(G) &\to C_c^\infty(G)\\ f &\mapsto \varepsilon_\Gamma * f\end{aligned}$$

היא הטלה על $C_c^\infty(G)^{\lambda(\Gamma)}$ (פונקציה אינווריאנטית משמאל ביחס לΓ) לאורך $C_c^\infty(\Gamma)$ (פונקציה מהצורה $f-\lambda(\gamma)f$). **הוכחה:** $(\lambda, C_c^\infty(G))$ הצגה חלקה של G. ראינו שההטלה לעיל נתונה ע"י $\lambda(\varepsilon_\Gamma)$ וראינו ש $\lambda(\varepsilon_\Gamma)f=\varepsilon_\Gamma * f$. ■

מסקנה 16.2 $f\in C_c^\infty(G)$ אינווריאנטית משמאל ביחס לΓ $\iff$ $\varepsilon_\Gamma * f = f$.

תכונות אינווריאנטיות אם $T,S\in\mathcal{D}_c(G)$, $f\in C_c^\infty(G)$ אז

$$\langle T*S,f\rangle = \left\langle S,\check{T}*f\right\rangle$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\left\langle S,\check{T}*f\right\rangle &= \int_G \left(\check{T}*f\right)(x)\,dS(x)\\ &= \int_G\left[\int_G f\left(g^{-1}x\right)d\check{T}(g)\right]dS(x)\\ &= \int_G\left[\int_G f(gx)\,dT(g)\right]dS(x)\\ &= \langle T*S,f\rangle\end{aligned}$$

■

תיאור תכונת אינווריאנטיות של פונקציות בעזרת הפעלת דיסטריבוציות תהי $\Gamma\subseteq G$ תת־חבורה פתוחה קומפקטית ו $f\in C_c^\infty(G)$. אם f אינווריאנטית להזזות מימין ומשמאל ביחס לΓ אז

$$\begin{aligned}&(\forall S\in\mathcal{D}_c(G))\\ \langle\varepsilon_\Gamma * S,f\rangle &= \langle S,f\rangle\\ &= \langle S*\varepsilon_\Gamma,f\rangle\\ &= \langle\varepsilon_\Gamma * S*\varepsilon_\Gamma,f\rangle\end{aligned}$$

הוכחה:

$$f\in C_{c}^{\infty}\left(G\right)^{\lambda(\Gamma)} = \varepsilon_{\Gamma}*C_{c}^{\infty}\left(G\right)$$

לכן

$$\begin{aligned}\left\langle \varepsilon_{\Gamma}*S,f\right\rangle &= \left\langle S,\widecheck{\varepsilon_{\Gamma}}*f\right\rangle \\ &= \left\langle S,\varepsilon_{\Gamma}*f\right\rangle \\ \underbrace{}_{f\in\varepsilon_{\Gamma}*C_{c}^{\infty}(G)} &= \left\langle S,f\right\rangle \end{aligned}$$

לכן השוויון הראשון נכון. נובע ש$\check{f}$ גם אינווריאנטית משמאל ולכן

$$\begin{aligned}\left\langle S*\varepsilon_{\Gamma},f\right\rangle &= \left\langle \varepsilon_{\Gamma}*\check{S},\check{f}\right\rangle \\ &= \left\langle \check{S},\check{f}\right\rangle \\ &= \left\langle S,f\right\rangle \end{aligned}$$

ולכן גם השוויון השלישי נכון. השוויון האחרון נובע משני והשוויונות האחרים. ∎

מסקנה 16.3 תהי $0\neq S\in\mathcal{D}_{c}\left(G\right)$, אז קיימת $K\subseteq G$ (קומפקטית פתוחה) כך ש $\varepsilon_{\Gamma}*S*\varepsilon_{\Gamma}\neq0$.

הוכחה: תהי $f\in C_{c}^{\infty}\left(G\right)$ כך ש $\left\langle S,f\right\rangle \neq0$. קיימת $K\subseteq G$ כך ש f אינווריאנטית מימין ומשמאל לK ואז

$$0\neq\left\langle S,f\right\rangle = 0\neq\left\langle \varepsilon_{K}*S*\varepsilon_{K},f\right\rangle$$

∎

קישור קונבולוציה עם $f\mu$

טענה 16.4 תהי $T\in\mathcal{D}_{c}\left(G\right)$, $f\in C_{c}^{\infty}\left(G\right)$, μ_{l} מידת האר משמאל. אז

$$T*\left(f\mu_{l}\right) = \left(T*f\right)\mu_{l}$$

הוכחה: תהי $\varphi \in C_c^\infty(G)$ כלשהי.

$$\begin{aligned}
\langle T*(f\mu_l),\varphi\rangle &= \int_G\left[\int_G \varphi(xy)\,d(f\mu_l)(y)\right]dT(x)\\
&= \int_G\left[\int_G \varphi(xy)\,f(y)\,d\mu_l(y)\right]dT(x)\\
&= \int_G\left[\int_G \varphi(y)\,f\left(x^{-1}y\right)d\mu_l(y)\right]dT(x)\\
&= \int_G\left[\int_G \varphi(y)\,f\left(x^{-1}y\right)dT(x)\right]d\mu_l(y)\\
&= \int_G \varphi(y)\left[\int_G f\left(x^{-1}y\right)dT(x)\right]d\mu_l(y)\\
&= \int_G \varphi(y)\,(T*f)(y)\,d\mu_l(y)\\
&= \int_G \varphi(y)\,d((T*f)\,\mu_l)(y)\\
&= \langle (T*f)\,\mu_l,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

■

תיאור מרחבי דיסטריבוציות אינווריאנטים

למה 16.5 תהי G חבורת־l, μ מידת האר מימין או משמאל. $K\subseteq G$ תת־חבורה קומפקטית פתוחה. אז

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_c(G))^{\rho(K)} &= C_c(G/K)\cdot\mu\\
(\mathcal{D}_c(G))^{\lambda(K)} &= C_c(K\setminus G)\cdot\mu
\end{aligned}$$

הוכחה: ראשית מאחר ש $\mu_r=\delta\mu_l$ ויש $\delta\in C(K\setminus G/K)$ די להתייחס למקרה $\mu=\mu_l$ או $\mu=\mu_r$ בשתי הנוסחאות. נוכיח את הזהות הראשונה עם $\mu=\mu_l$:

$\supseteq$: לכל $f\in C_c(G/K)$, $k\in K$

$$\begin{aligned}
\rho(k)(f\mu_l) &= (\rho(k)f)\cdot(\rho(k)\mu_l)\\
&= f\cdot\left(\underbrace{\delta(k)^{-1}}_{1}\mu_l\right)\\
&= f\mu_l
\end{aligned}$$

$\subseteq$:

תהי $T\in(\mathcal{D}_c(G))^{\rho(K)}$, אז $T=T*\varepsilon_K$. כמו כן ראינו $\varepsilon_K=\chi_K\cdot\mu_l$ ולכן

$$\begin{aligned}
T &= T*(\chi_K\mu_l)\\
&= (T*\chi_K)\,\mu_l\in C_c^\infty(G)\,\mu_l
\end{aligned}$$

כלומר קיימת $f \in C_c^\infty(G)$ כך ש $T = f\mu_l$. לבסוף לכל $k \in K$

$$f\mu_l = \rho(k)(f\mu_l) = (\rho(k) f)\mu_l$$

(כי $\delta \restriction_K = 1$) ולכן $(f - \rho(k) f)\mu_l = 0 \Longleftarrow \operatorname{supp}(f - \rho(k) f) = \emptyset \Longleftarrow$ $f = \rho(k) f$, כלומר $f \in C_c(G/K)$ ו $T \in C_c(G/K)\mu_l$.

נוכיח את הנוסחה השניה: נקח $\mu = \mu_r$ כאן. ההכלה $\supseteq$ מיידית כמו קודם. תהי $T \in (\mathcal{D}_c(G))^{\lambda(K)}$, אז $\check{T} \in (\mathcal{D}_c(G))^{\rho(K)}$. לכן יש $f \in C_c(G/K)$ כך ש $\check{T} = f\mu_l$ ואז

$$T = \check{\check{T}} = \check{f}\widetilde{\mu_l} = \check{f}\mu_l$$

ו $f \in C_c(K \setminus G)$. ■

מסקנה 16.6 תהי G חבורת־l, μ_l, μ_r מידות האר מימין ומשמאל. אז G פועלת על $\mathcal{D}_c(G)$ מימין (ע"י ρ) ומשמאל (ע"י λ) ו $G \times G$ פועלת על $\mathcal{D}_c(G)$ ע"י $\lambda \times \rho$. אז ארבעת תתי־המרחב הבאים של $\mathcal{D}_c(G)$ שווים זה לזה.

1. A: $C_c^\infty(G)\mu_l = C_c^\infty(G)\mu_r$

2. B: אלגברת הקה, מסומנת גם ב $\mathcal{H}^G = \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_c(G))_{\lambda\times\rho,s} &= \bigcup_{K\subseteq G} (\mathcal{D}_c(G))^{(\lambda\times\rho)(K\times K)}\\ &= \bigcup_{K\subseteq G} \varepsilon_K * \mathcal{D}_c(G) * \varepsilon_K\end{aligned}$$

3. C:

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_c(G))_{\lambda,s} &= \bigcup_{K\subseteq G} (\mathcal{D}_c(G))^{\lambda(K)}\\ &= \bigcup_{K\subseteq G} \varepsilon_K * \mathcal{D}_c(G)\end{aligned}$$

4. D:

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_c(G))_{\rho,s} &= \bigcup_{K\subseteq G} (\mathcal{D}_c(G))^{\rho(K)}\\ &= \bigcup_{K\subseteq G} \mathcal{D}_c(G) * \varepsilon_K\end{aligned}$$

הוכחה: מאחר ש

$$\begin{aligned}C_c^\infty(G) &= \bigcup_{K\subseteq G} C_c^\infty(K\setminus G)\\ &= \bigcup_{K\subseteq G} C_c^\infty(G/K)\\ &= \bigcup_{K\subseteq G} C_c^\infty(K\setminus G/K)\end{aligned}$$

השוויונות $A=C$ ו־$A=D$ נובעות מהלמה. בפרט, $D=C$. לבסוף, $B=C\cap D=C$. ■

17 אלגברת הקה Hecke

17.1 האלגברה $\mathcal{H}_K^G=\mathcal{H}_K$

הגדרה 17.1 תהי G חבורת־l. לכל $K\subseteq G$ נסמן

$$\mathcal{H}_K^G = \mathcal{H}_K=\varepsilon_K*\mathcal{D}_c\left(G\right)*\varepsilon_K\subseteq\mathcal{D}_c\left(G\right)$$

תכונה $\mathcal{H}_K$ היא אלגברה עם פעולת הקונבולוציה ובעלת יחידה ε_K (כי $\varepsilon_K=\varepsilon_K*\varepsilon_K*\varepsilon_K\in\mathcal{H}_K$).

תיאור תהי $T\in\mathcal{D}_c\left(G\right)$. התנאים הבאים שקולים:

1. $T\in\mathcal{H}_K$
2. $T=\varepsilon_K*T$ ו $T=T*\varepsilon_K$
3. $T\in\left(\mathcal{D}_c\left(G\right)\right)^{\lambda(K)}\cap\left(\mathcal{D}_c\left(G\right)\right)^{\rho(K)}$
4. $T=\varepsilon_K*T*\varepsilon_K$

קשרים עם מודולים יהי V מודול חלק של G. ראינו ש $V^K=\varepsilon_KV$. בנוסף מתקיים

$$V^K = \mathcal{H}_KV=\mathcal{H}_KV^K$$

הוכחה:

$$V^K = \varepsilon_KV^K\subseteq\mathcal{H}_KV^K\subseteq\mathcal{H}_KV\subseteq\varepsilon_KV=V^K$$

(המעבר $\mathcal{H}_KV\subseteq\varepsilon_KV$ נובע מכך שכל איבר של $\mathcal{H}_K$ הוא מהצורה $\varepsilon_K*T*\varepsilon_K$) ■

בפרט, V^K הופך ל־$\mathcal{H}_K$ מודול.

כעת תהי $G\subseteq K_1$ עם $K\subseteq K_1\subseteq G$. ראינו ש $V^{K_1}\subseteq V^K$. מתקיים גם $\mathcal{H}_{K_1}\subseteq\mathcal{H}_K$.
אכן, ראינו ש

$$\varepsilon_K\varepsilon_{K_1} = \varepsilon_{K_1}=\varepsilon_{K_1}\varepsilon_K$$

ואז

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{K_1} &= \varepsilon_{K_1}\mathcal{D}_c\left(G\right)\varepsilon_{K_1}\\ &= \varepsilon_K\left(\varepsilon_{K_1}\mathcal{D}_c\left(G\right)\varepsilon_{K_1}\right)\varepsilon_K\subseteq\mathcal{H}_K\end{aligned}$$

לבסוף

$$V^{K_1} = \varepsilon_{K_1}V^K=\mathcal{H}_{K_1}V^K$$

אכן,

$$V^{K_1} = \varepsilon_{K_1}V=\varepsilon_{K_1}\varepsilon_KV=\varepsilon_{K_1}V^K\subseteq\mathcal{H}_{K_1}V^K\subseteq\mathcal{H}_{K_1}V=V^{K_1}$$

17.2 אלגברת הקה

הגדרה 17.2 תהי G חבורת־l. נגדיר

$$\mathcal{H}^G = \mathcal{H} = \bigcup_{K \subseteq G} \mathcal{H}_K$$

תכונה מתוך $(K \subseteq K_1) \Longleftarrow (\mathcal{H}_{K_1} \subseteq \mathcal{H}_K)$ נובע ש$\mathcal{H}$ אלגברה (אולי ללא יחידה).

הערה 17.3 ל$\mathcal{H}$ יש יחידה אם ורק אם G דיסקרטית, ובמקרה זה $1_{\mathcal{H}} = \delta_{1_G}$.

הוכחה: נניח של$\mathcal{H}$ יש יחידה. אז קיימת $K \subseteq G$ כך ש $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}_K$. אז לכל $K' \subseteq G$ עם $K' \subseteq K$ מתקיים $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}_{K'}$. לכן $1_{\mathcal{H}} = 1_{\mathcal{H}_{K'}} = \varepsilon_{K'}$.
בפרט,

$$(\forall K' \subseteq K) \qquad \mathrm{supp} 1_{\mathcal{H}} = \mathrm{supp} \varepsilon_{K'} = K'$$

מכאן נובע $\mathrm{supp} 1_{\mathcal{H}} = \{1_G\}$. לבסוף נחזור ל$K$. אז $\mathrm{supp} 1_{\mathcal{H}} = K$ ולכן $K = \{1_G\}$, ומכאן $\{1_G\}$ פתוחה ו־G דיסקרטית.

בכיוון ההפוך, אם G דיסקרטית אז $K_0 = \{1_G\} \subseteq G$ קומפקטית פתוחה וראינו ש $\varepsilon_{K_0} = \chi_{\{1_G\}} \cdot \mu_l$ כאשר μ_l היא המידת הסופרת, ואז $\delta_{1_G} = \varepsilon_{K_0} \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
&(f \in C_c^\infty(G)) \\
\langle \varepsilon_{K_0}, f \rangle &= \left\langle \chi_{\{1_G\}} \mu_l, f \right\rangle \\
&= \left\langle \mu_l, \chi_{\{1_G\}} f \right\rangle \\
&= f(1_G) \\
&= \langle \delta_{1_G}, f \rangle
\end{aligned}$$

■

תיאורים נוספים ותכונת אידאל

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^G &= C_c^\infty(G)\, \mu_l \\
&= C_c^\infty(G)\, \mu_r \\
&= \bigcup_{K \subseteq G} \varepsilon_K * \mathcal{D}_c(G) \\
&= \bigcup_{K \subseteq G} \mathcal{D}_c(G) * \varepsilon_K
\end{aligned}$$

מסקנה 17.4 $\mathcal{H}^G$ הוא אידאל דו־צדדי ב$\mathcal{D}_c(G)$.

17.3 האיזומורפיזם $(H(G)=)\,C_c^{\infty}\longrightarrow\mathcal{H}^G : f\mapsto f\mu$

תהי μ מידת האר מימין או משמאל. ראינו שהטרנספורמציה הלינארית

$$\begin{array}{rcl}\eta : C_c^{\infty}(G) & \longrightarrow & \mathcal{H}^G\\ f & \mapsto & f\mu\end{array}$$

היא על.

תכונות

1. $\operatorname{supp}f=\operatorname{supp}f\cap\underbrace{\operatorname{supp}\mu_l}_{G}=\operatorname{supp}(f\mu_l)$, בפרט η חד־חד־ערכית. (כי אם $f\mu_l=0$ אז $\operatorname{supp}(f\mu_l)=\emptyset$ ולכן $\operatorname{supp}(f)=\emptyset$ כלומר $f=0$)
2. לכל $K\subseteq G$

$$\begin{array}{rcl}\eta\restriction_{C_c(K\backslash G/K)} : C_c(K\setminus G/K) & \longrightarrow & \mathcal{H}_K^G\\ \cap & & \cap\\ C_c^{\infty}(G) & \longrightarrow & \mathcal{H}^G\end{array}$$

הוא איזומורפיזם, כי μ איזומורפיזם מימין ומשמאל ביחס לG.

3. $\left(\widetilde{f\mu_l}\right)=\check{f}\cdot\delta\cdot\mu_l$. אכן, ראינו ש $\widetilde{\mu_l}=\delta\cdot\mu_l$ ו $\left(\widetilde{f\mu_l}\right)=\check{f}\cdot\widetilde{\mu_l}=\check{f}\cdot\delta\cdot\mu_l$.

17.4 בסיסים

תהי $K\subseteq G$.

הערה 17.5 אם $f\in C_c^{\infty}(G)$ וקיים $g_0\in G$ כך ש $\operatorname{supp}f\subseteq Kg_0K$ אז $f\cdot\mu_r=\delta(g_0)\,f\mu_l$ (כי δ קבועה על Kg_0K). בפרט, $f\mu_l$ ו $f\mu_r$ פרופורציונליות.
כמו כן, לכל $t,s\in G$ מתקיים

$$\begin{aligned}\chi_{sK}\mu_l &= (\lambda(s)\chi_K)\,\mu_l\\ &= \lambda(s)(\chi_K\mu_l)\\ &= \lambda(s)(\varepsilon_K)\\ &= \delta_s*\varepsilon_K\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{Kt}\mu_r &= \left(\rho\left(t^{-1}\right)\chi_K\right)\mu_r\\ &= \left(\rho\left(t^{-1}\right)\chi_K\mu_r\right)\\ &= \rho\left(t^{-1}\right)(\varepsilon_K)\\ &= \varepsilon_K*\delta_t\end{aligned}$$

תיאור הבסיסים

1. נתייחס לפירוק הזר $G=\dot{\bigcup}_{i\in I}s_iK$ ממנו נקבל בסיס

$$\left\{\chi_{s_iK}\mu_l=\delta_{s_i}*\varepsilon_K\right\}_{i\in I}$$

ל $\mathcal{D}_c\left(G\right)^{\rho(K)}=\mathcal{H}^{\rho(K)}$, ואפשר גם לקחת $\left\{\chi_{s_iK}\mu_r\right\}_{i\in I}$.

2. מהפירוק הזר $G=\dot{\bigcup}_{i\in I}Kt_i$ נקבל בסיס

$$\left\{\chi_{Kt_i}\mu_r=\varepsilon_K*\delta_{t_i}\right\}_{i\in I}$$

ל $\mathcal{D}_c\left(G\right)^{\lambda(K)}=\mathcal{H}^{\lambda(K)}$, ואפשר גם לקחת $\left\{\chi_{Kt_i}\mu_l\right\}_{i\in I}$.

3. מהפירוק $G=\bigcup_{j\in J}Kg_jK$ נקבל בסיס $\left\{\chi_{Kg_jK}\mu_l\right\}_{j\in J}$ ל $\mathcal{H}_K^G$ ואפשר גם לקחת $\left\{\chi_{Kg_jK}\mu_r\right\}_{j\in J}$.

הערה 17.6 כאן $\mu_r\left(K\right)=\mu_l\left(K\right)=1$.

תיאור בסיס זה נשים לב שלכל $g\in G$

$$\varepsilon_K*\delta_g*\varepsilon_K \quad\in\quad \mathcal{H}_K$$

ולכן יש $\varphi\in C_c\left(K\setminus G/K\right)$ יחידה כך ש

$$\varepsilon_K*\delta_g*\varepsilon_K \quad=\quad \varphi\mu_l$$

כמו כן,

$$\mathrm{supp}\varphi=\mathrm{supp}\left(\varepsilon_K*\delta_g*\varepsilon_K\right)\quad\subseteq\quad KgK$$

נובע שיש $c\in\mathbb{C}$ כך ש $\varphi=c\chi_{KgK}$.

לחישוב c, נשים לב ש $f:=\chi_{KgK}$ אינווריאנטית להזזות ביחס לK מימין ומשמאל, מכאן ראינו ש (עבור S כללית, וכאן $S=\delta_g$)

$$\left\langle\varepsilon_K*\delta_g*\varepsilon_K,\chi_{KgK}\right\rangle \quad=\quad \left\langle\delta_g,\chi_{KgK}\right\rangle=1$$

לכן

$$\begin{aligned}1=\left\langle\varepsilon_K*\delta_g*\varepsilon_K,\chi_{KgK}\right\rangle=\left\langle\varphi\mu_l,\chi_{KgK}\right\rangle &= \left\langle\mu_l,\varphi\chi_{KgK}\right\rangle\\ &= \left\langle\mu_l,c\chi_{KgK}^2\right\rangle\\ &= \left\langle\mu_l,c\chi_{KgK}\right\rangle\\ &= c\mu_l\left(KgK\right)\end{aligned}$$

ולכן $c=\frac{1}{\mu_l(KgK)}$.

כלומר, $\varepsilon_K*\delta_g*\varepsilon_K$ ו $\chi_{KgK}\mu_l$ פרופורציונליות עם קבוע $0<$. לכן בסיס ל $\mathcal{H}_K$ נתון ע"י $\left\{\varepsilon_K*\delta_{g_j}*\varepsilon_K\right\}_{j\in J}$.

17.5 אלגברת הקה וקונבולוציה

ראינו שיש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים (1)

$$\begin{array}{rcl}(H(G)=)\,C_c^{\infty}(G) & \overset{\approx}{\longrightarrow} & \mathcal{H}^G \\ f & \mapsto & f\mu_l\end{array}$$

ולכל $K\subseteq G$ הצמצום איזומורפיזם (2)

$$\begin{array}{rcl}(H(G,K)=)\,C_c(K\setminus G/K) & \overset{\approx}{\longrightarrow} & \mathcal{H}_K^G \\ f & \mapsto & f\mu_l\end{array}$$

(ואפשר גם לקחת $f\mapsto f\mu_r=\delta f\mu_l$)

מאחר ש$\mathcal{H}^G$ אלגברה (בד"כ ללא יחידה) נובע ש $C_c^{\infty}(G)$ הופך לאלגברה (בד"כ ללא יחידה) עם הדרישה ש(1) הוא איזומורפיזם של אלגבראות, ואז נקבל שגם (2) איזומורפיזם של אלגבראות עם יחידה (כי ל$\mathcal{H}_K^G$ יש יחידה ε_K), והיחידה של $H(G,K)=C_c^{\infty}(K\setminus G/K)$ היא χ_K (כי $\varepsilon_K=\chi_K\mu_K$ היחידה של $\mathcal{H}_K^G$).

הערה 17.7 מאחר ש $\delta\cdot:\mathcal{D}_c(G)\overset{\approx}{\to}\mathcal{D}_c(G)$ (ככפל בכרקטר של דיסטריבוציות), נובע ש $\delta\cdot:\mathcal{H}^G\overset{\approx}{\longrightarrow}\mathcal{H}^G$ אוטומורפיזם, ולכן אם נחליף את (1) ב

$$f\mapsto f\mu_r=\delta f\mu_l$$

נקבל אותה מכפלה על $H(G)$ ו $H(G,K)$ (אולי כתובה בצורה אחרת).

נסמן גם את הכפל ב$H(G)$ (וב $H(G,K)$) ב$*$ - <u>קונבולוציה</u>.

טענה 17.8 הכפל ב$H(G)$ (וב$H(G,K)$) נתון ע"י הקונבולוציה:

$$(h*f)(x)=\int_G h(y)\,f\left(y^{-1}x\right)d\mu_l(y)\qquad\left(h,f\in H(G)=C_c^{\infty}(G)\right)$$

הוכחה: (בדיקה): $h*f\in C_c^{\infty}(G)$ נקבעת עפ"י:

$$(h\mu_l)*(f\mu_l)\;=\;(h*f)\,\mu_l$$

אבל בפרק על קונבולוציה של דיסטריבוציה עם פונקציה ראינו

$$\underbrace{(h\mu_l)}_{T}*(f\mu_l)\;=\;\Big(\underbrace{(h\mu_l)}_{T}*f\Big)\,\mu_l$$

כאשר

$$\begin{aligned}((h\mu_l)*f)(x) &= \int_G f\left(y^{-1}x\right)d(h\mu_l)(y)\\ &= \int_G h(y)\,f\left(y^{-1}x\right)d\mu_l(y)\end{aligned}$$

■

הערה 17.9 $*$ על $H(G)$ אסוציאטיבי (ראינו ש $\mathcal{H}^G$ אלגברה).

הערה 17.10 $1_{H(G,K)} = \chi_K$

טענה 17.11 הכפל ב$H(G)$ (וב$H(G,K)$) נתון ע"י הקונבולוציה

$$(h * f)(x) = \int_G h(y) f\left(y^{-1}x\right) d\mu_l(y) \qquad (h, f \in H(G) = C_c^\infty(G))$$
$$(h * f)(x) = \int_G h\left(xy^{-1}\right) f(y)\, d\mu_r(y)$$

נוסחאות נוספות:

$$\begin{aligned}(h * f)(x) &= \int_G h(xy) f\left((xy)^{-1} x\right) d\mu_l(y) \\ &= \int_G h(xy) f\left(y^{-1}\right) d\mu_l(y) \\ &= \int_G h\left(xy^{-1}\right) f(y)\, d\mu_r(y)\end{aligned}$$

השוויון האחרון נכון כי $\mu_r = \widecheck{\mu_l} = \delta\mu_l$.

17.6 מכפלה של חבורות

תהיינה G_1, G_2 חבורות-l.
μ_1, μ_2 מידות האר משמאל על G_1, G_2. אז $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ מידת האר משמאל על $G_1 \times G_2$.
נסתכל בתרשים

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(G_1) \otimes C_c^\infty(G_2) = H(G_1) \otimes H(G_2) & \underset{f_1 \otimes f_2 \mapsto f_1 f_2}{\longrightarrow} & H(G_1 \times G_2) = C_c^\infty(G_1 \times G_2) \\ f_1 \otimes f_2 \mapsto (f_1\mu_1) \otimes (f_2\mu_2) \downarrow & & \downarrow f \mapsto f\mu \\ \mathcal{D}_c(G_1) \otimes \mathcal{D}_c(G_2) & \underset{T \otimes_a S \mapsto T \otimes S}{\longrightarrow} & \mathcal{D}_c(G_1 \times G_2) \end{array}$$

(עם $(f_1 f_2)(x, y) = f_1(x) f_2(y)$)

טענה 17.12 התרשים חילופי.

הוכחה: צריך להוכיח ש

$$\begin{aligned}(f_1\mu_1) \otimes (f_2\mu_2) &= (f_1 f_2)\, \mu \\ (f_1\mu_1) \otimes (f_2\mu_2) &= (f_1 f_2)\, \mu_1 \otimes \mu_2\end{aligned}$$

די לבדוק זאת על $\varphi = \varphi_1\varphi_2 \in C_c^\infty\left(G_1 \times G_2\right)$ כאשר $\varphi_1 \in C_c^\infty\left(G_1\right)$ ו $\varphi_2 \in C_c^\infty\left(G_2\right)$.
ואכן

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(f_1\mu_1\right) \otimes \left(f_2\mu_2\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle f_1\mu_1, \varphi_1 \right\rangle \left\langle f_2\mu_2, \varphi_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \mu_1, f_1\varphi_1 \right\rangle \left\langle \mu_2, f_2\varphi_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \mu_1 \otimes \mu_2, \left(f_1\varphi_1\right)\left(f_2\varphi_2\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \mu_1 \otimes \mu_2, \left(f_1 f_2\right)\left(\varphi\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(f_1 f_2\right)\left(\mu_1 \otimes \mu_2\right), \left(\varphi\right) \right\rangle
\end{aligned}$$

■

מסקנה 17.13 החץ העליון בדיאגרמה הוא איזומורפיזם של אלגבראות (בד"כ ללא יחידה), כאשר הכפל מימין הוא קונבולוציה ומשמאל הוא כפל של מכפלה טנזורית של אלגבראות.

הוכחה: ראינו בעבר שזהו איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים וצריך להוכיח כפליות. החצים $\downarrow\rightarrow\downarrow$ הם הומומורפיזמים של אלגבראות ולכן $\rightarrow\downarrow$ הומומורפיזם של אלגבראות ולכן גם $\xrightarrow{\eta}\downarrow_\theta$ הומומורפיזם, וθ חד־חד־ערכית. לבסוף:

$$\begin{aligned}
\left(\theta \circ \eta\right)\left(f_1 \otimes f_2\right) &= \left(\theta \circ \eta\right)\left(f_1\right) \otimes \left(\theta \circ \eta\right)\left(f_2\right) \\
&= \theta\left(\eta\left(f_1\right) \otimes \eta\left(f_2\right)\right)
\end{aligned}$$

מאחר שθ חד־חד־ערכית נובע שη הומומורפיזם של אלגבראות ולכן איזומורפיזם של אלגבראות. ■

מסקנה 17.14 אם נתאר את אלגברות הקה בעזרת דיסטריבוציות נקבל ש

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{G_1} \otimes \mathcal{H}^{G_2} &\xrightarrow{\approx} \mathcal{H}^{G_1 \times G_2} \\
T \otimes_a S &\mapsto T \otimes S
\end{aligned}$$

איזומורפיזם של אלגבראות.

מסקנה 17.15 כעת תהיינה $K_1 \subseteq G_1$, $K_2 \subseteq G_2$, ונסמן $K = K_1 \times K_2 \subseteq G_1 \times G_2$ (כרגיל קומפקטיות פתוחות). ברור שאם $f_{1,2} \in H\left(G_{1,2}, K_{1,2}\right)$ אז $f = f_1 f_2 \in H\left(G, K\right)$. לכן האיזומורפיזם של אלגבראות מקודם ($H\left(G_1 \times G_2\right) \underset{f_1 \otimes f_2 \mapsto f_1 f_2}{\approx} H\left(G_1\right) \otimes H\left(G_2\right)$) יוצר הומומורפיזם חד־חד־ערכי של אלגבראות:

$$\begin{aligned}
H\left(G_1, K_1\right) \otimes H\left(G_2, K_2\right) &\longrightarrow H\left(G, K\right) \\
f_1 \otimes f_2 &\mapsto f_1 f_2
\end{aligned}$$

ויחידה נשלחת ליחידה כי $\chi_{K_1} \cdot \chi_{K_2} = \chi_K$. נראה שזהו איזומורפיזם. די להראות שהוא על. לצורך כך די לבדוק שלכל $\xi = \left(\xi_1, \xi_2\right) \in G$ מתקיים כי הפונקציה $\chi_{K\xi K}$ בתמונה. אבל מתקיים

$$\chi_{K_1\xi_1K_1} \cdot \chi_{K_2\xi_2K_2} = \chi_{K\xi K}$$

מסקנה 17.16 בשפה של דיסטריבוציות יש איזומורפיזם של אלגבראות עם מידה (?)

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H}_{K_1}^{G_1}\otimes\mathcal{H}_{K_2}^{G_2} & \overset{\approx}{\longrightarrow} & \mathcal{H}_{K_1\times K_2}^{G_1\times G_2}\\ T\otimes_a S & \mapsto & T\otimes S\end{array}$$

יישום למכפלה טנזורית של מודולים בנוסף, תהיינה (π_1,V_1), (π_2,V_2) הצגות חלקות ו $K_1\subseteq G_1$, $K_2\subseteq G_2$ ואז $K=K_1\times K_2\subseteq G_1\times G_2=G$. אז

$$(V_1\otimes V_2)^{K_1\times K_2}\qquad\left(=V^{K_1}\otimes V^{K_2}\right)$$

הוא $\mathcal{H}_{K_1\times K_2}^{G_1\times G_2}$ מודול. לפי המסקנה האחרונה, $(V_1\otimes V_2)^{K_1\times K_2}$ הופך ל $\mathcal{H}_{K_1}^{G_1}\otimes\mathcal{H}_{K_2}^{G_2}$ מודול.

מצד שני, השוויון $(V_1\otimes V_2)^{K_1\times K_2}=V^{K_1}\otimes V^{K_2}$ הופך מרחב וקטורי זה ישירות ל $\mathcal{H}_{K_1}^{G_1}\otimes\mathcal{H}_{K_2}^{G_2}$ מודול. שני מבנים אלה של $\mathcal{H}_{K_1}^{G_1}\otimes\mathcal{H}_{K_2}^{G_2}$ זהים. **הוכחה:** (בדיקה): נובע מהתרשים, או ישירות מהנוסחה

$$\begin{aligned}\left(\pi_1\otimes\pi_2\right)\left(T\otimes S\right) &= \pi_1\left(T\right)\otimes\pi_2\left(S\right)\\ \left(T\in\mathcal{D}_c\left(G_1\right),S\in\mathcal{D}_c\left(G_2\right)\right)\end{aligned}$$

■

18 מודולים מעל אלגברת הקה

הגדרה 18.1 (מינוח): תהי A אלגברה (אולי בלי יחידה) וM A־מודול. M נקרא <u>לא מנוון</u> אם $M=AM$.

הערה 18.2

1. אם A אלגברה עם יחידה, הפועלת כיחידה, כלומר אם גם $1_Av=v$ לכל $v\in M$, אז M לא מנוון (כי $M=1_AM$).
2. אם G חבורת־l, $\mathcal{H}^G:=\mathcal{H}$ אלגברת הקה וM הוא $\mathcal{H}$־מודול, אז M לא מנוון אם ורק אם לכל $v\in M$ יש $K\subseteq G$ כך ש $v=\varepsilon_Kv$.

   הוכחה: אם M לא מנוון יש שוויון

$$\begin{aligned}v &= \sum_{\text{finite}}h_iv_i\\ (v_i\in M,h_i\in\mathcal{H})\end{aligned}$$

ויש $K\subseteq G$ עם $h_i\in\mathcal{H}_K=\varepsilon_K*\mathcal{H}*\varepsilon_K$ לכל i ואז $h_i=\varepsilon_K*h_i$ לכל i ולכן $v=\varepsilon_Kv$. ■

מסקנה 18.3 תת־מודול של $\mathcal{H}$־מודול לא מנוון הוא לא מנוון.

כעת תהי G חבורת־l, $\mathcal{H}$ אלגברת הקה, ויהי M G־מודול חלק. אז M הופך ל$\mathcal{D}_c(G)$ מודול, ובפרט ל$\mathcal{H}$ מודול, ולכל $v \in M$ יש $K \subseteq G$ עם $v \in M^K$ (כי M חלק) ומכאן $v \in \varepsilon_K M$ ולכן M הוא $\mathcal{H}$־מודול לא מנוון.

קיבלנו העתקה

$$\alpha : \{\text{Smooth } G\text{-modules}\} \quad \longrightarrow \quad \left\{\text{Non-degenerate } \mathcal{H}^G\text{-modules}\right\}$$

השומרת על המבנה של מרחבים וקטוריים.

הערה 18.4 את M^K ניתן לתאר ישירות ע"י $M^K = \varepsilon_K M$ בעזרת המבנה של M כ־$\mathcal{H}$־מודול.

הומומורפיזמים יהיו M, N שני G־מודולים חלקים, $\tau : M \to N$ טרנספורמציה לינארית (בין מרחבים וקטוריים). התנאים הבאים שקולים:

τ G־הומומורפיזם $\iff$ τ $\mathcal{H}^G$־הומומורפיזם. **הוכחה:** (בדיקה): $\Longleftarrow$: כי ראינו שτ גם $\mathcal{D}_c(G)$ הומומורפיזם. (זה הופיע כמסקנה מתיאור $\pi(T)v$)

$\Longrightarrow$: יהיו $v \in V$, $g \in G$. תהי $K \subseteq G$ עם $v \in M^K$. נסמן בπ את ההצגה של G על M. אז:

$$\begin{aligned}
\tau(gv) &= \tau(\pi(\delta_g)v) \\
&= \tau(\pi(\delta_g)\pi(\varepsilon_K)v) \\
&= \tau(\pi(\delta_g * \varepsilon_K)v) \\
&= \pi(\delta_g * \varepsilon_K)\tau(v) \\
&= \pi(\delta_g)\pi(\varepsilon_K)\tau(v) \\
&= g(\tau(\pi(\varepsilon_K)v)) \\
&= g\tau(v)
\end{aligned}$$

■

מסקנה 18.5

1. באותם סימונים $\tau : M \to N$ איזומורפיזם של G־מודולים $\iff$ $\tau : M \to N$ איזומורפיזם של $\mathcal{H}$־מודולים. (כי התנאי הוא שτ הפיך כט"ל)

2. יהי M $\mathcal{H}$־מודול לא מנוון, אז יש לכל היותר מבנה אחד של G־מודול חלק על M המשרה את המבנה הנתון של ה$\mathcal{H}$־מודול M. כלומר α חד־חד־ערכית.

הוכחה: נסמן בM_1, M_2 שני G־מודולים חלקים המשרים על M את המבנה הנתון של $\mathcal{H}$־מודול. אז ניישם את 1 לטרנספורמציה הלינארית $\tau = \mathrm{id}_M : M_1 \to M_2$. אז זהו איזומורפיזם של $\mathcal{H}$־מודולים ולכן זהו איזומורפיזם של G־מודולים (לפי 1). לכן $M_1 = M_2$ (גם כG־מודולים). ■

תת־מודולים

טענה 18.6 יהי M G־מודול חלק. (ונתאר את M כ־$\mathcal{H}$־מודול לא מנוון). יהי $N \subseteq M$ תת מרחב וקטורי. אז $N \subseteq M$ תת G־מודול $\iff$ אז $N \subseteq M$ תת $\mathcal{H}$־מודול.

הערה 18.7 אם L מודול (מעל חבורה או אלגברה) ו $L' \subseteq L$ תת מרחב וקטורי, אז $L' \subseteq L$ תת־מודול $\iff$ יש על L' מבנה של מודול כך שההכלה $\mathrm{inc} : L' \hookrightarrow L$ הומומורפיזם של מודולים.

הוכחה: $N \subseteq M$ תת G־מודול $\iff$ יש על N מבנה של G־מודול כך שההכלה $\mathrm{inc} : N \hookrightarrow M$ G־הומומורפיזם (ואז N חלק אוטומטית). $\iff$ יש על N מבנה של $\mathcal{H}$־מודול כך שההכלה $\mathrm{inc} : N \hookrightarrow M$ $\mathcal{H}$־הומומורפיזם (ואז N לא מנוון אוטומטית). $\iff$ N תת $\mathcal{H}$־מודול של M. ■

מסקנה 18.8 אם M G־מודול חלק אז M אי־פריק כG־מודול $\iff$ M אי־פריק כ־$\mathcal{H}$־מודול.

נבנה העתקה בכיוון ההפוך

$$\beta : \left\{\text{Non-degenerate } \mathcal{H}^G\text{-modules}\right\} \quad \longrightarrow \quad \{\text{Smooth } G\text{-modules}\}$$

השומרת על המבנה של מרחבים וקטוריים.

יהי M $\mathcal{H}$־מודול לא מנוון. יהי $v \in M$ ויהי $K \subseteq G$ כך ש $v = \varepsilon_K v$. לכל $g \in G$ נגדיר $gv = (\delta_g * \varepsilon_K)\, v$.

אי־תלות בבחירת K: די להראות ש $K_1 \subseteq K \subseteq G$ נותן אותה תוצאה. מתקיים

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{K_1} v &= \varepsilon_{K_1} (\varepsilon_K v) \\
&= (\varepsilon_{K_1} * \varepsilon_K)\, v \\
&= \varepsilon_K v \\
&= v
\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}
(\delta_g * \varepsilon_{K_1})\, v &= (\delta_g * \varepsilon_{K_1})\, (\varepsilon_K v) \\
&= (\delta_g * \varepsilon_{K_1} * \varepsilon_K)\, (v) \\
&= (\delta_g * \varepsilon_K)\, (v)
\end{aligned}$$

M G־מודול:

1. $1_G v = v$ ־ מיידי

2. יהיו $g_1, g_2 \in G$. בסימונים לעיל:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{gKg^{-1}}(gv) &= \varepsilon_{gKg^{-1}}((\delta_g * \varepsilon_K)v) \\ &= \left(\varepsilon_{gKg^{-1}} * (\delta_g * \varepsilon_K)v\right) \\ &= \left(\delta_g * \varepsilon_K * \delta_{g^{-1}} * (\delta_g * \varepsilon_K)v\right) \\ &= (\delta_g * \varepsilon_K * \varepsilon_K)v \\ &= (\delta_g * \varepsilon_K)v \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} g_1(gv) &= \left(\delta_{g_1} * \varepsilon_{gKg^{-1}}\right)(gv) \\ &= \left(\left(\delta_{g_1} * \varepsilon_{gKg^{-1}}\right) * (\delta_g * \varepsilon_K)\right)(v) \\ &= \left(\left(\delta_{g_1} * \left(\delta_g * \varepsilon_K * \delta_{g^{-1}}\right)\right) * (\delta_g * \varepsilon_K)\right)(v) \\ &= ((\delta_{g_1} * \delta_g) * \varepsilon_K)(v) \\ &= (\delta_{g_1g} * \varepsilon_K)(v) \\ &= (g_1g)v \end{aligned}$$

M חלק, כי בסימונים לעיל: לכל $k \in K$

$$kv = (\delta_k * \varepsilon_K)v = \varepsilon_K v = v$$

כלומר $v \in M^K$.

טענה 18.9 α וβ הופכיות אחת לשנייה.

הוכחה: נראה ש$\alpha \circ \beta$ הוא הזהות ואז $\alpha\beta\alpha = \alpha$ ומאחר שα חח"ע נקבל שגם $\beta \circ \alpha$ הוא הזהות.

יהי M $\mathcal{H}$-מודול לא מנוון. נסמן ב $h \cdot v$ את הפעולה של $\mathcal{H}$ על M ($v \in M$, $h \in \mathcal{H}$).

בעזרת β נקבל מבנה של G-מודול חלק על M, ונסמן בπ את ההצגה המתאימה של G ובπ_1 את ההצגה המתאימה של $\mathcal{H}$. צריך להוכיח

$$\pi(h)v = h \cdot v \qquad (h \in \mathcal{H}, v \in M)$$

תהי $K \subseteq G$ כך ש $v = \varepsilon_K v$ (M לא מנוון). אם $K_1 \subseteq K$ אז

$$\begin{aligned} \varepsilon_{K_1}v &= \varepsilon_{K_1} * (\varepsilon_K v) \\ &= (\varepsilon_{K_1} * \varepsilon_K)(v) \\ &= \varepsilon_K v \\ &= v \end{aligned}$$

ולכן ניתן להקטין את K ולהניח ש $h \in \mathcal{H}^{\rho(K)}$. מתקיים גם ביחס להצגה π ש

$$v \in M^{\pi(K)} = M^{\pi_1(K)}$$

כי

$$\pi(k)v = (\delta_k * \varepsilon_K)v = \varepsilon_K v = v$$

מאחר ש $v \in M^{\pi_1(K)}$ נובע ש $\pi_1(\varepsilon_K)v = v$. ל$h \in \mathcal{H}^{\rho(K)}$ יש תיאור מהצורה:

$$h = \sum_{\text{finite}} z_i\left(\delta_{g_i} * \varepsilon_K\right) = \left(\sum_{\text{finite}} z_i\delta_{g_i}\right) * \varepsilon_K \qquad \binom{z_i\in\mathbb{C}}{g_i\in G}$$

(ראינו כי הקבוצה $\{\delta_{g_i} * \varepsilon_K\}$ בסיס של $\mathcal{H}^{\rho(K)}$)
כעת:

$$\begin{aligned}\pi(h)v &= \sum z_i\pi\left(\delta_{g_i}\right)\pi\left(\varepsilon_K\right)v\\ &= \sum z_i\pi\left(\delta_{g_i}\right)v\end{aligned}$$

אבל $\pi\left(\delta_{g_i}\right)v$ היא פעולת האיבר $g_i \in G$ על v לפי בניית β. כלומר

$$\pi\left(\delta_{g_i}\right)v = \left(\delta_{g_i} * \varepsilon_K\right)\cdot v$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\pi(h) &= \sum_{\text{finite}} z_i\pi\left(\delta_{g_i}\right)\pi\left(\varepsilon_K\right)v\\ &= \sum_{\text{finite}} z_i\left(\delta_{g_i} * \varepsilon_K\right)v\\ &= \left(\sum_{\text{finite}}\left(z_i\left(\delta_{g_i} * \varepsilon_K\right)\right)\right)v\\ &= hv\end{aligned}$$

■

19 הצגות אי־פריקות של G ושל $\mathcal{H}_K^G$

הערה 19.1 יהי M G־מודול חלק (עם הצגה π) אז M $\mathcal{H}$־מודול לא מנוון. עבור $K \subseteq G$ מתקיים $\mathcal{H}_K = \varepsilon_K\mathcal{H}\varepsilon_K$ ואז $M^K = \varepsilon_K M$ הוא $\mathcal{H}_K$־מודול, ו$\mathcal{H}_K$ אלגברה עם יחידה ε_K.
ההצגה של $\mathcal{H}_K$ על M^K מסומנת בπ_K ב[BZ].

למה 19.2 בסימונים האלה, אם $N' \subseteq M^K$ תת־ $\mathcal{H}_K$ מודול ואם $N \subseteq M$ הוא ה$\mathcal{H}$־מודול (או G־מודול) הנוצר ע"י N', אז

$$\varepsilon_K N = N^K = N'$$

הוכחה: נרשום

$$N = N' + \mathcal{H}N'$$

(ל-$\mathcal{H}$ אולי אין יחידה ולכן צריך לחבר עם N')

$$\begin{aligned} N = N' + \mathcal{H}N' &= \varepsilon_K N' + \mathcal{H}N' \\ &= \mathcal{H}N' = \mathcal{H}\varepsilon_K N' \end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} N^K &= \varepsilon_K N \\ &= \varepsilon_K \left(\mathcal{H}\varepsilon_K N'\right) \\ &= \left(\varepsilon_K \mathcal{H}\varepsilon_K\right) N' \\ &= \mathcal{H}_K N' \\ &= N' \end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נכון כי ל-$\mathcal{H}_K$ יש יחידה. ■

טענה 19.3 בסימונים לעיל:

1. אם M אי־פריק אז לכל $K \subseteq G$ מתקיים $M^K = 0$ או M^K הוא $\mathcal{H}_K$ מודול אי־פריק.
2. נניח שלכל $K_1 \subseteq G$ יש $K \subseteq G$ עם $K \subseteq K_1$ כך ש $M^K = 0$ או M^K הוא $\mathcal{H}_K$-מודול אי־פריק, אז M אי־פריק.

מסקנה 19.4 M אי־פריק $\Longleftrightarrow$ לכל $K \subseteq G$, $M^K = 0$ או M^K הוא $\mathcal{H}_K$ מודול אי־פריק.

הוכחה:

1. בדרך השלילה, נניח $M^K \neq 0$ ופריק כ-$\mathcal{H}_K$ מודול. בסימני הלמה יש $0 \neq N' \subsetneqq M^K$ תת־$\mathcal{H}_K$ מודול. מהלמה נקבל תת $\mathcal{H}$-מודול $N \subseteq M$ עם $N^K = N'$ ולכן $N \neq M$ (כי $N^K = N' \neq M^K$) ו-$N \neq 0$ (כי $N' \neq 0$), ולכן M פריק, סתירה.
2. בדרך השלילה, נניח ש-M פריק: $0 \neq N \subsetneqq M$ תת־$\mathcal{H}$-מודול. מאחר ש $M/N \neq 0$ ו $N \neq 0$ חלקים, יש $K_1 \subseteq G$ כך ש $(M/N)^{K_1} \neq 0$ ו $N^{K_1} \neq 0$.
אז לכל $K \subseteq G$ עם $K \subseteq K_1$ מתקיים $(M/N)^K \neq 0$ ו $N^K \neq 0$.
מאחר ש
$$0 \quad\longrightarrow\quad N^K \longrightarrow M^K \longrightarrow (M/N)^K \to 0$$
מדויקת, נובע ש-M^K פריק כ $\mathcal{H}^K$ מודול, סתירה.

■

טענה 19.5 לכל $\mathcal{H}_K$-מודול פשוט N, קיים G-מודול <u>חלק פשוט</u> M, כך ש $N \cong M^K$ (איזומורפיזם של $\mathcal{H}_K$ מודולים).

הוכחה:

שלב ראשון: נמצא $\mathcal{H}$־מודול L לא מנוון כך שN הוא $\mathcal{H}_K$־איזומורפי לתת $\mathcal{H}_K$־מודול של L^K, כלומר אחרי שינוי N ברמה של תורת הקבוצות: $N \subseteq L^K$.

N הוא $\mathcal{H}_K$ ציקלי (כי אי־פריק). לכן יש אידאל משמאל מקסימלי $I \subseteq \mathcal{H}_K$ כך ש $N \cong \mathcal{H}_K/I$. (לוקחים $0 \neq v \in N$ ומסתכלים על ההעתקה $\underset{h \mapsto h \cdot v}{\mathcal{H}_K \to N}$ ומשתמשים במשפט האיזומורפיזם הראשון. מסיקים שהאידאל מקסימלי ממשפט האיזומורפיזם השלישי)

כמו כן, $\mathcal{H}$ הוא בעצמו $\mathcal{H}$־מודול משמאל לא מנוון. (כי $\mathcal{H} = \bigcup_{K \subseteq G} \mathcal{H}_K$ ו $\mathcal{H}_K = \varepsilon_K \mathcal{H}_K$) ו $I \subseteq \mathcal{H}_K$ תת־$\mathcal{H}_K$ מודול. נשתמש בלמה עם $N' = I$. נסמן ב$J \subseteq \mathcal{H}$ את התת $\mathcal{H}$־מודול של $\mathcal{H}$ הנוצר ע"י I. לפי הלמה

$$I \quad = \quad J^K = \varepsilon_K J$$

מתוך

$$0 \quad \longrightarrow \quad J \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}/J \longrightarrow 0$$

מדויקת, מקבלים

$$0 \quad \longrightarrow \quad J^K \longrightarrow \underbrace{\mathcal{H}^K}_{=\mathcal{H}_K = \varepsilon_K \mathcal{H}} \longrightarrow (\mathcal{H}/J)^K \longrightarrow 0$$

סדרה מדויקת של $\mathcal{H}_K$ מורפיזמים. לבסוף:

$$N \cong \frac{\mathcal{H}_K}{I} \quad = \quad \frac{\varepsilon_K \mathcal{H} \varepsilon_K}{J^K} \subseteq \frac{\varepsilon_K \mathcal{H}}{J^K} \cong (\mathcal{H}/J)^K$$

ולכן אפשר לקחת $L = \mathcal{H}/J$.

שלב שני: יהי M תת־מודול של L הנוצר ע"י N, אז M לא מנוון ולפי הלמה (עם $N' = N$) נובע ש $M^K = N$.

שלב שלישי: לפי צורן, קיים בM תת $\mathcal{H}$־מודול מקסימלי ביחס לתכונה $\varepsilon_K V = V^K = 0$. אז $M/V \neq 0$ (כי אחרת $V = M$ ואז $N = M^K = V^K = 0$, סתירה).

נראה שM/V הוא $\mathcal{H}$־מודול פשוט. אכן, יהי $V \subsetneqq W \subsetneqq M$ תת $\mathcal{H}$־מודול. אז $0 \neq W^K \subseteq M^K = N$ (כי V מקסימלי ביחס לתכונה זו), אבל N $\mathcal{H}_K$־מודול פשוט, ולכן $W^K = N$. אבל M נוצר ע"י N כ$\mathcal{H}$־מודול וW שהינו $\mathcal{H}$־מודול מכיל את $W^K = N$, ולכן $W = M$. סתירה. לכן M/V מודול פשוט.

לבסוף, מתוך הסדרה המדויקת של $\mathcal{H}$־מודולים לא מנוונים

$$0 \quad \longrightarrow \quad V \longrightarrow M \longrightarrow M/V \longrightarrow 0$$

נקבל סדרה מדויקת של $\mathcal{H}_K$־מודולים

$$0 \quad \longrightarrow \quad \underbrace{V^K}_{=0} \longrightarrow M^K \longrightarrow (M/V)^K \longrightarrow 0$$

ולכן $M^K \cong (M/V)^K$ וניתן לקחת את M/V. ■

מסקנה 19.6 נניח ש $K\subseteq K_1\subseteq G$ תת־חבורות פתוחות קומפקטיות. ראינו ש $\mathcal{H}_{K_1}\subseteq\mathcal{H}_K$. יהי N $\mathcal{H}_K$־מודול פשוט, אז

$$\mathcal{H}_{K_1}N \quad = \quad \varepsilon_{K_1}N$$

הוא $\mathcal{H}_{K_1}$־פשוט או 0.

הוכחה: יהי V G־מודול חלק פשוט, עם $N=V^K$, אז $V^{K_1}=0$ או V^{K_1} $\mathcal{H}_{K_1}$־מודול פשוט. אבל ראינו ש

$$\mathcal{H}_{K_1}V^K \quad = \quad V^{K_1}$$

ולכן יש איזומורפיזם של $\mathcal{H}_{K_1}$ מודולים $\mathcal{H}_{K_1}N\cong V^{K_1}$ ולכן $\mathcal{H}_{K_1}N$ הוא 0 או $\mathcal{H}_{K_1}$־פשוט. לבסוף, $\varepsilon_{K_1}\mathcal{H}_{K_1}=\mathcal{H}_{K_1}$ ולכן

$$\varepsilon_{K_1}N \quad \subseteq \quad \mathcal{H}_{K_1}N=\varepsilon_{K_1}\mathcal{H}_{K_1}N\subseteq\varepsilon_{K_1}N$$

ומכאן $\mathcal{H}_{K_1}N=\varepsilon_{K_1}N$. ■

טענה 19.7 יהיו M_1,M_2 שני G־מודולים פשוטים. אם קיים $K\subseteq G$ כך ש $M_1^K\cong M_2^K\neq 0$ (איזומורפיזם של $\mathcal{H}_K$־מודולים) אז $M_1\cong M_2$ (איזומורפיזם של G־מודולים).

הוכחה: M_1, M_2 נוצרים ע"י M_1^K,M_2^K כ$\mathcal{H}$ מודולים (ראינו כי M G־מודול פשוט $\iff$ M $\mathcal{H}$־מודול פשוט). לכן

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1^K+\mathcal{H}M_1^K \\ &= \varepsilon_K M_1^K+\mathcal{H}M_1^K \\ &= \mathcal{H}M_1^K \end{aligned}$$

ובאופן דומה לM_2. יהי $\varphi:M_1^K\to M_2^K$ $\mathcal{H}_K$־איזומורפיזם. נרצה להגדיר

$$\binom{t_i\in M_1^K}{h_i\in\mathcal{H}} \qquad f\left(\sum_{\text{finite}}h_it_i\right)=\sum_{\text{finite}}h_i\varphi\left(t_i\right)$$

אם הוא מוגדר, ברור שהוא עונה על הדרישות. (זה יהיה G־איזומורפיזם כי M_1,M_2 פשוטים)

לכן צ"ל

$$\sum h_it_i=0 \quad \Longrightarrow \quad \sum h_i\varphi\left(t_i\right)=0$$

נסמן

$$N \quad = \quad \left\{\underbrace{\sum h_i\varphi\left(t_i\right)}_{\in M_2}\mid\underbrace{\sum h_it_i}_{\in M_1}=0\right\}$$

צ"ל $N=0$. $N\subseteq M_2$ הוא תת $\mathcal{H}$-מודול, ולכן אם $N\neq 0$ אז $N=M_2$. כלומר, לכל $v\in M_2$ יש תיאור

$$v = \sum h_i\varphi(t_i)$$

עם $\sum h_it_i=0$. נגיע לסתירה.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_K v &= \sum \varepsilon_K h_i \varphi(t_i) \\
\underbrace{}_{\substack{t_i\in M_1^K=\varepsilon_K M_1\\ \Longrightarrow t_i=\varepsilon_K t_i}} &= \sum \varepsilon_K h_i \varphi(\varepsilon_K t_i) \\
&= \sum \varepsilon_K h_i \varepsilon_K \varphi(t_i) \\
&= \varphi\left(\sum \varepsilon_K h_i \varepsilon_K t_i\right) \\
&= \varphi\left(\varepsilon_K \sum h_i \varepsilon_K t_i\right) \\
\underbrace{}_{t_i=\varepsilon_K t_i} &= \varphi\left(\varepsilon_K \underbrace{\sum h_i t_i}_{0}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

לכן $M_2^K=\varepsilon_K M_2=0$ סתירה. ■

מסקנה 19.8 נניח $K\subseteq K_1\subseteq G$. ראינו $\mathcal{H}_{K_1}\subseteq\mathcal{H}_K$ ולכן לכל $\mathcal{H}_K$ מודול N מתאים $\mathcal{H}_{K_1}$-מודול

$$\mathcal{H}_{K_1}N = \varepsilon_{K_1}N$$

1. אם N $\mathcal{H}_K$-מודול פשוט אז $\varepsilon_{K_1}N$ הוא 0 או $\mathcal{H}_{K_1}$-פשוט (ראינו).
2. לכל N_1 $\mathcal{H}_{K_1}$-מודול פשוט קיים $\mathcal{H}_K$ מודול פשוט N כך ש $N_1\cong\varepsilon_{K_1}N$ (איזומורפיזם של $\mathcal{H}_{K_1}$-מודולים) וN נקבע באופן יחיד עד כדי איזומורפיזם של $\mathcal{H}_K$-מודולים.

הוכחה:

קיום: קיים G-מודול חלק פשוט V כך ש $N_1=\varepsilon_{K_1}V\left(=V^{K_1}=\mathcal{H}_{K_1}V\right)$. נסמן $N=\varepsilon_K V\left(=V^K=\mathcal{H}_K V\right)$. אז

$$\varepsilon_{K_1}N = \varepsilon_{K_1}\varepsilon_K V=\varepsilon_{K_1}V=N_1$$

וכמו כן ידוע שN הוא 0 או $\mathcal{H}_K$ פשוט, אבל לא ייתכן כי $N=0$, כי $N_1=\varepsilon_{K_1}N$ היה 0. לכן N $\mathcal{H}_K$-מודול פשוט.

יחידות: יהי N' $\mathcal{H}_K$־מודול פשוט נוסף עם $\varepsilon_{K_1}N' \cong N_1$. קיים G־מודול חלק פשוט V' עם

$$N' \quad = \quad \varepsilon_K V' = (V')^K$$

אז נובע:

$$\begin{aligned} (V')^{K_1} &= \varepsilon_{K_1} V' \\ &= \varepsilon_{K_1}\varepsilon_K V' \\ &= \varepsilon_{K_1} N' \cong \underbrace{N_1}_{\neq 0} = V^{K_1} \end{aligned}$$

($N_1 \neq 0$ כי N_1 פשוט)

מהטענה הקודמת נובע ש $V' \cong V$ כ־$\mathcal{H}$־מודולים, ולכן $N' = \varepsilon_K V' \cong \varepsilon_K V = N$ (איזומורפיזם של $\mathcal{H}_K$־מודולים). ■

20 הצגות מותרות

הגדרה 20.1 תהי G חבורת־l. הצגה (π, V) של G נקראת <u>מותרת</u> אם היא חלקה ואם לכל תת־חבורה $K \subseteq G$ קומפקטית פתוחה $\dim_{\mathbb{C}} V^K < \infty$.

הערה 20.2 אם $K \subseteq K_1$ אז $V^{K_1} \subseteq V^K$.

הערה 20.3 אם $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$ סדרה מדויקת של G־מודולים חלקים V_2 מותרת $\iff$ V_1 וV_3 מותרים.

הוכחה: מיידית מדיוק הסדרה $(K \subseteq G)$, $0 \longrightarrow V_1^K \longrightarrow V_2^K \longrightarrow V_3^K \longrightarrow 0$. ■

20.1 איפיון בעזרת מרכיבים איזוטופיים

סימונים, תזכורת והערות: תהי (π, V) הצגה חלקה של G, $K \subseteq G$. נסמן ב$\hat{K}$ קבוצת נציגים של הצגות אי־פריקות של K.
אז ראינו שלכל $\rho \in \hat{K}$ מתקיים $\dim_{\mathbb{C}}(V_\rho) < \infty$ וV הוא K־מודול פשוט למחצה ולכן $V = \bigoplus_{\rho \in \hat{K}} V^\rho$ כאשר לכל V^ρ (מרכיב איזוטופי מטיפוס ρ) יש תיאור $V^\rho = V_\rho^{\bigoplus I_\rho}$ כאשר I_ρ קבוצה, ו $l(V^\rho) < \infty \iff I_P$ סופית $\iff \dim V^\rho < \infty$.

הערה 20.4 לכל $\rho \in \hat{K}$, $G \subseteq \mathrm{Ker}\rho$ פתוחה (כי $\dim_{\mathbb{C}} V^\rho < \infty$) ו $\mathrm{Ker}\rho \lhd K$ (תת־חבורה נורמלית).

בכיוון ההפוך, בהנתן $K_1 \lhd K$ אם $K_1 \subseteq \mathrm{Ker}\rho$ ($\rho \in \hat{K}$) אז יש פירוק

$$\rho : K \quad \longrightarrow \quad K/K_1 \xrightarrow{\rho_1} \mathrm{GL}(V^\rho)$$

וכמו כן יש התאמה חד־חד־ערכית ועל לכל $K_1 \lhd K$ פתוחה.

$$\left\{\text{Elements } \rho \in \hat{K} \mid K_1 \subseteq \mathrm{Ker}\rho\right\} \quad \leftrightarrow \quad \{\text{Irreducible representations of } K/K_1 \text{ up to equivalence}\}$$

(?)

מסקנה 20.5 הקבוצה משמאל סופית.

טענה 20.6 תהי (π, V) הצגה חלקה של G. התנאים הבאים שקולים:

1. π מותרת
2. לכל $K \subseteq G$, $l\left(V^{\rho}\right) < \infty$ (לכל $\rho \in \hat{K}$)
3. קיימת $K \subseteq G$ כך ש $l\left(V^{\rho}\right) < \infty$ (לכל $\rho \in \hat{K}$)

הוכחה: $1 \Longleftarrow 2$: בדרך השלילה. נניח שקיימת $K \subseteq G$ ו $\rho \in \hat{K}$ עם $\dim_{\mathbb{C}} V^{\rho} = \infty$. ידוע ש $V^{\rho} \cong V_{\rho}^{\bigoplus I_{\rho}}$.
נסמן $K_1 = \mathrm{Ker}\rho$, אז $K_1 \subseteq G$ (כי K_1 פתוחה), ואז $V^{\rho} \subseteq V^{\mathrm{Ker}\rho} = V^{K_1}$ ולכן $\dim_{\mathbb{C}} V^{K_1} = \dim_{\mathbb{C}} V^{\rho} = \infty$ וπ לא מותרת, סתירה.
$2 \Longleftarrow 3$: מיידי.
$3 \Longleftarrow 1$: צריך להוכיח ש $\dim_{\mathbb{C}} V^{K_1} < \infty$ לכל $K_1 \subseteq G$. אפשר להניח כי $K_1 \subseteq K$ ואפילו $K_1 \triangleleft K$. מאחר ש $K_1 \triangleleft K$ נובע שV^{K_1} הוא K-שמור.
אכן,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v\in V^K \\ k_1\in K_1 \\ k\in K \end{pmatrix} \qquad & k_1(kv) = \\
= & \underbrace{k}_{K}\underbrace{\left(k^{-1}k_1k\right)}_{\in K_1}(v) \\
= & kv
\end{aligned}
$$

לכן הפירוק של V^{K_1}, כK-מודול הוא

$$
\begin{aligned}
V^{K_1} &= \bigoplus_{\rho\in\hat{K}} \left(V^{K_1}\right)^{\rho} \\
&= \bigoplus_{\rho\in\hat{K}} \left(V^{K_1} \cap V^{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

נתון ש $\dim_{\mathbb{C}}\left(V^{\rho}\right) < \infty$ (לכל $\rho \in \hat{K}$) (כי נתון שהאורך סופי וראינו באופן כללי ש $\dim_{\mathbb{C}} V_{\rho} < \infty$ לK קומפקטית). לכן די להוכיח שהקבוצה $\left\{\rho \in \hat{K} \mid V^K \cap V^{\rho} \neq 0\right\}$ סופית.
כעת, V^{K_1} הוא K-מודול ולכן $V^{K_1} \cap V^{\rho}$ תת-מודול של $V^{\rho} \cong V_{\rho}^{\bigoplus I_{\rho}}$. לכן קיימת קבוצה $J_{\rho} \subseteq I_{\rho}$ כך ש

$$
V^{K_1} \cap V^{\rho} \quad \cong \quad V_{\rho}^{\bigoplus J_{\rho}}
$$

לכן אם $V^{K_1} \cap V^{\rho} \neq 0$, אז V_{ρ} איזומורפי לתת-מודול של $V^{K_1} \cap V^{\rho}$ ובפרט לתת-K-מודול של V^{K_1}. לכן K_1 פועל באופן טריוואלי על V_{ρ}, כלומר $K_1 \subseteq \mathrm{Ker}\rho$ וראינו שהקבוצה $\left\{\rho \in \hat{K} \mid K_1 \subseteq \mathrm{Ker}\rho\right\}$ אכן סופית. ■

20.2 כרקטרים

יהי V מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{C}$) ו $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית עם $\text{rank}T = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Im}T) < \infty$.
יהי $\text{Im}T \subseteq L \subseteq V$ תת־מרחב וקטורי עם $\dim_{\mathbb{C}} L < \infty$. נסמן ב$\restriction_L T$, צמצום בתחום ובטווח, ונגדיר $\text{tr}T = \text{tr}\left(T \restriction_L\right)$.

אי־תלות בL: יהי $L \subseteq L'$ תת־מרחב נוסף עם $\dim_{\mathbb{C}} L' < \infty$, נפרק $L' = L \oplus L''$. אז $T \restriction_{L'}$ נראית כך:

$$T \restriction_{L'} \quad = \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} T\restriction_L & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L \\ L'' \end{array} \end{array}$$

ולכן $\text{tr}\left(T \restriction_L\right) = \text{tr}\left(T \restriction_{L'}\right)$.

הצמדה: יהי V' מרחב וקטורי נוסף ו $S : V \to V'$ איזומורפיזם. אז $T' = STS^{-1} : V' \to V'$ מקיימת

$$\text{tr}(T) \quad = \quad \text{tr}(T')$$

אפיון נוסף של הצגות מותרות: תהי (π, V) הצגה חלקה של G, אז π מותרת אם ורק אם $\text{rank}\pi(T) < \infty$ לכל $T \in \mathcal{H}^G$. **הוכחה:** אם π מתקיים התנאי, אז לכל $K \subseteq G$ מתקיים

$$\dim V^K \quad = \quad \dim\left(\pi\left(\varepsilon_K\right) V\right) = \text{rank}\left(\pi\left(\varepsilon_K\right) V\right) < \infty$$

בכיוון ההפוך, נניח כי π מותרת, $T \in \mathcal{H}^G$. קיים $K \subseteq G$ כך ש $T \in \mathcal{H}_K^G$ ואז $T = \varepsilon_K T \varepsilon_K$ ולכן

$$\text{Im}\pi(T) \quad \subseteq \quad \text{Im}\pi\left(\varepsilon_K\right) = V^K$$

אבל V^K ממימד סופי ומכאן גם $\text{Im}\pi(T)$ ממימד סופי. ■

עקבה של הצגה מותרת

הגדרה 20.7 תהי (π, V) הצגה מותרת של G. נגדיר דיסטריבוציה $\text{tr}\pi \in \mathcal{D}(G)$ ע"י

$$\begin{aligned} (\text{tr}\pi)(f) \quad &= \quad \langle \text{tr}\pi, f \rangle \\ &= \quad \text{tr}\left(\pi\left(\underbrace{f\mu_l}_{\in \mathcal{H}^G}\right)\right) \end{aligned}$$

הדיסטריבוציה $\text{tr}\pi$ נקראת <u>הכרקטר של π</u>.

שקילות: $\pi_1 \cong \pi_2 \iff \mathrm{tr}\pi_1 = \mathrm{tr}\pi_2$.

טענה 20.8 תהי (π, V) הצגה מותרת של G. יהי $g_0 \in G$. נסמן

$$\begin{aligned} c_{g_0} : G &\to G \\ x &\mapsto g_0 x g_0^{-1} \end{aligned}$$

אז

$$c_{g_0}(\mathrm{tr}\pi) = \delta(g_0)^{-1} \cdot \mathrm{tr}\pi$$

הוכחה: ראינו כי ל $T \in \mathcal{H}^G$ מתקיים

$$c_{g_0}(T) = \delta_{g_0} * T * \delta_{g_0^{-1}}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\pi(c_{g_0}(T))) &= \mathrm{tr}\left(\pi\left(\delta_{g_0} * T * \delta_{g_0^{-1}}\right)\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\pi(g_0)\pi(T)\pi\left(g_0^{-1}\right)\right) \\ &= \mathrm{tr}(\pi(T)) \end{aligned}$$

כעת ל $f \in C_c^\infty(G)$

$$\begin{aligned} \langle c_{g_0}(\mathrm{tr}\pi), f\rangle &= \left\langle \mathrm{tr}\pi, c_{g_0}^{-1}(f)\right\rangle \\ &= \mathrm{tr}\left(\pi\left(c_{g_0}^{-1}(f)\cdot\mu_l\right)\right) \end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\pi\left(c_{g_0}^{-1}(f)\cdot\mu_l\right)\right) &= \mathrm{tr}\left(\pi\left(c_{g_0}^{-1}(f)\cdot c_{g_0}^{-1}(c_{g_0}(\mu_l))\right)\right) \\ &= \mathrm{tr}(\pi(f\cdot c_{g_0}(\mu_l))) \end{aligned}$$

ראינו כי מתקיים

$$\begin{aligned} c_{g_0}\mu_l &= \rho(g_0)\lambda(g_0)\mu_l \\ &= \rho(g_0)\mu_l \\ &= \delta(g_0)^{-1}\mu_l \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \langle c_{g_0}(\mathrm{tr}\pi), f\rangle &= \mathrm{tr}\left(\pi\left(c_{g_0}^{-1}(f)\cdot\mu_l\right)\right) \\ &= \mathrm{tr}(\pi(f\cdot c_{g_0}(\mu_l))) \\ &= \mathrm{tr}\left(\pi\left(f\cdot\delta(g_0)^{-1}\mu_l\right)\right) \\ &= \delta(g_0)^{-1}\cdot\mathrm{tr}(\pi(f\cdot\mu_l)) \\ &= \left\langle \delta(g_0)^{-1}\cdot\mathrm{tr}\pi, f\right\rangle \end{aligned}$$

ולכן

$$c_{g_0}\left(\mathrm{tr}\pi\right) \quad = \quad \delta\left(g_0\right)^{-1}\cdot\mathrm{tr}\pi$$

■

טענה 20.9 תהיינה $\left\{ \left(\pi_i,V_i\right)\right\} _{i=1}^{n}$ הצגות מותרות אי־פריקות של G שאינן שקולות אחת לשניה. אז האיברים $\left\{ \mathrm{tr}\pi_i\right\} _{i=1}^{n}$ בת"ל (ב$\mathcal{D}\left(G\right)$).

הוכחה: תהי $K\subseteq G$ כך ש $V_i^K\neq0$ $(i=1,\ldots,n)$.
אז כל V_i^K הוא $\mathcal{H}_K^G$־מודול, וכל המודולים האלה אינם שקולים אחד לשני (ממשפט היחידות שהיה בעבר) ו $\dim_{\mathbb{C}}V_i^K<\infty$ (לכל i).
ראינו שנובע שההעתקות

$$\begin{aligned} (i=1,\ldots,n) \qquad & \mathcal{H}_K^G\longrightarrow\mathbb{C}\\ & \alpha\xrightarrow{T_i}\mathrm{tr}\left(\pi_i\left(\alpha\right)\restriction_{V_i^K}\right)\end{aligned}$$

בלתי תלויות לינארית (כאשר הצמצום הוא גם בתחום וגם בטווח) (כי ההצגות π_i הן הצגות לא שקולות להן מתאים המרחב הוקטורי ממימד סופי V_i^K).
אבל לכל $\alpha\in\mathcal{H}_K^G$ מתקיים $\alpha=\varepsilon_K\alpha$, ולכן

$$\mathrm{Im}\pi_i\left(\alpha\right)\quad\subseteq\quad\mathrm{Im}\pi_i\left(\varepsilon_K\right)=V_i^K$$

ולכן $\mathrm{tr}\left(\pi_i\left(\alpha\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\pi_i\left(\alpha\right)\restriction_{V_i^K}\right)$ $\left(\alpha\in\mathcal{H}_K^G\right)$ (בצד ימין מופיעה עקבה מוכללת).
לבסוף, נקבל שההעתקות

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\pi_i\restriction_{C_c(K\setminus G/K)}:C_c\left(K\setminus G/K\right) \quad & \xrightarrow{\approx} \quad \mathcal{H}_K^G\xrightarrow{T_i}\mathbb{C}\\ f \quad & \mapsto \quad \alpha=f\mu_l\mapsto\mathrm{tr}\left(\pi_i\left(\alpha\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\pi_i\left(f\mu_l\right)\right)=\left(\mathrm{tr}\pi_i\right)\left(f\right)\end{aligned}$$

בת"ל ולכן $\left\{ \mathrm{tr}\pi_i\right\} _{i=1}^{n}$ בת"ל. ■

מסקנה 20.10 תהיינה π_1,π_2 הצגות מותרות ואי־פריקות, אז $\pi_1\approx\pi_2\iff\mathrm{tr}\pi_1=\mathrm{tr}\pi_2$.

20.3 זיהוי מרחב דואלי בעזרת תבנית

הערה 20.11 יהי L מרחב וקטורי, אז יש שיכון $\alpha:L\hookrightarrow L''$ לפי

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix}x\in L\\ \varphi\in L'\end{smallmatrix}\right) \qquad & \left\langle \alpha x,\varphi\right\rangle =\left\langle \varphi,x\right\rangle \\ & \left(\alpha x\right)\left(\varphi\right)=\varphi\left(x\right)\end{aligned}$$

α חד־חד־ערכית כי לכל $0\neq x\in L$, יש $\varphi\in L'$ עם $\alpha\left(x\right)\left(\varphi\right)=\varphi\left(x\right)\neq0$.

תכונה α על $\iff$ $\dim_{\mathbb{C}} L<\infty$. **הוכחה:** $\Longrightarrow$: מיידי. (כי L,L',L'' מרחבים ממימד סופי ואז מאחר וα חח"ע, אז α על)

$\Longleftarrow$: יש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים $L\cong\mathbb{C}^{\oplus I}=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{C}$, ואז יש איזומורפיזם $L'\cong\prod_{i\in I}\mathbb{C}$ והפעולה היא

$$\begin{aligned} L\ni x &= (x_i)_{i\in I}\\ L'\ni z &= (z_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

(כל הx_iים הם אפסים פרט למספר סופי)

$$z(x) = \sum_i z_i x_i$$

נסמן את התת־מרחב הוקטורי

$$V=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{C}\quad\subseteq\quad\prod_{i\in I}\mathbb{C}=L'$$

אז לכל $x\in L$, $\alpha x\restriction_V=0\iff x=0$.

לבסוף, אם $\dim_{\mathbb{C}} L=\infty$ אז I אינסופית ולכן $V\neq L'$ ולכן יש $0\neq\varphi\in L''$ כך ש $\varphi\restriction_V=0$ ואז $\varphi\notin\operatorname{Im}(\alpha)$. ■

דואלי שני: יהי V G־מודול, אז יש העתקה:

$$\begin{aligned}\varphi:V &\to \left(\tilde{V}\right)'\\ v &\mapsto \varphi_v=(\alpha v)\restriction_{\tilde{V}}\end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}\varphi_v(\tilde{v}) &= (\alpha v)(\tilde{v})=\tilde{v}(v)\\ \varphi_v(\tilde{v}) &= \langle\tilde{v},v\rangle\end{aligned}$$

זהו G־מורפיזם:

$$\begin{aligned}\langle\varphi_{gv},\tilde{v}\rangle &= \langle\tilde{v},gv\rangle\\ &= \left\langle g^{-1}\tilde{v},v\right\rangle\\ &= \left\langle\varphi_v,g^{-1}\tilde{v}\right\rangle\\ &= \langle g\varphi_v,\tilde{v}\rangle\end{aligned}$$

כמו כן, φ חד־חד־ערכית: אכן, אם $v\neq 0$, ראינו שקיים $\tilde{v}\in\tilde{V}$ עם $\varphi_v(\tilde{v})=\tilde{v}(v)\neq 0$ ולכן $\varphi_v\neq 0$.

לכן קיבלנו שיכון של G־מודולים: $\varphi:V\to\tilde{V}'$. לבסוף, V חלק, ולכן $\operatorname{Im}\varphi\subseteq\left(\tilde{V}'\right)_s=\tilde{\tilde{V}}$, וקיבלנו שיכון של G־מודולים:

$$\begin{aligned}\varphi:V &\hookrightarrow \tilde{\tilde{V}}\\ v &\mapsto \varphi_v\end{aligned}$$

טענה 20.12 תהי (π, V) הצגה חלקה של G. התנאים הבאים שקולים:

1. π מותרת
2. $\tilde{\pi}$ מותרת
3. השיכון $\pi \hookrightarrow \tilde{\tilde{\pi}}$ הוא איזומורפיזם (הוא תמיד חד־חד־ערכי).

הוכחה: $2 \iff 1$: ראינו שלכל $K \subseteq G$ יש איזומורפיזם

$$\begin{array}{ccc} (V')^K = \tilde{V}^K & \longrightarrow & \left(V^K\right)' \\ \varphi & \mapsto & \varphi\restriction_{V^K} \end{array}$$

לכן $\dim_{\mathbb{C}} V^K < \infty \iff \dim_{\mathbb{C}} \left(V^K\right)' < \infty \iff \dim_{\mathbb{C}}\left(\tilde{V}^K\right) < \infty$.

$3 \iff 1$: ראינו שדיוק סדרת מודולים חלקים, נבחנת על פי פונקטורים $V \mapsto V^K$.
לכן $V \hookrightarrow \tilde{\tilde{V}}$ על $\iff$ $V^K \hookrightarrow \left(\tilde{\tilde{V}}\right)^K$ על ($K \subseteq G$). התנאי משמאל שקול לכך שההומומורפיזם הבא הוא על:

$$V^K \hookrightarrow \left(\tilde{\tilde{V}}\right)^K \xrightarrow{\approx} \left(\left(\tilde{V}\right)^K\right)' \longleftarrow \left(V^K\right)''$$

כאשר החץ $\left(V^K\right)'' \longleftarrow \left(\left(\tilde{V}\right)^K\right)'$ הוא הדואלי של האיזומורפיזם $\left(\tilde{V}\right)^K \to \left(V^K\right)'$ הנתון ע"י צמצום, ו $\left(\tilde{\tilde{V}}\right)^K \xrightarrow{\approx} \left(\left(\tilde{V}\right)^K\right)'$ נתון ע"י איזומורפיזם הצמצום.

נראה בהמשך שהומומורפיזם זה נתון ע"י השיכון:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : V^K & \to & \left(V^K\right)'' \\ v & \mapsto & \left[\varphi \mapsto (\alpha v)(\varphi) = \varphi(v)\right] \end{array}$$

ראינו ש־α על אם ורק אם $\dim_{\mathbb{C}} V^K < \infty$ ולכן $3 \iff 1$.
כעת נחשב את ההומורפיזם הנ"ל:

$$\begin{array}{ccccccc} V^K & \hookrightarrow & \left(\tilde{\tilde{V}}\right)^K & \xrightarrow{\approx} & \left(\left(\tilde{V}\right)^K\right)' & \longleftarrow & \left(V^K\right)'' \\ v & \mapsto & \left[\underbrace{\psi}_{\in\tilde{V}} \mapsto \psi(v)\right] & \mapsto & \left[\underbrace{\psi}_{\in\left(\tilde{V}\right)^K} \mapsto \psi(v)\right] & \mapsto & f \overset{?}{=} \alpha v \end{array}$$

נחשב את ערך αv ע"י האיזומורפיזם $\left(V^K\right)'' \longleftarrow \left(\left(\tilde{V}\right)^K\right)'$

$$\begin{aligned} \underbrace{\psi}_{\in\left(\tilde{V}\right)^K} \mapsto (\alpha v)\left(\psi\restriction_{V^K}\right) \quad &\leftarrow\!\shortmid \quad \alpha v \\ = \psi \mapsto \psi(v) & \end{aligned}$$

ולכן נקבל כי $f = \alpha v$ כנדרש. ■

מסקנה 20.13 תהי (π, V) הצגה מותרת של G. אז π אי־פריקה $\iff$ $\tilde{\pi}$ אי־פריקה.

הוכחה: π פריקה $\Longrightarrow$ $\tilde{\pi}$ פריקה. (נובע מהדיוק של "$\sim$")
ולכן $\tilde{\pi}$ פריקה $\Longrightarrow$ $\pi \cong \tilde{\tilde{\pi}}$ פריקה, כאשר איזומורפיזם זה נכון מהמשפט כי π מותרת. ■

20.4 זיהוי דואלי בעזרת תבנית בילינארית

אם V G־מודול חלק, נסמן

$$\begin{aligned}\langle , \rangle : \tilde{V} \times V &\to \mathbb{C} \\ (\tilde{v}, v) &\mapsto \langle \tilde{v}, v \rangle = \tilde{v}(v) \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

את הדואליות בין V ל־$\tilde{V}$. זוהי תבנית בילינארית G־אינווריאנטית, כלומר

$$\langle g\tilde{v}, gv \rangle = \tilde{v}\left(g^{-1}gv\right) = \tilde{v}(v) = \langle \tilde{v}, v \rangle$$

כעת יהיו U, V שני מודולים חלקים ו

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle' : U \times V &\to \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle' \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

תבנית בילינארית G־אינווריאנטית ולא מנוונת במובן ש
לכל $u \in U$ $\langle u, v \rangle' = 0$ לכל $v \in V$ $\iff$ $u = 0$
לכל $v \in V$ $\langle u, v \rangle' = 0$ לכל $u \in U$ $\iff$ $v = 0$
אז $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ משרה שיכון $\varphi : U \hookrightarrow V'$ ע"י

$$\langle \varphi u, v \rangle = (\varphi u)(v) = \langle u, v \rangle'$$

φ הוא מורפיזם, $\varphi : U \hookrightarrow \tilde{V}$ שיכון של G־מודולים.

טענה 20.14 בסימונים אלה, אם U, V מותרים אז $\varphi : U \xrightarrow{\approx} \tilde{V}$ איזומורפיזם של G־מודולים.

20.5 הצגה דואלית של מכפלה טנזורית (של הצגות מותרות)

לכל שני מרחבים וקטוריים U, V יש טרנספורמציה לינארית

$$\begin{aligned}\eta : U' \otimes V' &\to (U \otimes V)' \\ f \otimes h &\mapsto [u \otimes v \mapsto f(u) \cdot h(v)]\end{aligned}$$

(η חד־חד־ערכית)

מסקנה 20.15 אם $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ו $\dim_{\mathbb{C}} U < \infty$ אז η איזומורפיזם.

הערה 20.16 אם $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ **או** $\dim_{\mathbb{C}} U < \infty$ אז η איזומורפיזם.

20.6 קיום וקטורים עצמיים

טענה 20.17 תהי G חבורת־l חילופית ו $V \neq 0$ מודול מותר. אז קיים וקטור עצמי $0 \neq v \in V$. (כלומר $\forall g \in G \; gv \in \mathbb{C}v$)

הוכחה: תהי $K \subseteq G$ כך ש $V^K \neq 0$. לכל $g \in G$ מתקיים

$$gV^K = V^{gKg^{-1}} = V^K$$

(כאשר השוויון האחרון נכון כי G חילופית.)
לכן $V^K \subseteq V$ תת־מודול שמור. מאחר שV מותרת, $0 < \dim_{\mathbb{C}} V^K < \infty$. ידוע שלקבוצת מטריצות מתחלפות יש וקטור עצמי משותף. ■

21 תנאי σ־קומפקטיות והלמה של שור

הערה 21.1 אם G חבורת־l σ־קומפקטית, אז לכל $K \subseteq G$ האלגברה $H(G,K) \cong \mathcal{H}_K^G$ היא בעלת מימד בן מניה, כי בפירוק $G = \dot{\bigcup}_{i \in I} Kg_iK$, I בת מנייה.

טענה 21.2 יהיו V_1, V_2 שני מודולים חלקים ופשוטים מעל חבורות־l G_1, G_2. נניח שG_1 היא σ־קומפקטית. אז $V_1 \otimes V_2$ הוא מודול חלק ופשוט.

הוכחה: לכל $K_1 \subseteq G_1$, $V_1^{K_1}$ הוא 0 או $\mathcal{H}_{K_1}^{G_1}$־פשוט. $\mathcal{H}_{K_1}^G$ בת־מניה ולכן V^{K_1} מרחב וקטורי בן־מניה. כעת די להוכיח שלכל $K_2 \subseteq G_2$, $K_1 \subseteq G_1$, $(V_1 \otimes V_2)^{K_1 \times K_2}$ הוא 0 או $\mathcal{H}_{K_1 \times K_2}^{G_1 \times G_2}$ פשוט. כלומר, צריך להוכיח ש $V_1^{K_1} \otimes V_2^{K_2}$ הוא $\mathcal{H}_{K_1}^{G_1} \otimes \mathcal{H}_{K_2}^{G_2}$ פשוט או אפס. מאחר ש $V_1^{K_1}$ בן מנייה, ראינו שזה נכון. (כי $V_2^{K_2}$ פשוט) ■

הלמה של שור

טענה 21.3 תהי G חבורת־l ו(π, V) הצגה חלקה אי־פריקה. נניח שמתקיים אחד מ:

1. G σ־קומפקטית
2. π מותרת

אז $\mathrm{Hom}_G(V,V) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_V$.

הוכחה: יהי $T \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$. אז $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}\left(V^K, V^K\right)$. לכן די להוכיח שלכל $K \subseteq G$ מתקיים $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}\left(V^K, V^K\right) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_{V^K}$ (?). אפשר להניח ש $V^K \neq 0$. אז ידוע שV^K הוא $\mathcal{H}_K$ פשוט.
בהנחת

1. V^K בן מניה (כי $\mathcal{H}^K$ בת־מניה וV^K פשוט)
2. $\dim V^K < \infty$

ולכן הלמה נובעת מהלמה של שור למודולים פשוטים ממימד בן־מניה. ■

מסקנה 21.4 נניח שG σ־קומפקטית.

1. לכל שתי הצגות חלקות אי־פריקות σ, τ מתקיים

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G (\sigma, \tau) = \begin{cases} 0 & (\sigma \not\approx \tau) \\ 1 & (\sigma \approx \tau) \end{cases}$$

2. נסמן ב$Z = Z_G$ את המרכז של G (תת־חבורה סגורה). לכל הצגה (π, V) אי־פריקה חלקה של G ולכל $z \in Z_G$ מתקיים $\pi(z) \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$ ולכן יש סקלר $\omega_\pi(z) \in \mathbb{C}$ כך ש $\pi(z) = \omega_\pi(z) \cdot \mathrm{id}_V$.
$\omega_\pi : G \to \mathbb{C}^\times$ הוא כרקטר חלק. נקרא הכרקטר המרכזי של π.

3. אם G חילופית ו (π, V) חלקה אי־פריקה אז $Z = G$ ו $\pi(z) = \omega_\pi(z) \cdot \mathrm{id}_V$ לכל $z \in G$. מאחר שV אי־פריקה, נובע $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

שלמות: תזכורת:

$$(h * f)(x) = \int h(y) f\left(y^{-1}x\right) d\mu_l(y)$$

אינבולוציה על $C_c^\infty(G) = H(G)$: נגדיר

$$f^* = \overline{\check{f}} = \check{\overline{f}} \qquad (f \in H(G))$$

כלומר $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$ ($x \in G$).

תכונות:

1. $f^{**} = f$
2. $(f_1 * f_2)^* = f_2^* * f_1^*$:

$$\begin{aligned}
(f_1 * f_2)^*(x) &= \overline{f_1 * f_2(x^{-1})} \\
&= \overline{\int f_1(y) f_2(y^{-1}x^{-1}) d\mu_l(y)} \\
&= \int \overline{f_1(y)} \cdot \overline{f_2(y^{-1}x^{-1})} d\mu_l(y) \\
&= \int \overline{f_1(y)} \cdot \overline{f_2\left((xy)^{-1}\right)} d\mu_l(y) \\
\underbrace{}_{y \mapsto x^{-1} \cdot y} &= \int \overline{f_1(x^{-1}y)} \cdot \overline{f_2(y^{-1})} d\mu_l(y) \\
&= \int f_1^*\left(y^{-1}x\right) \cdot f_2^*(y) d\mu_l(y) \\
&= \int f_2^*(y) \cdot f_1^*\left(y^{-1}x\right) d\mu_l(y) \\
&= (f_2 * f_1)^*(x)
\end{aligned}$$

3. $f\neq 0$ גורר $f*f^{*}\neq 0$ (כי אז

$$\begin{aligned}\left(f*f^{*}\right)(1) &= \int f(y)\,f^{*}\left(y^{-1}\right)d\mu_{l}(y)\\ &= \int f(y)\,\overline{f(y)}d\mu_{l}(y)\\ &= \int \left|f(y)\right|^{2}d\mu_{l}(y)\end{aligned}$$

בפרט, אם $0\neq\varphi=\varphi^{*}$ אז:

$$\varphi^{2} = \varphi*\varphi=\varphi*\varphi^{*}\neq 0$$

ושוב

$$\left(\varphi^{2}\right)^{*} = \left(\varphi*\varphi^{*}\right)^{*}=\varphi*\varphi^{*}=\varphi^{2}$$

כלומר $0\neq\varphi^{2}=\left(\varphi^{2}\right)^{*}$. מכאן נובע ש$\varphi$ לא נילפוטנטית: $(\forall k)\,\varphi^{2^{k}}\neq 0$.
<u>בסה"כ:</u> אם $f\neq 0$ אז $f*f^{*}$ לא נילפוטנטית.

משפט השלמות תהי G חבורת־l σ־קומפקטית. תהי $0\neq T\in\mathcal{D}_{c}(G)$. אז קיימת הצגה <u>חלקה אי־פריקה</u> (π,V) של G כך ש $\pi(T)\neq 0$.

הוכחה: ראינו (בפרק 16) שקיימת $K\subseteq G$ עם $\varepsilon_{K}*T*\varepsilon_{K}\neq 0$. לכן אפשר להניח $T\in\mathcal{H}_{K}^{G}$. די להוכיח שקיימת הצגה אי־פריקה (σ,U) של $\mathcal{H}_{K}^{G}$ כך ש $\sigma(T)\neq 0$: אכן, נניח שהוכחנו זאת, ראינו שקיימת הצגה חלקה אי־פריקה (π,V) של G כל שיש איזומורפיזם של $\mathcal{H}_{K}^{G}$ מודולים $U\approx V^{K}$. לכן נובע $\pi(T)\restriction_{V^{K}}\neq 0$ (כי $\sigma(T)\neq 0$) ולכן $\pi(T)\neq 0$.
נזכור ש $\mathcal{H}_{K}^{G}\approx H(G,K)$ $(f\mapsto f\mu_{l})$ איזומורפיזם של אלגבראות עם יחידה. לכן די להוכיח שלכל $0\neq f\in H(G,K)$ קיימת הצגה אי־פריקה (σ,U) של $H(G,K)$ כך ש $\sigma(f)\neq 0$ ודי להוכיח ש $\sigma(f*f^{*})\neq 0$. אבל $f*f^{*}$ לא נילפוטנטי ב$H(G,K)$ ו $H(G,K)$ אלגברה בת־מניה, וראינו שקיימת הצגה עם תכונות אלה. ■

תבניות בילינאריות יהיו U,V שני מודולים <u>מותרים</u> <u>ואי־פריקים</u>, כאשר G σ־קומפקטית. התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת תבנית בילינארית $0\neq B:U\times V\to\mathbb{C}$ G־אינווריאנטית: $B(gu,gv)=B(u,v)$ (כלומר, $\text{Bil}(U,V)^{G}\neq 0$)
2. $\dim_{\mathbb{C}}\text{Bil}(U,V)^{G}=1$
3. $V\cong\tilde{U}$
4. $U\cong\tilde{V}$

הוכחה: ראינו שיש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים:

$$\text{Hom}_{G}\left(U,\tilde{V}\right) \cong \text{Bil}(U,V)^{G}\cong\text{Hom}_{G}\left(V,\tilde{U}\right)$$

כמו כן, $\tilde{U}$ ו$\tilde{V}$ אי־פריקות (כי U,V מותרות). השקילויות נובעות מהלמה של שור, ומהעובדה שהומומורפיזם $0\neq$ בין מודולים אי־פריקים הוא איזומורפיזם. ■

22 השראה (Induction)

הגדרה 22.1 תהי G חבורת־l ו $H \subseteq G$ תת־חבורה סגורה. תהי (τ, V) הצגה חלקה של H. נסמן ב$L(G,\tau)$ את אוסף הפונקציות $f: G \to V$ כך ש:

1. $f(hg) = \tau(h) f(g)$ (לכל $h \in H$ ו$g \in G$)
2. קיימת תת־חבורה פתוחה קומפקטית $K = K_f \subseteq G$ כך ש $f(gk) = f(g)$ (לכל $k \in K$ ו$g \in G$)

ההצגה $(\pi, L(G,\tau))$ של G על $L(G,\tau)$ היא הזזות מימין:

$$(\pi(g) f)(x) = f(xg) \qquad (x, g \in G)$$

הצגה זו נקראת ההצגה המושרה מH לG.
מסמנים גם $\mathrm{Ind}_H^G \tau = (\pi, L(G,\tau))$. נסמן גם $\mathrm{Ind}_H^G V_\tau = L(G,\tau)$. לכן

$$(\pi, L(G,\tau)) \quad = \quad \left(\rho, \mathrm{Ind}_H^G V_\tau\right)$$

כאשר ρ מצומצמת על $\mathrm{Ind}_H^G V_\tau$.

הערה 22.2

1. יש הגדרה למודולים.
2. אם נדרוש רק את התנאי הראשון, נקבל מרחב של פונקציות על G עליו G פועלת ע"י הזזות מימין. $\mathrm{Ind}_H^G \tau$ הוא החלק החלק של הצגה זאת. בפרט נובע ששני התנאים נשמרים ע"י הזזות מימין ו$\mathrm{Ind}_H^G \tau$ הצגה חלקה של G.

השראה קומפקטית נתייחס לתת מרחב $S(G,\tau) \subseteq L(G,\tau)$:

$$S(G,\tau) \quad = \quad \{f \in L(G,\tau) \mid \text{there exists a compact set } C = C_f \subseteq G \text{ such that } \mathrm{supp} f \subseteq HC\}$$

אז $S(G,\tau)$ תת־מרחב G־שמור ביחס ל $\mathrm{Ind}_H^G \tau$ ומסמנים תת־מודול זה (ואת ההצגה $\mathrm{Ind}_H^G \tau$ המצומצמת עליו) ב$\mathrm{ind}_H^G \tau$. (ב[BH] זה מסומן ב $\mathrm{C} - \mathrm{Ind}_H^G \tau$)

טענה 22.3 תהי G חבורת־l, $H \subseteq G$ תת־חבורה סגורה. V H־מודול חלק. אז $\mathrm{ind}_H^G V$ הוא אוסף הפונקציות $f: G \to V$ כך ש

1. $f(hg) = hf(g)$ ($h \in H$, $g \in G$)
2. f חלקה (במקום לדרוש שקיימת $K \subseteq G$ עם $\rho(K) f = f$)
3. קיימת $C \subseteq G$ קומפקטית כך ש $\mathrm{supp} f \subseteq HC$

הערה 22.4 אם $H \setminus G$ קומפקטית אז התנאי האחרון מתקיים אוטומטית.

הוכחה: צריך להיות שאם 1 ו3 מתקיימים אז 2 שקול ל:
קיימת $K \subseteq G$ עם

$$f(gk) = f(g) \qquad \binom{k \in K}{g \in G}$$

ברור שתנאי זה גורר שf חלקה.
בכיוון ההפוך: נניח כי f חלקה. לכל $x \in C$ יש $K_x \subseteq G$ עם $f(xK_x) = f(x)$ (כי f חלקה). לוקחים כיסוי סופי $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} x_i K_{x_i}$ ולוקחים $K = \bigcap_{i=1}^{m} K_{x_i}$.
נוכיח כי K הנ"ל עונה על הדרישה. אם $g \notin HC$ ו $gk \notin HC$ אז $f(gk) = 0 = f(g)$.
ע"י החלפת g בgk (וב k בk^{-1}) אפשר להניח $g \in HC$. אז יש i ו$h \in H$ כך ש$g = hx_i$, ואז

$$\begin{aligned} \{f(g), f(gk)\} &\subseteq f(gK) \\ &= f(hx_iK) \\ &\subseteq f(hx_iK_{x_i}) \\ &= hf(x_iK_{x_i}) \\ &= \{hf(x_i)\} \end{aligned}$$

ולכן $f(g) = hf(x_i) = f(gk)$. ■

פונקטוריאליות: אם (σ, V_σ), (τ, V_τ) הצגות חלקות של H ו $\varphi : \sigma \to \tau$ H-מורפיזם, אז נקבל G-מורפיזמים

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_H^G \varphi : \mathrm{Ind}_H^G \sigma &\to \mathrm{Ind}_H^G \tau \\ \mathrm{ind}_H^G \varphi : \mathrm{ind}_H^G \sigma &\to \mathrm{ind}_H^G \tau \end{aligned}$$

ע"י

$$f \mapsto \varphi \circ f$$

כפל בכרקטר של G יהי $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ כרקטר (חלק). תהי (σ, U_σ) הצגה חלקה של $H \subseteq G$ תת־חבורה סגורה. כפל בχ שולח פונקציה $f : G \to U_\sigma$ לפונקציה $\chi \cdot f : G \to U_\sigma$.
כאן

$$(\chi \cdot f)(g) = \chi(g) f(g)$$

העתקה זאת יוצרת G-איזומורפיזמים:

$$\begin{aligned} \chi \cdot \mathrm{Ind}_H^G(\sigma) &\xrightarrow{\chi \cdot} \mathrm{Ind}_H^G(\chi \cdot \sigma) \\ \chi \cdot \mathrm{ind}_H^G(\sigma) &\xrightarrow{\chi \cdot} \mathrm{ind}_H^G(\chi \cdot \sigma) \end{aligned}$$

הוכחה: תהי $f : G \to U_\sigma \in L(G, \sigma)$. אז $\chi \cdot f \in L(G, \chi \cdot \sigma)$ כי

$$\begin{aligned} (\chi \cdot f)(h \cdot g) &= \chi(h \cdot g) \cdot f(h \cdot g) \\ &= \chi(h) \chi(g) \cdot \sigma(h) f(g) \\ &= (\chi(h) \sigma(h)) (\chi(g) f(g)) \\ &= (\chi \cdot \sigma)(h) ((\chi \cdot f)(g)) \end{aligned}$$

ע"י התייחסות לχ^{-1} נובע ש

$$\chi\cdot : L(G,\sigma) \quad \rightarrow \quad L(G,\chi\cdot\sigma)$$

איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים. לבסוף, צריך להוכיח שלכל $f \in L(G,\sigma)$ ולכל $g, g_0 \in G$ מתקיים

$$(\rho(g_0)(\chi\cdot f))(g) \quad = \quad (\chi\cdot(\chi\cdot\rho)(g_0)f)(g)$$

אכן

$$\begin{aligned}(\rho(g_0)(\chi\cdot f))(g) &= (\chi\cdot f)(g\cdot g_0)\\ &= \chi(g)\chi(g_0)f(gg_0)\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}(\chi\cdot(\chi\cdot\rho)(g_0)f)(g) &= \chi(g)((\chi\cdot\rho)(g_0)f)(g)\\ &= \chi(g)\chi(g_0)(\rho(g_0)f)(g)\\ &= \chi(g)\chi(g_0)f(gg_0)\end{aligned}$$

כנדרש. ■

22.1 תיאור איברי $L(G,\rho)$ ו$S(G,\rho)$

מאחר ו $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ חלקה ((σ,V) הצגה חלקה של H).

$$L(G,\sigma) \quad = \quad \bigcup_{K\subseteq G} L(G,\sigma)^K$$

כעת פונקציה $f: G\rightarrow V$ שייכת ל$L(G,\sigma)^K$ אם ורק אם:

1. $f(hg)=\sigma(h)f(g)$ (לכל $h\in H$ ו $g\in G$)
2. $f(gk)=f(g)$ (לכל $g\in G$ ו $k\in K$)

ולכן תנאים אלה שקולים לתנאי $f(hgk)=\sigma(h)f(g)$ ($h\in H$, $g\in G$ ו $k\in K$)

מסקנה 22.5

1. $f(g)$ קובע את f על HgK.
2. פונקציה $f: G\rightarrow V$ שייכת ל $L(G,\sigma)^K$ אם ורק אם f נתונה ע"י $f(hgk)=\sigma(h)f(g)$ על כל קוסט HgK.

יהי $v\in V$. נבדוק האם קיימת $f: G\rightarrow V$ הנתמכת על HgK וכך ש $f(g)=v$. חייב להתקיים:

- $h_1gk_1=h_2gk_2 \implies \sigma(h_1)v=\sigma(h_2)v$

- או: $hgK = gK \;\Longleftarrow\; \sigma(h)v = v$
- או: $h \in gKg^{-1} \;\Longleftarrow\; \sigma(h)v = v$

סה"כ $v \in V$ נדרש לקיים $\sigma\left(H \cap \left(gKg^{-1}\right)\right)v = v$ כלומר

$$v \in V^{H \cap gKg^{-1}}$$

כעת יהי $G = \dot{\bigcup}_{i \in I} Hg_iK$ פירוק זר. אז איברי $\left(\mathrm{Ind}_H^G V_\sigma\right)^K = L(G,\sigma)^K$ מתקבלים באופן הבא: לכל $i \in I$ נבחר $v_i \in V^{H \cap gKg^{-1}}$ ואז $f(hg_ik) = \sigma(h)v_i$ ($k \in K$, $i \in I$, $h \in H$).

תת המרחב $\left(\mathrm{ind}_H^G\sigma\right)^K = S(G,\sigma)$ מורכב מאיברי $L(G,\sigma)^K$ עם תומך קומפקטי מודולו H, כלומר צריך לבחור $v_i \neq 0$ רק עבור מספר סופי של $i \in I$.

מסקנה 22.6

1. יש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$L(G,\sigma)^K = \prod_{i \in I} V^{H \cap \left(g_iKg_i^{-1}\right)}$$
$$S(G,\sigma)^K = \bigoplus_{i \in I} V^{H \cap \left(g_iKg_i^{-1}\right)}$$

2.

$$\mathrm{ind}_H^G\left(\bigoplus_{j \in J}\sigma_j\right) \cong \bigoplus_{j \in J}\mathrm{ind}_H^G(\sigma_j)$$

(?)

3. הפונקטורים Ind_H^G ו ind_H^G מדויקים, כי לכל $i \in I$ הפונקטור $V \longrightarrow V^{H \cap \left(g_iKg_i^{-1}\right)}$ מדויק.

4. אם $H \setminus G$ קומפקטית וσ הצגה מותרת של H אז $\mathrm{Ind}_H^G\sigma = \mathrm{ind}_H^G\sigma$ מותרת: כי לכל $K \subseteq G$ הקבוצה I סופית ולכל $i \in I$

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{H \cap \left(g_iKg_i^{-1}\right)} < \infty$$

טרנזיטיביות יש איזומורפיזם של G־מודולים:

$$\mathrm{Ind}_H^G\left(\mathrm{Ind}_E^H\sigma\right) \longrightarrow \mathrm{Ind}_E^G\sigma$$
$$\mathrm{ind}_H^G\left(\mathrm{ind}_E^H\sigma\right) \longrightarrow \mathrm{ind}_E^G\sigma$$

כאן $E \subseteq H \subseteq G$ תת־חבורות סגורות, (σ, U_σ) הצגה חלקה של E וההעתקה מתקבלת מ

$$\begin{array}{ccc}[G \longrightarrow [H \longrightarrow U_\sigma]] & \longrightarrow & [G \longrightarrow U_\sigma] \\ (f(g))(h) & \mapsto & (f(g))(1)\end{array}$$

(נובע מהדדיות פרוביניוס, לא נוכיח זאת כאן)

הצמדות תהי $H \subseteq G$ תת־חבורה סגורה, (σ, V) הצגה חלקה של H. יהי $g_0 \in G$. נסמן הצגה חלקה של $g_0^{-1} H g_0$:

$$(\sigma^{g_0}, V) = (\sigma \circ C_{g_0}, V)$$

כלומר

$$\left(x \in g_0^{-1} H g_0\right) \qquad \sigma^{g_0}(x) = \sigma\left(g_0 x g_0^{-1}\right)$$

לכל פונקציה $f : G \to V$ נסמן $Af : G \to V$ ע"י

$$(Af)(g) = (Af)(g_0 g)$$

נניח כי $f \in \mathrm{Ind}_H^G \sigma$: לכל $x \in g_0^{-1} H g_0$ מתקיים

$$\begin{aligned}(Af)(xg) &= f(g_0 x g) \\ &= f\left(\left(g_0 x g_0^{-1}\right)(g_0 g)\right) \\ &= \sigma\left(g_0 x g_0^{-1}\right) f(g_0 g) \\ &= \sigma^{g_0}(x)(Af)(g)\end{aligned}$$

לכן $Af \in \mathrm{Ind}_{g_0^{-1} H g}^G \sigma^{g_0}$.

<u>סה"כ:</u> קיבלנו כי A משרה איזומורפיזם של G מודולים

$$\mathrm{Ind}_H^G \sigma \xrightarrow{A} \mathrm{Ind}_{g_0^{-1} H g_0}^G \sigma^{g_0}$$

מקרה פרטי: אם $g_0^{-1} H g_0 = H$ אז נקבל איזומורפיזם של G־מודולים:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_H^G \sigma &\approx \mathrm{Ind}_H^G \sigma^{g_0} \\ \mathrm{ind}_H^G \sigma &\approx \mathrm{ind}_H^G \sigma^{g_0}\end{aligned}$$

הדדיות פרובניוס $G \subseteq H$ תת־חבורה סגורה. (σ, V) הצגה חלקה של H. יש H־הומומורפיזם קנוני:

$$\begin{aligned}\alpha_\sigma : \mathrm{Ind}_H^G \sigma &\to V \\ f &\mapsto f(1)\end{aligned}$$

זהו H־מורפיזם, כי לכל $h \in H$ ו $f \in \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ מתקיים

$$\alpha_\sigma(\rho(h) f) = \alpha_\sigma(x \mapsto f(xh)) = f(h) = \sigma(h) f(1)$$

ומצד שני

$$\sigma(h) \alpha_\sigma(f) = \sigma(h) f(1)$$

משפט 22.7 בסימונים אלה, לכל הצגה (π,U) של G, ההצגה הקנונית

$$\begin{array}{rcl}\eta:\mathrm{Hom}_G\left(\pi,\mathrm{Ind}_H^G\sigma\right) & \to & \mathrm{Hom}_H\left(\pi\restriction_H,\sigma\right)\\ \varphi & \mapsto & \alpha_\sigma\circ\varphi\end{array}$$

היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים פונקטוריאלית ב־π וב־σ וההופכית

$$\begin{array}{rcl}\eta':\mathrm{Hom}_H\left(\pi\restriction_H,\sigma\right) & \to & \mathrm{Hom}_G\left(\pi,\mathrm{Ind}_H^G\sigma\right)\\ f & \mapsto & f_*:U\to\mathrm{Ind}_H^G\sigma\end{array}$$

נתונה ע"י

$$(u\in U,g\in G)\qquad (f_*(u))(g)=f(\pi(g)u)$$

הוכחה: ראשית $f_*(u)\in\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ לכל $u\in U$ כי

$$\begin{array}{rcl}(\forall h\in H) & & (f_*(u))(hg)\\ & = & f(\pi(hg)u)\\ & = & f(\pi(h)\pi(g)u)\\ & = & \sigma(h)f(\pi(g)u)\\ & = & \sigma(h)(f_*(u)(g))\end{array}$$

בנוסף קיים $K\subseteq G$ עם $u\in U^K$ (כי π חלקה) ולכן ל־$k\in K$

$$\begin{array}{rcl}(f_*(u))(gk) & = & f(\pi(gk)u)\\ & = & f(\pi(g)\pi(k)u)\\ & = & f(\pi(g)u)\\ & = & (f_*(u))(g)\end{array}$$

שנית $f_*:U\to\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ הוא G־מורפיזם כי לכל $g,g_0\in G$ מתקיים

$$\begin{array}{rcl}(f_*(\pi(g_0)u))(g) & = & f(\pi(g)\pi(g_0)u)\\ & = & f(\pi(gg_0)u)\\ & = & (f_*(u))(gg_0)\\ & = & (\rho(g_0)f_*(u))(g)\end{array}$$

■

23 דואליות של השראה

תהי G חבורת־l, $H\subseteq G$ תת־חבורה סגורה. נגדיר כרקטר (חלק) על H לפי

$$\delta_{H\backslash G}=\frac{\delta_H}{\delta_G\restriction_H}$$

נסתכל על $\delta_{H\backslash G}$ כהצגה חלקה של H (כי $\mathrm{GL}(\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^\times$) על $\mathbb{C}$.

טענה 23.1 קיים פונקציונל

$$\nu=\nu_{H\backslash G}:\mathrm{ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\right)\quad\to\quad\mathbb{C}$$

השונה מאפס ואינווריאנטי לפעולת G, והוא יחיד עד כדי כפל בקבוע השונה מאפס. כלומר, אם נסתכל על $\mathbb{C}$ כ-G-מודול טריוואלי אז

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G},\mathbb{C}\right)\quad=\quad 1$$

בנוסף, ניתן לקחת את $\nu_{H\backslash G}$ חיובי במובן שעבור $0\leq f\in\mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}$ ו-$f\neq 0$ מתקיים $\nu_{H\backslash G}\left(f\right)>0$. במקרה זה, $\nu_{H\backslash G}$ נקבע ע"י כפל בסקלר חיובי.

הערה 23.2 (סימונים)

$$\begin{aligned}\nu_{H\backslash G}\left(f\right)&=\left\langle\nu_{H\backslash G},f\right\rangle\\&=\int_{H\backslash G}f\left(g\right)d\nu_{H\backslash G}\end{aligned}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}\left(g_0\in G\right)\qquad&\int_{H\backslash G}f\left(gg_0\right)d\nu_{H\backslash G}\left(g\right)\\=\quad&\int_{H\backslash G}f\left(g\right)d\nu_{H\backslash G}\left(g\right)\end{aligned}$$

או

$$\left\langle\nu_{H\backslash G},\rho\left(g_0\right)f\right\rangle\quad=\quad\left\langle\nu_{H\backslash G},f\right\rangle$$

הוכחה: (לפי [BH]). תהיינה μ^H,μ^G מידות האר משמאל. נגדיר העתקה לינארית:

$$\begin{aligned}\eta:C_c^{\infty}\left(G\right)&\to\left\{\text{Functions from }G\text{ to }\mathbb{C}\right\}\\f&\mapsto\tilde{f}\end{aligned}$$

לפי

$$\tilde{f}\left(g\right)\quad=\quad\int_H\delta_G\left(h\right)f\left(hg\right)d\mu^H\left(h\right)$$

ברור ש-η מתחלפת עם הזזות מימין, כלומר

$$\left(g_0\in G\right)\qquad\widetilde{\rho\left(g_0\right)f}=\rho\left(g_0\right)\tilde{f}$$

וכמו כן, כל איבר $\tilde{f}=\eta\left(f\right)$ בתמונה מקיים:

$$\binom{h_0\in H}{g\in G}\qquad\tilde{f}\left(h_0g\right)=\delta_{H\backslash G}\left(h_0\right)\tilde{f}\left(g\right)$$

אכן:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(h_0 g) &= \int_H \delta_G(h) f(hh_0 g)\, d\mu^H(h) \\
\underbrace{}_{h\mapsto hh_0^{-1}} &= \int_H \delta_G\left(hh_0^{-1}\right) f(hg)\, d\mu^H\left(hh_0^{-1}\right) \\
\underbrace{}_{d\mu^H\left(hh_0^{-1}\right)=\delta_H(h_0)d\mu^H(h)} &= \int_H \delta_G\left(hh_0^{-1}\right) f(hg)\, \delta_H(h_0)\, d\mu^H(h) \\
&= \frac{\delta_H(h_0)}{\delta_G(h_0)} \int_H \delta_G(h) f(hg)\, d\mu^H(h) \\
&= \delta_{H\backslash G}(h_0)\, \tilde{f}(g)
\end{aligned}$$

מאחר ש$C_c^\infty(G)$ מודול חלק, נובע ש $\mathrm{Im}\eta$ נמצא בחלק החלק של הG־מודול (עם הזזות מימין) של הפונקציות המקיימות $\tilde{f}(h_0g) = \delta_{H\backslash G}(h_0)\tilde{f}(g)$. לכן

$$\mathrm{Im}\eta \quad\subseteq\quad \mathrm{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G}$$

וμ G־מורפיזם. בנוסף, ברור שאם $(Hg)\cap \mathrm{supp} f = \emptyset$ $(g\in G)$ אז $\tilde{f}(g)=0$. כלומר $\mathrm{supp}\tilde{f}\subseteq H\cdot \mathrm{supp} f$. מאחר ש $\mathrm{supp} f$ קומפקטית, נובע $\mathrm{Im}\eta\subseteq \mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}$. סה"כ קיבלנו G־מורפיזם:

$$\eta : C_c^\infty(G) \quad\to\quad \mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}$$

<u>נבדוק שη על:</u> די לבדוק ש $\mathrm{Im}\eta \supseteq \left(\mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}\right)^K$ $(\forall K\subseteq G)$.

לצורך זה, די לבדוק שאם $\varphi\in\left(\mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}\right)^K$ ו $\mathrm{supp}\varphi\subseteq HgK$ אז $\varphi\in\mathrm{Im}\eta$. אבל מימד פונקציות אלה הוא ≥ 1 (אפילו $=1$). כעת ניקח $f=\chi_{gK}$. $\tilde{f}(g)>0$. (כי $f(g)>0$ ו $f\geq 0$), ובפרט $\tilde{f}\neq 0$. כמו כן:

$$f\in C_c^\infty(G)^K \quad\Longrightarrow\quad \tilde{f}\in\left(\mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}\right)^K$$

ו $\mathrm{supp}\tilde{f}\subseteq H\mathrm{supp} f = HgK$ לכן $\varphi=\tilde{f}$ מקיימת דרישות לעיל ומכאן η על.

הערה 23.3 $\tilde{f}\geq 0$ (כי $f\geq 0$, $\delta_{H\backslash G}\geq 0$) והשיקולים לעיל מראים שלכל $0\leq\varphi\in \mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}$ קיימת $f\in C_c^\infty(G)$ עם $\varphi=\tilde{f}$. (לוקחים $K\subseteq G$ עם $\varphi\in\left(\mathrm{ind}\delta_H^G\right)^K$)

כעת נסמן $\mu_r^G=\delta_G\mu^G$ מידת האר מימין על G. נראה בהמשך ש:

$$(f\in C_c^\infty(G)) \qquad \tilde{f}=0 \implies \int_G f(g)\,d\mu_r^G(g)=0$$

אז נוכל להגדיר $\nu_{H\backslash G}:\mathrm{ind}_H^G\delta\to\mathbb{C}$ ע"י

$$\left(\tilde{f}\in\mathrm{ind}_H^G\delta\right) \qquad \left\langle \nu_{H\backslash G},\tilde{f}\right\rangle = \int_G f(g)\,d\mu_r^G(g) = \left\langle \mu_r^G, f\right\rangle$$

אינוואריאנטיות מימין ברורה. חיוביות ברורה כי אם $0 \leq \varphi \in \operatorname{ind}_H^G \delta_{H\backslash G}$, אז קיימת $f \geq 0$ כך ש $\varphi = \tilde{f}$.

טענה 23.4 $\int_G f(g)\, d\mu_r^G(g) = 0 \implies \tilde{f} = 0 \; (f \in C_c^\infty(G))$

הוכחה: תהי $K \subseteq G$ עם $f \in C_c^\infty(G)^K$. אז יש תיאור

$$f = \sum_{i \in I} f(g_i)\, \chi_{g_i K}$$

כאשר I סופית והקוסטים $g_i K$ שונים זה מזה. אז

$$\begin{aligned}\left\langle \mu_r^G, f \right\rangle &= \sum_{i \in I} f(g_i)\, \mu_r(g_i K) \\ &= \sum_{i \in I} f(g_i)\, \delta_G(g_i)\, \mu_r(K)\end{aligned}$$

לכן צריך להוכיח ש $\sum_{i \in I} f(g_i)\, \delta_G(g_i) = 0$.

כעת נאמר ש $g_{i_1} \sim g_{i_2}$ אם $Hg_{i_1}K = Hg_{i_2}K$. נחלק את I למחלקות שקילות. די להראות שלכל $j \in I$ מתקיים

$$\sum_{g_i \sim g_j} f(g_i)\, \delta_G(g_i) = 0$$

(הסכום רץ על מחלקת השקילות של g_j).
אבל נתון ש

$$\begin{aligned}0 &= \tilde{f}(g_j) \\ &= \int_H \delta_G(h)\, f(hg_j)\, d\mu_H(h) \\ &= \sum_i \int_H \delta_G(h)\, f(g_i)\, \chi_{g_i K}(hg_j)\, d\mu_H(h) \\ &= \sum_i \int_H \delta_G(h)\, f(g_i)\, \chi_{H \cap \left(g_i K g_j^{-1}\right)}(h)\, d\mu_H(h)\end{aligned}$$

אם $g_j \not\sim g_i$ אז $(Hg_j) \cap (g_i K) = \emptyset$ ולכן $H \cap \left(g_i K g_j^{-1}\right) = \emptyset$ ולכן נשאר עם

$$0 = \sum_{g_i \sim g_j} \int_H \delta_G(h)\, f(g_i)\, \chi_{H \cap \left(g_i K g_j^{-1}\right)}(h)\, d\mu_H(h)$$

אבל $\delta_G\left(g_j K g_j^{-1}\right) = 1$ (כי $g_j K g_j^{-1}$ חבורה קומפקטית). לכן

$$\begin{aligned}\delta_G\left(g_i K g_j^{-1}\right) &= \delta_G\left(g_i g_j^{-1}\right) \delta_G\left(K g_j^{-1}\right) \\ &= \delta_G\left(g_i g_j^{-1}\right) \\ &= \delta_G(g_i)\, \delta(g_j)^{-1}\end{aligned}$$

לכן נקבל:

$$\sum_{g_i\sim g_j}\int_H \delta_G(h) f(g_i)\chi_{H\cap\left(g_iKg_j^{-1}\right)}(h)\,d\mu_H(h) \quad=\quad \delta(g_j)^{-1}\sum_{g_i\sim g_j}\delta_G(g_i) f(g_i)\mu^H\left(H\cap\left(g_iKg_j^{-1}\right)\right)$$

כעת אם $g_i\sim g_j$ אז יש $k_0\in K$ ו $h_0\in H$ עם $g_i=h_0g_jk_0$ ולכן

$$\begin{aligned} H\cap\left(g_iKg_j^{-1}\right) &= H\cap\left(h_0g_jk_0Kg_j^{-1}\right)\\ &= H\cap\left(h_0g_jKg_j^{-1}\right)\\ &= h_0\left(H\cap\left(g_jKg_j^{-1}\right)\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\mu^H\left(H\cap\left(g_iKg_j^{-1}\right)\right) \quad=\quad \mu^H\left(H\cap\left(g_jKg_j^{-1}\right)\right)>0$$

כי $H\cap\left(g_jKg_j^{-1}\right)$ היא סביבה של 1 בH. סה"כ קיבלנו

$$0 \quad=\quad \underbrace{\delta(g_j)^{-1}\mu^H\left(H\cap\left(g_iKg_j^{-1}\right)\right)}_{>0}\sum_{g_i\sim g_j}\delta_G(g_i) f(g_i)$$

ולכן הוכחנו את טענת העזר. ■

יחידות יהי $\nu:\mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}\to\mathbb{C}$ פונקציונל אינווריאנטי להזזות G מימין. אז

$$\nu\circ\eta:C_c^\infty(G)\quad\xrightarrow{\eta}\quad\mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}\quad\xrightarrow{\nu}\quad\mathbb{C}$$

פונקציונל אינווריאנטי להזזות מימין. לכן קיים $\lambda\in\mathbb{C}$ כך ש $\nu\circ\eta=\lambda\mu_r^G$. אבל $\nu_{H\backslash G}$ מוגדר לפי $\nu_{H\backslash G}\circ\eta=\mu_r^G$, ולכן $\nu\circ\eta=\lambda\cdot\nu_{H\backslash G}\circ\eta$ אבל η על ולכן $\nu=\lambda\nu_{H\backslash G}$. ■

דואליות תהי G חבורת־l, $H\subseteq G$ תת־חבורה סגורה. נבחר פונקציונל G־אינווריאנטי חיובי $\nu_{H\backslash G}$. תהי (σ,U) הצגה חלקה של H. נתייחס ל$\left(\tilde\sigma,\tilde U\right)$ ול $\left(\delta_{H\backslash G}\tilde\sigma,\tilde U\right)$. אם

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_H^G\sigma &\ni \varphi:G\to U\\ \mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde\sigma\right) &\ni f:G\to U\end{aligned}$$

אז $\langle f,\varphi\rangle:G\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $\langle f,\varphi\rangle(g)=\langle f(g),\varphi(g)\rangle$
מקיימת $\langle f,\varphi\rangle\in\mathrm{ind}_H^G\delta_{H\backslash G}$. אכן:

$$\begin{aligned}\binom{h\in H}{g\in G}\quad \langle f(hg),\varphi(hg)\rangle &= \left\langle\delta_{H\backslash G}(h)\tilde\sigma(h)f(g),\sigma(h)\varphi(g)\right\rangle\\ &= \delta_{H\backslash G}(h)\langle f(g),\varphi(g)\rangle\end{aligned}$$

מסקנה 23.5 קיימת תבנית בילינארית:

$$\begin{aligned} b:\left(\mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right)\right)\times\left(\mathrm{ind}_H^G\sigma\right) &\to \mathbb{C} \\ b\left(f,\varphi\right) &= \int_{H\backslash G}\left\langle f,\varphi\right\rangle\left(g\right)d\nu_{H\backslash G}\left(g\right) \end{aligned}$$

התבנית היא g אינווריאנטית:

$$\begin{aligned} &\left(g_0\in G\right) \\ b\left(\rho\left(g_0\right)f,\rho\left(g_0\right)\varphi\right) &= \int_{H\backslash G}\left\langle\rho\left(g_0\right)f,\rho\left(g_0\right)\varphi\right\rangle\left(g\right)d\nu_{H\backslash G}\left(g\right) \\ &= \int_{H\backslash G}\left\langle f\left(gg_0\right),\varphi\left(gg_0\right)\right\rangle d\nu_{H\backslash G}\left(g\right) \\ &= \int_{H\backslash G}\left\langle f\left(g\right),\varphi\left(g\right)\right\rangle d\nu_{H\backslash G}\left(g\right) \\ &= b\left(f,\varphi\right) \end{aligned}$$

מסקנה 23.6 קיים G-הומומורפיזם

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right) &\longrightarrow \left(\mathrm{ind}_H^G\sigma\right)' \\ f &\longrightarrow \left[\varphi\mapsto b\left(f,\varphi\right)=\int_{H\backslash G}\left\langle f,\varphi\right\rangle\left(g\right)d\nu_{H\backslash G}\left(g\right)\right] \end{aligned}$$

מאחר ש$\mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right)$ חלקה נקבל G-הומומורפיזם:

$$\begin{aligned} \eta:\mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right) &\to \widetilde{\mathrm{ind}_H^G\sigma} \\ \left(\eta f\right)\left(\varphi\right) &= b\left(f,\varphi\right) \end{aligned}$$

טענה 23.7 η לעיל איזומורפיזם של G-מודולים.

הוכחה: שני המודולים חלקים. לכן די להוכיח שלכל $K\subseteq G$:

$$\eta^K:\left(\mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right)\right)^K \longrightarrow \left(\widetilde{\mathrm{ind}_H^G\sigma}\right)^K \xrightarrow{\approx} \left(\left(\mathrm{ind}_H^G\sigma\right)^K\right)'$$

הוא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים. (כאשר החץ הימני הוא צמצום על $\left(\mathrm{ind}_H^G\sigma\right)^K$).

סימונים וחישוב יהי $g_0 \in G$.

1. נגדיר $F_{g_0} \in \mathrm{ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\right)$ ע"י

$$F\left(hg_0k\right) = \delta_{H\backslash G}\left(h\right) \qquad \left(h \in H, k \in K\right)$$

ו$F_{g_0} = 0$ חוץ לHg_0K. F_{g_0} מוגדרת היטב כי $H \cap \left(g_0Kg_0^{-1}\right)$ קומפקטית ו $\delta > 0$, ולכן $\delta_{H\backslash G} \restriction_{H\cap\left(g_0Kg_0^{-1}\right)} = 1$, כלומר $1_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^{\delta_{H\backslash G}, H\cap\left(g_0Kg_0^{-1}\right)}$. (במילים אחרות, $1_{\mathbb{C}}$ אינווריאנטי להצגה (הכרקטר $\delta_{H\backslash G}$) על הקבוצה $H \cap \left(g_0Kg_0^{-1}\right)$, ולכן ניתן להגדיר $F_{g_0}\left(g_0\right) = 1$ וזה מגדיר לחלוטין את ערך F על הקבוצה Hg_0K)
אז $F_{g_0} \neq 0$, $F_{g_0} \geq 0$ ונסמן

$$c_{g_0} \quad = \quad \int_{H\backslash G} F_{g_0}\left(g\right) d\nu_{H\backslash G}\left(g\right) > 0$$

2. לכל $u \in U^{H\cap\left(g_0Kg_0^{-1}\right)}$ נגדיר איבר $\varphi_{g_0,u} \in \mathrm{ind}_H^G\sigma$ ע"י $\varphi_{g_0,u}\left(hg_0k\right) = \sigma\left(h\right)u$ ו$\varphi_{g_0,u} = 0$ מחוץ לHg_0K, ולכל $\tilde{u} \in U^{H\cap\left(g_0Kg_0^{-1}\right)}$ נגדיר $f_{g_0,\tilde{u}} \in \mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right)$:
אכן, שוב מתקיים $\delta_{H\backslash G} \restriction_{H\cap\left(g_0Kg_0^{-1}\right)}$ ולכן $u \in U^{\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}, H\cap\left(g_0Kg_0^{-1}\right)}$. נגדיר

$$f_{g_0,\tilde{u}}\left(hg_0k\right) \quad = \quad \left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right)\left(h\right)\tilde{u}$$

ו $f_{g_0,\tilde{u}} = 0$ מחוץ לHg_0K. אז

$$\left\langle f_{g_0,\tilde{u}}, \varphi_{g_0,u}\right\rangle \quad = \quad F_{g_0}\left\langle \tilde{u}, u\right\rangle$$

מסקנה 23.8

$$\left(\eta^K\left(f_{g_0\tilde{u}}\right)\right)\left(\varphi_{g_0,u}\right) \quad = \quad c_{g_0}\left\langle \tilde{u}, u\right\rangle$$

3. אם $g_0, g_1 \in G$ ו $\left(Hg_0K\right) \cap \left(Hg_1K\right) = \emptyset$ אז

$$\left\langle f_{g_0,\tilde{u}}, \varphi_{g,u}\right\rangle \quad = \quad 0$$

כעת יהי $G = \bigcup_{i\in I} Hg_iK$ פירוק זר. אז יש איזומורפיזמים

$$\alpha : \bigoplus_{i\in I} U^{H\cap\left(g_iKg_i^{-1}\right)} \quad \xrightarrow{\approx} \quad \left(\mathrm{ind}_H^G\sigma\right)^K$$
$$\beta : \prod_{i\in I} \tilde{U}^{\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}, H\cap\left(g_iKg_i^{-1}\right)} \quad \xrightarrow{\approx} \quad \left(\mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right)\right)^K$$

מתקיים $\prod_{i\in I}\tilde{U}^{H\cap\left(g_iKg_i^{-1}\right)}=\prod_{i\in I}\tilde{U}^{\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma},H\cap\left(g_iKg_i^{-1}\right)}$ ויש איזומורפיזם

$$\begin{array}{rcl}\gamma:\prod_{i\in I}\tilde{U}^{H\cap\left(g_iKg_i^{-1}\right)} & \xrightarrow{\approx} & \left(\bigoplus_{i\in I}U^{H\cap\left(g_iKg_i^{-1}\right)}\right)' \\ \left(\tilde{u}_i\right)_{i\in I} & \mapsto & \left[\left(u_i\right)_{i\in I}\mapsto\sum c_{g_i}\left\langle\tilde{u}_i,u_i\right\rangle\right]\end{array}$$

לבסוף החישוב הקודם מראה שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{array}{ccc}\left(\mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\tilde{\sigma}\right)\right)^K & \xrightarrow{\eta^K} & \left(\left(\mathrm{ind}_H^G\sigma\right)^K\right)' \\ \beta\uparrow\approx & & \alpha'\downarrow\approx \\ \prod_{i\in I}\tilde{U}^{H\cap\left(g_iKg_i^{-1}\right)} & \underset{\approx}{\xrightarrow{\gamma}} & \left(\bigoplus_{i\in I}U^{H\cap\left(g_iKg_i^{-1}\right)}\right)'\end{array}$$

■

הערה 23.9 אם (σ,V) הצגה חלקה של חבורת־l G ו־χ כרקטר חלק של G אז

$$\widetilde{\chi\sigma} = \chi^{-1}\cdot\tilde{\sigma}$$

(על $\tilde{V}$)

הוכחה:

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\widetilde{\chi\sigma}(g)\right)\tilde{v},v\right\rangle &= \left\langle\tilde{v},(\chi\sigma)\left(g^{-1}\right)v\right\rangle \\ &= \left\langle\tilde{v},\chi\left(g^{-1}\right)\sigma\left(g^{-1}\right)v\right\rangle \\ &= \chi\left(g^{-1}\right)\left\langle\tilde{v},\sigma\left(g^{-1}\right)v\right\rangle \\ &= \chi\left(g^{-1}\right)\left\langle\tilde{\sigma}(g)\tilde{v},v\right\rangle \\ &= \left\langle\chi\left(g^{-1}\right)\tilde{\sigma}(g)\tilde{v},v\right\rangle \\ &= \left\langle\left(\chi^{-1}\tilde{\sigma}\right)(g)\tilde{v},v\right\rangle\end{aligned}$$

■

אינדוקציה מנורמלת אם (σ,V) הצגה חלקה של תת חבורה סגורה $H\subseteq G$ נסמן

$$\begin{aligned}I_H^G\sigma &= \mathrm{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}^{\frac{1}{2}}\sigma\right) \\ i_H^G\sigma &= \mathrm{ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}^{\frac{1}{2}}\sigma\right)\end{aligned}$$

כאן

$$\begin{array}{rcl}\delta_{H\backslash G}^{\frac{1}{2}}:G & \to & (0,\infty) \\ g & \mapsto & \sqrt{\delta_{H\backslash G}(g)}\end{array}$$

כרקטר חלק.

תכונה

$$\widetilde{i_H^G\sigma} \approx I_H^G\tilde{\sigma}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\widetilde{i_H^G\sigma} &= \operatorname{ind}_H^G\widetilde{\left(\delta_{H\backslash G}^{\frac{1}{2}}\sigma\right)}\\ &\approx \operatorname{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\cdot\widetilde{\delta_{H\backslash G}^{\frac{1}{2}}\sigma}\right)\\ &\approx \operatorname{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}\cdot\delta_{H\backslash G}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\sigma}\right)\\ &= \operatorname{Ind}_H^G\left(\delta_{H\backslash G}^{\frac{1}{2}}\widetilde{\sigma}\right)\\ &= I_H^G\tilde{\sigma}\end{aligned}$$

■

24 סקירה של שדות מקומיים

24.1 סימונים

- F שדה מקומי.
- $|\cdot|:F\to[0,\infty)$ הערכה
מגדירים מטריקה $d(x,y)=|x-y|$ ההופכת את F לשדה טופולוגי
- π ראשוני.
- $\mathcal{O}$ השלמים.
- $\mathcal{P}=\pi\mathcal{O}$ האידאל המקסימלי היחיד של $\mathcal{O}$.
- $U=\mathcal{O}^\times=\mathcal{O}\setminus\mathcal{P}$ היחידות של $\mathcal{O}$.
- $\mathcal{P}^n=\pi^n\mathcal{O}$, $\mathcal{P}^0=\mathcal{O}$

$$\cdots\supsetneqq\mathcal{P}^{-1}\supsetneqq\mathcal{P}^0\supsetneqq\mathcal{P}^1\supsetneqq\cdots$$

- $\{\mathcal{P}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (או $\{\mathcal{P}^n\}_{n\geq0}$) בסיס לסביבה 0 ב־$F$ (תת־חבורות קומפקטיות פתוחות).
לכן F מרחב־l. $(F,+)$ חבורת־l.
- $(F^\times,\cdot)$ חבורת־l. $\left\{1+\mathcal{P}^j\right\}_{j\geq1}$ בסיס לסביבות 1 המורכב מחבורות (כפל) פתוחות קומפקטיות.

• הערכה מעריכית

$$\begin{aligned}\nu : F^{\times} &\to \mathbb{Z}\\ |x| &= |\pi|^{\nu(x)}\end{aligned}$$

ומגדירים גם $\nu(0)=\infty$.

• $x\in\mathcal{P}^n \iff \nu(x)\geq n$

• F הוא $\mathcal{O}$־מודול, וכל $\mathcal{P}^n$ הוא תת $\mathcal{O}$־מודול (נוצר ע"י π^n).

תכונה אם $0\neq L\subseteq F$ תת־מודול נוצר סופית אז יש $n\in\mathbb{Z}$ יחיד עם $L=\mathcal{P}^n$.

• עבור $n\geq 0$, $\mathcal{P}^n\subseteq\mathcal{O}$ אידאל, וכל אידאל $0\neq I\subseteq\mathcal{O}$ מצורה זאת:

$$a\mathcal{P}^n=\mathcal{P}^{n+\nu(a)}\qquad\left(a\in F^{\times}\right)$$

• יש איזומורפיזם טופולוגי

$$\begin{aligned}F^{\times} &\leftrightarrow \mathbb{Z}\times U\\ \pi^n u &\leftarrow (n,u)\\ x &\mapsto \left(\nu(x),\frac{x}{\pi^{\nu(x)}}\right)\end{aligned}$$

24.2 כרקטרים

1. כמו לכל חבורת־l חילופית, $\hat{F}$ = הכרקטרים החלקים של F היא חבורה (עם כפל נקודתי) $(\chi : F\to\mathbb{C})$

$$(\chi_1\chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$$

2. אם $\chi : F\to\mathbb{C}^{\times}$ כרקטר חלק אז

$$\mathrm{Im}\chi\subseteq\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$$

כלומר χ אוניטרי. אכן, די להראות ש $\chi\restriction_{\mathcal{P}^n}$ אוניטרי, וזה נובע מכך ש$\mathcal{P}^n$ קומפקטית.

3. אם $\chi\in\hat{F}$ כרקטר חלק ו $a\in F$ אז $\chi^a : F\to\mathbb{C}^{\times}$ המוגדר ע"י $\chi^a(x)=\chi(ax)$ $(x\in F)$ הוא כרקטר חלק.
אם $\chi=1$ אז $\chi^a=1$ לכל a.
אם $a=0$ אז $\chi^a(x)=1$ לכל x.

4. קיים $1\neq\chi\in\hat{F}$.

5. אם $\chi,\chi'\in\hat{F}$ ו$\chi\neq 1$ אז <u>קיים</u> $a\in F$ <u>יחיד</u> כך ש $\chi'=\chi^a$. כלומר, ההעתקה:

$$\begin{aligned}F &\to \hat{F}\\ a &\mapsto \chi^a\end{aligned}$$

איזומורפיזם של חבורות.

24.3 קבוצות קומפקטיות

תהי $F \subseteq G$ תת־קבוצה. אז G קומפקטית $\Longleftrightarrow$ G סגורה בF ו $\sup_{x\in G}|x| < \infty$.

טענה 24.1 תהי $D \subseteq F^{\times}$ תת־קבוצה. התנאים הבאים שקולים:

1. D קומפקטית
2. D סגורה ב$F^{\times}$ ו $\sup_{x\in D}|x| < \infty$, $\inf_{x\in D}|x| > 0$
3. $D \subseteq F$ קומפקטית ו $0 \notin D$.

24.4 נרמול ומודולוס

תהי $R \subseteq \mathcal{O}$ קבוצת נציגים, כלומר כך שצמצום העתקות המנה

$$q : \mathcal{O} \quad \to \quad \overline{F} = \mathcal{O}/\mathcal{P}$$

על R היא חד־חד־ערכית ועל: $q\restriction_R : R \to \overline{F}$ אז $|R| = \left|\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{P}}\right| = \left|\overline{F}\right|$ (תורת הקבוצות).
נורמל את $|\cdot|$ (ע"י שינוי ל$|\cdot|^{\alpha}$ $\alpha > 0$), כך ש $|\pi| = \frac{1}{|\overline{F}|}$.

$(F,+)$ היא חבורת־l חילופית ולכן קיימת מידת הארה מימין ומשמאל μ. נניח שμ מנורמלת כך ש $\mu(\mathcal{O}) = 1$. לכל $a \in F^{\times}$ ההעתקה

$$\begin{aligned} a\cdot : F &\to F \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

היא אוטומורפיזם של החבורת־l $(F,+)$. לכן מוגדרת פונקציית מודולוס

$$\delta(a) \quad = \quad \delta(a\cdot) \in (0,\infty)$$

מתקיים $\delta(a) = \frac{\mu(a\mathcal{O})}{\mu(\mathcal{O})}$ וגם

$$\delta(ab) \quad = \quad \delta(a)\,\delta(b)$$

(כי $(ab)\cdot = (a\cdot)\circ(b\cdot)$) מסמנים גם

$$\delta(0_F) \quad = \quad 0_{\mathbb{C}}$$

תכונה $\delta(a) = |a|$ $(a \in F)$ **הוכחה:** מכפליות שני הצדדים די להראות שהשוויון נכון כאשר $a \in U$ ו $a = \pi$.
אם $a \in U$ אז

$$\delta(a) \quad = \quad \frac{\mu(a\mathcal{O})}{\mu(\mathcal{O})} = \frac{\mu(\mathcal{O})}{\mu(\mathcal{O})} = 1 = |a|$$

אם $a=\pi$ אז $\mathcal{O}=\dot{\bigcup}_{r\in R}\left(r+\mathcal{P}\right)$ ולכן

$$\begin{aligned}\mu\left(\mathcal{O}\right) &= \sum_{r\in R}\mu\left(r+\mathcal{P}\right)\\ &= \left|R\right|\mu\left(\mathcal{P}\right)\\ &= \left|\overline{F}\right|\cdot\mu\left(\mathcal{P}\right)\end{aligned}$$

כעת

$$\delta\left(\pi\right) = \frac{\mu\left(\pi\mathcal{O}\right)}{\mu\left(\mathcal{O}\right)}=\frac{\mu\left(\mathcal{P}\right)}{\mu\left(\mathcal{O}\right)}=\frac{1}{\left|\overline{F}\right|}=\left|\pi\right|$$

■

25 מודול Jacquet

25.1 הגדרה

תהי N חבורה, $\theta:N\to\mathbb{C}^{\times}$ כרקטר (מופשט) ו־V N־מודול. מגדירים

$$V\left(\theta\right)=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{nv-\theta\left(n\right)v\mid n\in N,v\in V\right\}\qquad\left(V\left(\pi,\theta\right)=\right)$$

ו

$$V_{\theta}=V/V\left(\theta\right)\qquad\left(V_{\pi,\theta}=\right)$$

הערה 25.1 אם $\left(\pi,V\right)$ הצגה,

$$V\left(\theta\right) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\pi\left(n\right)v-\theta\left(n\right)v\mid n\in N,v\in V\right\}$$

סימון ביחס לכרקטר הטריוואלי: אם $\theta=1$ הכרקטר הטריוואלי מסמנים

$$\begin{aligned}V\left(1\right) &= V\left(N\right)=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{nv-v\mid n\in N,v\in V\right\}\\ V_{1} &= V_{N}=V/V\left(N\right)\end{aligned}$$

V_N נקרא מודול ז'קה (V_{θ} מודול ז'קה ביחס ל־θ).

תכונה

$$\begin{aligned}V\left(\pi,\theta\right) &= V\left(\theta^{-1}\pi,1\right)=V\left(N\right)\\ V_{\pi,\theta} &= V_{\theta^{-1}\pi,1}=V_{N}\end{aligned}$$

כאשר צדי ימין הם ביחס להצגה $\theta^{-1}\pi$.

הוכחה: אכן:

$$\begin{aligned} V(\pi,\theta) &= \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(n)v-\theta(n)v \mid n\in N, v\in V\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\theta^{-1}(n)\pi(n)v-v \mid n\in N, v\in V\right\} \\ &= V\left(\theta^{-1}\pi,1\right) \end{aligned}$$

■

הערה 25.2 אלה הם הסימנים ב[BH].

Bump	כאן ו[BH]
V_N	$V(N)$
$J(V)$	V_N

התאפסות

1. $V(N)=0 \iff N$ פועלת טריוואלית על V, כלומר $v=nv$ (לכל $n\in N$ ו$v\in V$). במקרה זה $V_N=V/V(N)=V$.
2. $V(\theta)=0 \iff N$ פועלת על V "דרך θ", כלומר $nv=\theta(n)v$ (לכל $n\in N$ ו$v\in V$). ואז $V_\theta=V$.
3. אם V N־מודול טריוואלי ($v=nv$) ואם $\theta\neq 1$ כרקטר לא טריוואלי של N אז $V(\theta)=V$ ולכן $V_\theta=0$.

   הוכחה: אכן, קיים $n\in N$ עם $\theta(n)\neq 1$ ואז לכל $v\in V$

   $$V(\theta)\quad\ni\quad nv-\theta(n)v=\underbrace{(1-\theta(n))}_{\neq 0}v$$

   ולכן $v\in V(\theta)$. ■

25.2 מבנה של מודול

נניח ש $N\triangleleft M$ תת־חבורה נורמלית של חבורה M, ו(π,V)ש הצגה של M. אז נקבל הצגה $(\pi\restriction_N,V)$ של N.

יהי $\theta:N\to\mathbb{C}^\times$ כרקטר של N. לכל $m\in M$ נגדיר כרקטר $\theta^m:N\to\mathbb{C}^\times$ ע"י

$$\theta^m(n)=\theta\left(mnm^{-1}\right)\qquad(n\in N)$$

אז

$$\pi\left(m^{-1}\right)\restriction_{V(\theta)}:V(\theta)\quad\xrightarrow{\approx}\quad V(\theta^m)$$

איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

הוכחה: אכן,

$$\begin{aligned} \pi\left(m^{-1}\right)(\pi(n)v-\theta(n)v) &= \pi\left(m^{-1}nm\right)\left(\pi\left(m^{-1}\right)v\right)-\theta\left(m^{-1}\left(mnm^{-1}\right)m\right)\pi\left(m^{-1}\right)v \\ &= \pi(n_1)v_1-\theta^m(n_1)v_1\in V(\theta^m) \end{aligned}$$

עם $n_1=m^{-1}nm$, $v_1=\pi\left(m^{-1}\right)v$ ובאופן דומה בכיוון ההפוך. ■

מסקנה 25.3

1. $\pi\left(m^{-1}\right):V\to V$ משרה איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים:

$$V_\theta=V/V\left(\theta\right)\quad\xrightarrow{\approx}\quad V/V\left(\theta^m\right)=V_\theta$$

2. נניח שלכל $m\in M$, $\theta^m=\theta$. אז $V\left(\theta\right)$ M-שמור, וV_θ הופך לM מודול ופעולת N על V_θ היא דרך θ.
3. בפרט $V\left(\theta\right)$ הוא N מודול, V_θ הוא N מודול דרך θ.
4. אם ניתן להרחיב את θ לכרקטר $\theta:M\to\mathbb{C}^\times$ אז

$$\theta^m=\theta$$

(כי $\theta\left(n\right)=\theta\left(m\right)\theta\left(n\right)\theta\left(m\right)^{-1}=\theta\left(mnm^{-1}\right)=\theta^m\left(n\right)$) ולכן $V\left(\theta\right)$ הוא M-שמור וV_θ M-מודול.

שלושה מקרים חשובים

1. עבור הכרקטר הטריוואלי 1 של N ברור ש$1^m=1$ ולכן $V\left(N\right)$, V_N הם M-מודולים (מבנה מושרה מV), כאשר פעולת N על V_N טריוואלית.
2. <u>כרקטרים צמודים:</u> נניח $N\triangleleft\Gamma$, V הוא M-מודול. נאמר ששני כרקטרים, θ,θ' של N צמודים אם קיים $m\in M$ כך ש $\theta'=\theta^m$.

תכונה אם θ,θ' צמודים אז יש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים $V_\theta\cong V_{\theta'}$ ובפרט $V_\theta=0\iff V_{\theta'}=0$.

3. $V\left(\theta\right),V_\theta$ הם N-מודולים כאשר N פועלת דרך θ על V_θ.

הערה 25.4 כל הפעולות מושרות מהמבנה של V כM-מודול.

25.3 פונקטוריאליות

תהי N חבורה. θ כרקטר של N. נניח כי $N\triangleleft M$ (אפשר לקחת $N=M$). אם $f:V\to U$ M-מורפיזם של M-מודולים, אז $f\left(V\left(\theta\right)\right)\subseteq U\left(\theta\right)$, ולכן נקבל העתקות לינאריות

$$\begin{aligned}f\left(\theta\right):V\left(\theta\right)&\to U\left(\theta\right)\\ f_\theta:V_\theta&\to U_\theta\end{aligned}$$

אם $\theta=1$

$$\begin{aligned}f\left(N\right):V\left(N\right)&\to U\left(N\right)\\ f_N:V_N&\to U_N\end{aligned}$$

ואלה M-מורפיזמים של M-מודולים.

בפרט נניח שN פועלת על U דרך θ:

$$nu=\theta\left(n\right)u\qquad\left(n\in N,u\in U\right)$$

אז $U\left(\theta\right)=0$, $U_{\theta}=U$ ויש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(V_{\theta},\underbrace{U}_{=U_{\theta}}\right) & = & \mathrm{Hom}_{N}\left(V_{\theta},U\right)\cong\mathrm{Hom}_{N}\left(V,U\right)\\ f & \leftrightarrow & f\leftrightarrow\left[V\to V_{\theta}\overset{f}{\to}U\right]\end{aligned}$$

הוכחה: אם $\varphi:V\to U$ הוא N־מורפיזם אז $\varphi\left(V\left(\theta\right)\right)\subseteq U\left(\theta\right)=0$ ולכן ניתן לפרק את φ דרך

$$V\quad\overset{q}{\longrightarrow}\quad V_{\theta}=V/V\left(\theta\right)\overset{f}{\longrightarrow}u$$

לבסוף, אם $f:V_{\theta}\to U$ לינארית, אז לכל $z\in V_{\theta}$ ו$n\in N$:

$$f\left(nz\right)\quad=\quad f\left(\theta\left(n\right)z\right)=\theta\left(n\right)f\left(z\right)=n\cdot f\left(z\right)$$

■

חצי דיוק (יהי θ כרקטר של N)
אם

$$0\quad\longrightarrow\quad U\quad\overset{f}{\longrightarrow}\quad V\quad\overset{h}{\longrightarrow}\quad W\quad\longrightarrow\quad0$$

סדרה מדויקת של N־מודולים וN־מורפיזמים, אז הסדרה הבאה

$$U_{N}\quad\overset{f_{N}}{\longrightarrow}\quad V_{N}\quad\overset{h_{N}}{\longrightarrow}\quad W_{N}\quad\longrightarrow\quad0$$

$$\left(\quad U_{\theta}\quad\overset{f_{\theta}}{\longrightarrow}\quad V_{\theta}\quad\overset{h_{\theta}}{\longrightarrow}\quad W_{\theta}\longrightarrow0\quad\right)$$

מדויקת. **הוכחה:** ע"י מעבר של הצגה π ל$\theta^{-1}\pi$ די להתייחס לפונקטור $\left(\cdot\right)_{N}$.
h_{N} על כי h על. יהי $x\in V_{N}$ כך ש $h_{N}\left(x\right)=0$. יהי $\xi\in V$ נציג של x: $x=\xi+V\left(N\right)$. אז $h\left(\xi\right)\in W\left(N\right)$. מאחר ש$h$ על, נובע כי $h\left(N\right):V\left(N\right)\to W\left(N\right)$ על, ולכן קיים $\xi'\in V\left(N\right)$ עם $h\left(\xi'\right)=h\left(\xi\right)$. אז $x=\xi-\xi'+V\left(N\right)$ ו $h\left(\xi-\xi'\right)=0$. מאחר שהסדרה המקורית מדויקת, קיים $u\in U$ עם $f\left(u\right)=\xi-\xi'$ ואז $f_{N}\left(u+U\left(N\right)\right)=\xi-\xi'+V\left(N\right)=x$. ■

25.4 הנחות יסוד

מכאן והלאה $M\triangleleft N$ חבורות־l, $N\subseteq M$ סגורה. θ כרקטר <u>חלק</u> של N, $\left(\pi,V\right)$ הצגה חלקה של N. אז גם $\left(\theta^{-1}\pi,V\right)$ חלקה, ו$V\left(\theta\right)$, V_{θ}, $V\left(N\right)$, V_{N} חלקים (ביחס לM או N).
נניח גם את הנחת הכיסוי הבאה:
לכל תת קבוצה סופית $X\subseteq N$ (ב[BZ] דורשים X קומפקטית) יש <u>תת־חבורה</u> קומפקטית $X\subseteq\Gamma\subseteq N$.

יישום במצב זה $V\left(\Gamma\right)$ $V\left(N\right)=\bigcup_{\substack{\Gamma\subseteq N\\ \Gamma\text{ is compact}}}$ כי אם $z=\sum_{i=1}^{l}\left(n_{i}v_{i}-v_{i}\right)\in V\left(N\right)$ די לקחת $\Gamma\subseteq\left\{ n_{1},\ldots,n_{l}\right\}$ ואז $z\in V\left(\Gamma\right)$.

הדוגמה

$$N=\left\{ \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mid x\in F\right\} \cong\left(F,+\right)$$

ו $F=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{P}^{j}$, נסמן $N_{j}=\begin{pmatrix}1 & \mathcal{P}_{j}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ אז $N=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}N_{j}$ וכל N_{j} קומפקטית.

25.5 קריטריון האינטגרל

תהי N חבורת־l (מכאן מקיימת תנאי כיסוי קומפקטי(?)). θ כרקטר חלק של N. $\left(\pi,V\right)$ הצגה חלקה של N, $v\in V$. אז $v\in V\left(\theta\right)$ אם ורק אם קיימת תת־חבורה קומפקטית $N\subseteq\Gamma$ כך ש

$$\int_{\Gamma}\theta^{-1}\left(\gamma\right)\pi\left(\gamma\right)vd\mu^{\Gamma}\left(\gamma\right)=0$$

(כאשר μ^{Γ} היא מידת האר של Γ) **הוכחה:** ע"י מעבר ל$\theta^{-1}\pi$ אפשר להניח ש$\theta=1$. כעת $v\in V\left(N\right)\iff$ קיימת $\Gamma\subseteq N$ קומפקטית עם $v\in V\left(\Gamma\right)$. נתייחס לחבורת־l Γ:

$$V\left(\Gamma\right)=\text{Ker}\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)$$

ו$\mu^{\Gamma}=\varepsilon_{\Gamma}$ ולכן

$$\pi\left(\varepsilon_{\Gamma}\right)v=\int_{\Gamma}\pi\left(\gamma\right)vd\mu^{\Gamma}\left(\gamma\right)$$

■

הערה 25.5 ההוכחה מראה שאם $\Gamma\subseteq\Gamma_{1}\subseteq N$ קומפקטיות אז $\int_{\Gamma}\theta^{-1}\left(\gamma\right)\pi\left(\gamma\right)vd\mu^{\Gamma}\left(\gamma\right)=0\impliedby\int_{\Gamma_{1}}\theta^{-1}\left(\gamma_{1}\right)\pi\left(\gamma_{1}\right)vd\mu^{\Gamma_{1}}\left(\gamma_{1}\right)=0$. אכן, אפשר להניח $\theta=1$, ומשתמשים ב $V\left(\Gamma\right)\subseteq V\left(\Gamma_{1}\right)$.

מסקנה 25.6

1. אם $V'\subseteq V$ תת־N־מודול, אז: $V'\left(\theta\right)=V\left(\theta\right)\cap V'$, $V'\left(N\right)=V\left(N\right)\cap V'$.
2. $\left(V\left(\theta\right)\right)\left(\theta\right)=V\left(\theta\right)$, $\left(V\left(N\right)\right)\left(N\right)=V\left(N\right)$ כי $V\left(\theta\right)\subseteq V$ תת־מודול ולכן מהמסקנה הקודמת

$$\left(V\left(\theta\right)\right)\left(\theta\right)=V\left(\theta\right)\cap V\left(\theta\right)=V\left(\theta\right)$$

3. $\left(V\left(\theta\right)\right)_{\theta}=0$, $\left(V\left(N\right)\right)_{N}=0$ כי

$$V\left(\theta\right)_{\theta} = \frac{V\left(\theta\right)}{\left(V\left(\theta\right)\right)\left(\theta\right)}=\frac{V\left(\theta\right)}{V\left(\theta\right)}=0$$

4. השלמות:

(א) $\left(V_{N}\right)\left(N\right)=0$, $\left(V_{\theta}\right)\left(\theta\right)=0$ כי N פועלת דרך θ על V_{θ}.

(ב) $\left(V_{N}\right)_{\theta}=0$ אם $\theta\neq1$. אכן, N פועלת טריוואלית על V_{N} וראינו שנובע $\left(V_{N}\right)_{\theta}=0$ כי $\theta\neq1$.

25.6 דיוק

תהי

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{h} W \to 0$$

סדרה מדויקת של N־מודולים חלקים. אז

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & U_{\theta} & \xrightarrow{f_{\theta}} & V_{\theta} & \xrightarrow{h_{\theta}} & W_{\theta} & \to & 0\\ 0 & \to & U_{N} & \xrightarrow{f_{N}} & V_{N} & \xrightarrow{h_{N}} & W_{N} & \to & 0 \end{array}$$

מדויקת.

הערה 25.7 מניחים כאן, כפי שצוין קודם, את התנאי שלכל תת־קבוצה סופית של N יש תת־חבורה קומפקטית של N שמכילה אותה.

הוכחה: די להוכיח שf_{θ} חד־חד־ערכית. אפשר להתייחס לf כהכלה: $f:U\hookrightarrow V$. וראינו ש $U\left(\theta\right)=V\left(\theta\right)\cap U$ ומכאן

$$f_{\theta}:U_{\theta}=\frac{U}{U\left(\theta\right)} \longrightarrow \frac{V}{V\left(\theta\right)}=V_{\theta}$$

חד־חד־ערכית. ■

מסקנה 25.8 יהי V N־מודול חלק. מתוך

$$0 \to V\left(\theta\right) \to V \xrightarrow{q} V_{\theta} \to 0$$

סדרה מדויקת של N־מודולים, נקבל:

$$0 \to V\left(\theta\right)_{\theta} \to V_{\theta} \xrightarrow{q_{\theta}} \left(V_{\theta}\right)_{\theta} \to 0$$

אבל $V\left(\theta\right)_{\theta}=0$. מכאן נקבל

מסקנה 25.9 המנה $q:V\to V_{\theta}$ משרה איזומורפיזם $q_{\theta}:V_{\theta}\xrightarrow{\approx}\left(V_{\theta}\right)_{\theta}$. בפרט עבור $\theta=1$: $V\to V_{N}$ משרה איזומורפיזם $V_{N}\xrightarrow{\approx}\left(V_{N}\right)_{N}$.

טענה 25.10 יהי θ כרקטר לא טריוואלי של N. אז ההכלה $V \hookrightarrow V(N)$ משרה איזומורפיזם (של N־מודולים):

$$V(N)_{\theta} \overset{\approx}{\longrightarrow} V_{\theta}$$

הוכחה: מהסדרה המדויקת

$$0 \to V(N) \to V \to V_N \to 0$$

נקבל סדרה מדויקת

$$0 \to V(N)_{\theta} \to V_{\theta} \to \underbrace{(V_N)_{\theta}}_{=0} \to 0$$

■

25.7 זיהוי וקטורים בעזרת V_θ כאשר N חילופית

טענה 25.11 תהי N חבורת־l חילופית (עם תנאי קומפקטיות). יהי V N־מודול חלק. אז לכל $0 \neq v \in V$ יש $\theta \in \hat{N}$ כך ש $v \notin V(\theta)$ ולכן המנה $q: V \to V_{\theta}$ מקיימת $q(v) \neq 0$.

מסקנה 25.12 באותן הנחות, אם $V_{\theta} = 0$ לכל $\theta \in \hat{N}$ אז $V = 0$.

הוכחה: יהי $U \subseteq V$ תת ה־N־מודול של V הנוצר ע"י v. לכל $\theta \in \hat{N}$ יש תרשים חילופי עם שורות מדויקות:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & U & \overset{i}{\to} & V \\ & & {\scriptstyle q_{U,\theta}}\downarrow & & {\scriptstyle q_{V,\theta}}\downarrow \\ 0 & \to & U_{\theta} & \overset{i_{\theta}}{\to} & V_{\theta} \end{array}$$

נוכיח שקיים $\theta \in \hat{N}$ כך ש $q_{U,\theta}(v) \neq 0$ ואז נקבל:

$$0 \neq (i_{\theta} \circ q_{U,\theta})(v) \quad = \quad (q_{V,\theta} \circ i)(v) = q_{V,\theta}(v)$$

$U \neq 0$ נוצר סופית (ע"י $v \neq 0$) ולכן קיימת לU מנה אי־פריקה W (בפרט $W \neq 0$):

$$U \to W \to 0$$

מדויקת.

מאחר שW אי־פריקה וN חילופית, נובע מהלמה של שור [אנו מניחים שהחבורה היא σ־קומפקטית או שההצגה מותרת] שקיים $\theta \in \hat{N}$ כך ש
$nw = \theta(n)w$ (לכל $n \in N$ ו$w \in W$) וגם נובע $\dim_{\mathbb{C}} W = 1$.

אז $W(\theta) = 0$ ולכן $W_{\theta} = W/W(\theta) = W \neq 0$. מאחר ש $U_{\theta} \to W_{\theta} \to 0$ מדויקת, נובע ש $U_{\theta} \neq 0$. אבל $q_{U,\theta}: U \to U_{\theta}$ N־מורפיזם על וU נוצרת ע"י v ולכן U_{θ} נוצרת ע"י $q_{U,\theta}(v)$ ולכן $q_{U,\theta}(v) \neq 0$. ■

26 החבורה המירבולית Mirabolic [לפי [BH]]

26.1 תכונות כלליות

F שדה מקומי.

$$M = \left\{\begin{pmatrix} t & x \\ & 1\end{pmatrix} \mid t\in F^{\times}, x\in F\right\} \subseteq M_2(F)$$

היא החבורה המירבולית, יחד עם הטופולוגיה המושרית מ־$M_2(F)$ (כאשר הטופולוגיה מתקבלת מהאיזומורפיזם $M_2(F)\approx F^4$)

M הומיאומורפית ל־$F^{\times}\times F$ כמרחב טופולוגי. לכן M מרחב־l. יחד עם הטופולוגיה המושרית מ־$M_2(F)$, M הופכת גם לחבורה טופולוגית. סה"כ M חבורת־l עם הטופולוגיה לעיל.

שתי תתי־חבורות:

$$\begin{aligned} N &= \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1\end{pmatrix} \mid x\in F\right\} \\ A &= \left\{ a(t) = \begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix} \mid t\in F^{\times}\right\}\end{aligned}$$

מתקיים $N\triangleleft M$, $M=NA$. A, N סגורות ב־M וחילופיות.

יש איזומורפיזם של חבורות־l: $A\approx F^{\times}$, $N\approx F$. בפרט, אם נסמן

$$N_j = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{P}^j \\ & 1\end{pmatrix}$$

אז N_j פתוחות וקומפקטיות ב־N ומהוות בסיס לסביבת 1 ב־N, ו $N=\bigcup_j N_j$ מקיים תכונת כיסוי קומפקטי.

עבור A: בסיס לסביבות 1 נתון ע"י

$$A_j = \begin{pmatrix} 1+\mathcal{P}^j & \\ & 1\end{pmatrix}$$

תת־חבורות קומפקטיות פתוחות.

יש הומיאומורפיזם

$$\begin{aligned} N\times A &\to M \\ (n,a) &\mapsto na \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix}\right) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & x \\ & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

מסקנה 26.1 תהי $S\subseteq M$ קבוצה. התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת $C\subseteq M$ קומפקטית עם $S\subseteq N\cdot C$
2. קיים $\varepsilon>0$ כך ש $S\subseteq N\cdot\left\{\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix} \mid \varepsilon<|t|<\varepsilon^{-1}\right\}$

הוכחה: $2 \Longleftarrow 1$: מיידי, כי $\left\{\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix} \mid \varepsilon \le |t| \le \varepsilon^{-1}\right\}$ קומפקטית.
$1 \Longleftarrow 2$: נסמן

$$\begin{array}{rcl} P : NA & \to & A \approx F^{\times} \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix} \mapsto t \end{array}$$

אז $P\left(C\right) \subseteq F^{\times}$ קומפקטית, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $P\left(C\right) \subseteq \left\{t \in F^{\times} \mid \varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}\right\}$ ו

$$\begin{array}{rcl} C & \subseteq & N\left\{\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix} \mid t \in P\left(C\right)\right\} \\ & \subseteq & N\left\{\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix} \mid \varepsilon < t < \varepsilon^{-1}\right\} \end{array}$$

■

מסקנה 26.2 לכל $j \ge 1$ נסמן

$$\begin{array}{rcl} K_j & = & N_j A_j \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{P}^j \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\mathcal{P}^j & \\ & 1\end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1+\mathcal{P}^j & \mathcal{P}^j \\ & 1\end{pmatrix} \\ & = & A_j N_j \end{array}$$

אז $K_j \subseteq M$ תתי־חבורות קומפקטיות פתוחות ($j \ge 1$) ומהוות בסיס לסביבות 1 של M.

טענה 26.3 $a\left(t\right)n\left(x\right)a\left(t\right)^{-1} = n\left(tx\right)$

הוכחה:

$$\begin{array}{rcl} a\left(t\right)n\left(x\right)a\left(t\right)^{-1} & = & \begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & \\ & 1\end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} t & tx \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & \\ & 1\end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & tx \\ & 1\end{pmatrix} \end{array}$$

■

לכל כרקטר חלק $\theta \in \hat{N}$ יש כרקטר $\chi \in \hat{F}$ כך ש $\theta\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1\end{pmatrix} = \chi\left(x\right)$. נניח ש$\theta \neq 1$ אז $\chi \neq 1$.

לכל כרקטר נוסף $1 \neq \theta' \in \hat{N}$ מתאים $1 \neq \chi' \in \hat{F}$ ולכן יש $t \in F^{\times}$ כך ש $\chi' = \chi^t$, כלומר $\chi'(x) = \chi(tx)$. נסמן $a = \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \in A$ אז $\theta' = \theta^a$: אכן:

$$\begin{aligned} \theta^a \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} &= \theta\left(a \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} a^{-1}\right) \\ &= \theta\left(a(t)\, n(x)\, a(t)^{-1}\right) \\ &= \theta \begin{pmatrix} 1 & tx \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= \chi^t(x) \\ &= \chi'(x) \\ &= \theta' \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מסקנה 26.4 כל שני כרקטרים חלקים $\theta, \theta' \in \hat{N}$ לא טריוואליים, צמודים ע"י A. מכאן

1. יש איזומורפיזם של M מודולים

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_N^M \theta &\xrightarrow{\approx} \mathrm{Ind}_N^M \theta' \\ \mathrm{ind}_N^M \theta &\xrightarrow{\approx} \mathrm{ind}_N^M \theta' \end{aligned}$$

ע"י

$$f \mapsto [f^a : g \mapsto f(ag)]$$

הערה 26.5 באופן קצת יותר כללי: אם V מ"ו ונתייחס לשתי ההצגות (θ, V), (θ', V) (N פועלת דרך θ וθ') אז

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_N^M (\theta, V) &\xrightarrow{\approx} \mathrm{Ind}_N^M (\theta', V) \\ \mathrm{ind}_N^M (\theta, V) &\xrightarrow{\approx} \mathrm{ind}_N^M (\theta', V) \end{aligned}$$

2. יהי U M־מודול חלק. אז קיים איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$\begin{aligned} U_\theta &\to U_{\theta'} \\ a^{-1} : u + U(\theta) &\mapsto a^{-1}u + U(\theta') \end{aligned}$$

(ראינו באופן כללי עבור θ וθ^m)

טענה 26.6 יהי U M־מודול חלק. נניח ש$U_N = 0$ ושקיים $1 \neq \theta \in \hat{N}$ כך ש$U_\theta = 0$. אז $U = 0$.

הוכחה: מהמסקנה נובע ש $U_{\theta'} = 0$ לכל $1 \neq \theta' \in \hat{N}$ וכמו כן נתון ש $U_1 = U_N = 0$ ולכן $U_{\theta'} = 0$ לכל $\theta' \in \hat{N}$. N חילופית וראינו שנובע $U = 0$. ■

26.2 $\mathrm{Ind}_N^M\theta$ ו $\mathrm{ind}_N^M\theta$

יהי $1 \neq \theta \in \hat{N}$. מתאים לו $\chi \in \hat{F}$: $\chi(x) = \theta\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}$. יהי V מרחב וקטורי. נתייחס להצגה (θ, V) של N:

$$n \mapsto \theta(n)\,\mathrm{id}_V$$

ונתייחס ל$\mathrm{ind}_N^M V$, $\mathrm{Ind}_N^M V$.

26.2.1 חסם על תומכי איברי Ind

טענה 26.7 יהי $x_0 \in F$ כך ש$\chi(x_0) \neq 1$. תהי $f \in \mathrm{Ind}_N^M V$. תהי $K \subseteq M$ כך ש $f = \rho(k) f$. יש $j \in \mathbb{Z}$ כך ש $N_j = \begin{pmatrix}1 & \mathcal{P}^j\\ & 1\end{pmatrix} \subseteq K$. נסמן $\alpha = \left|\frac{x_0}{\pi^j}\right|$ (תלוי בf). אז

$$\mathrm{supp} f \subseteq N \cdot \left\{\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix} \mid |t| < \alpha\right\}$$

הוכחה: $f(na) = \theta(n) f(a)$ ($n \in N$ ו $a \in A$). לכן די להראות ש $f\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix} \neq 0 \Longleftarrow$ $|t| < \alpha$.

כעת לכל $x \in \mathcal{P}^j$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix} &= \left(\rho\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix} f\right)\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix}\\
&= f\left(\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= f\left(\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= f\left(\begin{pmatrix}1 & tx\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= \chi(tx) f\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לכן $f\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix} \neq 0 \Longleftarrow \chi(tx) = 1$ לכל $x \in \mathcal{P}^j \Longleftarrow \chi(t\mathcal{P}^j) = 1 \Longleftarrow x_0 \notin t\mathcal{P}^j$
$\Longleftarrow \frac{x_0}{t} \notin \mathcal{P}^j \Longleftarrow \left|\frac{x_0}{t}\right| > |\pi|^j \Longleftarrow |t| < \frac{|x_0|}{|\pi|^j} = \alpha$. ■

מסקנה 26.8 תהי $f \in \mathrm{Ind}_N^M V$. אז $f \in \mathrm{ind}_N^M V \iff$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $f\begin{pmatrix}t & \\ & 1\end{pmatrix} = 0$ לכל $|t| < \varepsilon$.

הוכחה: $f \in \mathrm{ind}_N^M V \iff$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $\mathrm{supp} f \subseteq N \cdot \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \mid \varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1} \right\}$
ולכן $f \in \mathrm{ind}_N^M V$ אז קיים $\varepsilon > 0$ כמו בטענה.
אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $f \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} = 0$ לכל $|t| < \varepsilon$, אז מתקיים $\mathrm{supp} f \subseteq N \cdot \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \mid \varepsilon \leq |t| < \alpha \right\}$ ואז אפשר להגדיל את α ולהקטין את ε כך שיתקבל תחום מהצורה $\left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \mid \varepsilon' < |t| < \varepsilon'^{-1} \right\}$ $\mathrm{supp} f \subseteq N \cdot$. ■

26.2.2 קבוצות פורשות של $\mathbf{ind}_N^M V$

לכל שלישיה $v \in V$, $j \geq 1$, $\tau \in F^\times$ נגדיר

$$f_{\tau,j,v} : M \rightarrow V$$

ע"י

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = \chi(x)\, v \qquad \left(\begin{smallmatrix} x \in F \\ u \in 1 + \mathcal{P}^j \end{smallmatrix} \right)$$

ו$f = 0$ מחוץ ל $N \begin{pmatrix} \tau & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \mathcal{P}^j & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

למה 26.9

1. $f_{\tau,j,v} \in \mathrm{ind}_N^M V$
2. לכל $j \geq 1$, כל איבר $f \in \left(\mathrm{ind}_N^M V\right)^{K_j}$ נתון ע"י סכום סופי $f = \sum_i f_{\tau_i,j,v_i}$ כאשר תומכי f_{τ_i,j,v_i} זרים זה לזה.
3. יהי $\delta > 0$ כך ש $\chi(x) = 1$ לכל $|x| \leq \delta$ $(x \in F)$. אז
$\begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix} f_{\tau,j,v} = \chi(\tau y)\, f_{\tau,j,v}$ (כאשר $y \in F$ ו $|y| \leq \frac{\delta}{|\tau||\pi|^j}$)
4. $\tau \notin 1 + \mathcal{P}^j$, אז קיים $y \in F$ וקבוע $\chi(y) \neq \lambda \in \mathbb{C}$ כך ש
$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix} f_{\tau,j,v} = \lambda f_{\tau,j,v}$$

הוכחה: (של 3 ו4): נסמן $f = f_{\tau,j,v}$. נשתמש בשוויון

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + \tau u y \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

(נובע מכך ש

$$\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & tx \\ & 1 \end{pmatrix}$$

)
מתקיים

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix}1 & y\\ & 1\end{pmatrix}f\right)(m) &= \begin{cases}\chi(x+\tau uy)v & \left(m=\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau u & \\ & 1\end{pmatrix}, u\in 1+\mathcal{P}^j\right)\\ 0=f(m) & \text{else}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\chi(\tau uv)\chi(x)v & \left(m=\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau u & \\ & 1\end{pmatrix}, u\in 1+\mathcal{P}^j\right)\\ 0=f(m) & \text{else}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\chi(\tau uv)f(m) & \left(m=\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau u & \\ & 1\end{pmatrix}, u\in 1+\mathcal{P}^j\right)\\ 0=f(m) & \text{else}\end{cases}\end{aligned}$$

נעבור להוכחת 3: לכל $u\in 1+\mathcal{P}^j$, נסמן $w=u-1$, ואז $u=1+w$. אז $|y|\leq\frac{\delta}{|\tau||\pi|^j}$
$\Longleftarrow$

$$|\tau wy| \leq |\tau||\pi|^j|y|\leq\delta$$

ולכן $\chi(\tau wy)=1$. מכאן

$$\chi(\tau uy) = \chi(\tau y+\tau wy)=\chi(\tau y)\chi(\tau wy)=\chi(\tau y)$$

ולכן 3 נובע מהזהות לעיל.

נעבור להוכחת 4: קיים $j_0\in\mathbb{Z}$ כך ש $\chi\restriction_{\mathcal{P}^{j_0}}=1$. קיים $z\in\mathcal{P}^{j_0-1}$ כך ש $\pi(z)\neq 1$. נסמן $\delta=|\pi|^{j_0}$. נגדיר $y=\frac{z}{\tau-1}$. נראה בהמשך ש

$$|y| \leq \frac{\delta}{|\tau|\cdot|\pi|^j}$$

לפי 3 מתקיים:

$$\begin{pmatrix}1 & y\\ & 1\end{pmatrix}f_{\tau,j,v} = \underbrace{\chi(\tau y)}_{\lambda}f_{\tau,j,v}$$

צריך להראות ש $\chi(\tau y)\neq\chi(y)$:

$$\begin{aligned}\chi(\tau y)-\chi(y) &= \chi(y)\left(\frac{\chi(\tau y)}{\chi(y)}-1\right)\\ &= \chi(y)(\chi((\tau-1)y)-1)\\ &= \chi(y)(\chi(z)-1)\neq 0\end{aligned}$$

כעת נבדוק ש $|y|\leq\frac{\delta}{|\tau|\cdot|\pi|^j}$: נשים לב ש $z\in\mathcal{P}^{j_0-1}\setminus\mathcal{P}^{j_0}$ ולכן

$$|z| = |\pi|^{j_0-1}=\frac{\delta}{|\pi|}$$

ולכן

$$|y| \quad = \quad \frac{\delta}{|\tau-1|\,|\pi|}$$

אם $|\tau|>1$ אז $|\tau-1|=|\tau|$ ו $j\geq 1$ ומכאן

$$|y| \quad = \quad \frac{\delta}{|\tau|\,|\pi|}\leq\frac{\delta}{|\tau|\cdot|\pi|^{j}}$$

אם $|\tau|\leq 1$, אז מאחר ש $\tau\notin 1+\mathcal{P}^{j}$ נובע ש $|\tau-1|>|\pi|^{j}$ ולכן

$$|\tau-1|\,|\pi| \quad \geq \quad |\pi|^{j}$$

ולכן

$$|y| \quad = \quad \frac{\delta}{|\tau-1|\,|\pi|}\leq\frac{\delta}{|\pi|^{j}}\leq\frac{\delta}{|\pi|^{j}\,|\tau|}$$

כאשר האי־שוויון האחרון נובע מכך ש $|\tau|\leq 1$. ■

26.3 מודול ז'קה של $\mathrm{ind}_{N}^{M}V$

טענה 26.10 יהי $1\neq\theta\in\hat{N}$ (המתאים ל$\chi\in\hat{F}$) ו(θ,V) הצגה של N דרך θ. אז:

$$\left(\mathrm{ind}_{N}^{M}V\right)(N) \quad = \quad \mathrm{ind}_{N}^{M}V$$

ולכן $\left(\mathrm{ind}_{N}^{M}V\right)_{N}=0$.

הוכחה: יהי $\delta>0$ כך ש $|x|\leq\delta \;\Longleftarrow\; \chi(x)=1$. יהי $z\in F$ עם $\chi(z)\neq 1$ (ואז $z\neq 0$). יהי $j_0\geq 1$ כך ש $|\pi|^{j_0}<\frac{\delta}{|z|}$, אז $|z|<\frac{\delta}{|\pi|^{j_0}}$.

לפי תכונה 2 בלמה, די להוכיח שכל $f=f_{\tau,j,v}$ $(j\geq j_0)$ שייכת ל$\left(\mathrm{ind}_{N}^{M}V\right)(N)$. נסמן $y=\frac{z}{\tau}$. אז:

$$|y| \quad \leq \quad \frac{\delta}{|\tau|\,|\pi|^{j_0}}\leq\frac{\delta}{|\tau|\,|\pi|^{j}}$$

לכן, לפי תכונה 3 בלמה:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{ind}_{N}^{M}V\right)(N)\ni \quad & \begin{pmatrix}1 & y\\ & 1\end{pmatrix}f-f\\ = \quad & \chi(\tau y)\,f-f\\ = \quad & \underbrace{\left(\chi(z)-1\right)}_{\neq 0}f\end{aligned}$$

ולכן $f\in\left(\mathrm{ind}_{N}^{M}V\right)(N)$. ■

טענה 26.11 M-מורפיזם ההכלה $\mathrm{ind}_N^M V \hookrightarrow \mathrm{Ind}_N^M V$ יוצר שוויון בין מרחבי הפונקציות

$$\left(\mathrm{ind}_N^M V\right)(N) \quad = \quad \left(\mathrm{Ind}_N^M V\right)(N)$$

ופעולת M על שני הצדדים תואמת.

מסקנה 26.12

1.

$$\left(\mathrm{Ind}_N^M V\right)(N) \quad = \quad \left(\mathrm{ind}_N^M V\right)(N) = \mathrm{ind}_N^M V$$

2.

$$\left(\mathrm{Ind}_N^M V\right)_N \quad = \quad \frac{\mathrm{Ind}_N^M V}{\left(\mathrm{ind}_N^M V\right)(N)} = \frac{\mathrm{Ind}_N^M V}{\mathrm{ind}_N^M V}$$

3. בפרט, פעולת N על $\frac{\mathrm{Ind}_N^M V}{\mathrm{ind}_N^M V}$ טריוואלית:

$$\left(\frac{\mathrm{Ind}_N^M V}{\mathrm{ind}_N^M V}\right)(N) \quad = \quad 0$$

הוכחה: צריך להוכיח שלכל $f \in \mathrm{Ind}_N^M V$ ולכל $n \in N$ מתקיים $f_1 := nf - f \in \left(\mathrm{ind}_N^M V\right)(N)$ כלומר $f_1 \in \mathrm{ind}_N^M V$.

לצורך זה די להוכיח שקיים $\varepsilon > 0$ כך ש $f_1 \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} = 0$ לכל $|t| < \varepsilon$. יהי $x \in F$ כך ש $n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} &= (nf - f) \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\right) - f\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} 1 & tx \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix}\right) - f\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\chi(tx) - 1) f \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

יהי $\delta > 0$ כך ש $|z| \le \delta \implies \chi(z) = 1$. נגדיר $\varepsilon = \frac{\delta}{|x|}$ (אם $x = 0$ אז $n = 1$ ואז $f_1 = 0$). כעת $|t| < \varepsilon \implies |tx| < \delta \implies \chi(tx) = 1 \implies f_1 \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} = 0$. ■

26.4 מודול ז'קה ביחס לθ

הערה 26.13 נשים לב ש $V(\theta)=0$ (כי N פועלת על V דרך θ) ולכן $V_\theta=V$.

כזכור $\hat{N}\ni\theta\neq 1$. יש N־הומומורפיזם:

$$\begin{array}{rcl}\alpha:\mathrm{Ind}_N^M V & \to & V\\ \alpha^c:\mathrm{ind}_N^M V & \to & V\\ f & \mapsto & f(1)\end{array}$$

α משרה הומומורפיזם של N־מודולים:

$$\begin{array}{rcl}\alpha_\theta:\left(\mathrm{Ind}_N^M V\right)_\theta & \longrightarrow & V_\theta=V\\ \left(\alpha^c\right)_\theta:\left(\mathrm{ind}_N^M V\right)_\theta & \longrightarrow & V_\theta=V\end{array}$$

טענה 26.14 α_θ, $\left(\alpha^c\right)_\theta$ איזומורפיזמים של מרחבים וקטוריים. (של N־מודולים).

הוכחה: $\underline{\left(\alpha^c\right)_\theta \text{ חד־חד־ערכית:}}$ תהי $\xi=f+\left(\mathrm{ind}_N^M V\right)(\theta)\in\mathrm{Ker}\left(\alpha^c\right)_\theta$ כאשר $f\in\mathrm{ind}_N^M V$. אז:

$$0 = \left(\alpha^c\right)_\theta\xi=\alpha^c f=f(1)$$

כעת יש $j\geq 1$ ופירוק עם תומכים זרים $f=\sum_i f_{\tau_i,j,v_i}$ (עם $v_i\neq 0$). אז לכל i מתקיים $f_{\tau_i,j,v_i}(1)=0$ ולכן $\tau\notin 1+\mathcal{P}^j$. לכן אפשר להניח $f=f_{\tau,j,v}$ עם $\tau\notin 1+\mathcal{P}^j$.

לפי הלמה, קיים $y\in F$ כך ש $\begin{pmatrix}1 & y\\ & 1\end{pmatrix}f=\lambda f$ עם $\lambda\neq\chi(y)$. לכן:

$$\left(\mathrm{ind}_N^M V\right)(\theta)\ni \qquad \begin{pmatrix}1 & y\\ & 1\end{pmatrix}f-\underbrace{\theta\begin{pmatrix}1 & y\\ & 1\end{pmatrix}}_{\chi(y)}f=\underbrace{(\lambda-\chi(y))}_{\neq 0}f$$

ולכן $f\in\left(\mathrm{ind}_N^M V\right)(\theta)$, כלומר $\xi=0$.

$\underline{\left(\alpha^c\right)_\theta \text{ על:}}$ די להוכיח ש α^c על. אכן, לכל $v\in V$ נקח $f_{1,1,v}$ ואז $\alpha f_{1,1,v}=f_{1,1,v}(1)=v$.

<u>סה"כ:</u> $\left(\alpha^c\right)_\theta$ איזומורפיזם.

<u>כעת:</u> מהתרשים החילופי

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{ind}V & \hookrightarrow & \mathrm{Ind}V\\ {}_{\alpha^c}\searrow & & \swarrow_{\alpha}\\ & V & \end{array}$$

נקבל תרשים חילופי:

$$\begin{array}{ccc}(\mathrm{ind}V)_\theta & \hookrightarrow & (\mathrm{Ind}V)_\theta\\ {}_{(\alpha^c)_\theta}\searrow^{\approx} & & \swarrow_{\alpha_\theta}\\ & V=V_\theta & \end{array}$$

אבל ראינו במסקנה מטענה על מודול ז'קה של $\mathrm{ind}_N^M V$ ש-N פועלת טריוואלית על $\frac{\mathrm{Ind}_N^M V}{\mathrm{ind}_N^M V}$ ולכן $\left(\frac{\mathrm{Ind}_N^M V}{\mathrm{ind}_N^M V}\right)_\theta = 0$ ($\theta \neq 1$).

כעת נקבל מהסדרה המדויקת

$$0 \longrightarrow \mathrm{ind}_V \hookrightarrow \mathrm{Ind}V \longrightarrow \frac{\mathrm{Ind}_N^M V}{\mathrm{ind}_N^M V} \longrightarrow 0$$

שהסדרה הבאה מדויקת

$$0 \longrightarrow (\mathrm{ind}_V)_\theta \hookrightarrow (\mathrm{Ind}V)_\theta \longrightarrow \underbrace{\left(\frac{\mathrm{Ind}_N^M V}{\mathrm{ind}_N^M V}\right)_\theta}_{=0} \longrightarrow 0$$

לכן השורה העליונה בתרשים החילופי השני איזומורפיזם. לכן גם α_θ איזומורפיזם. ■

26.5 $U(N)$ של M-מודול חלק U

יהי $1 \neq \theta \in \hat{N}$. תהי (σ, U) הצגה חלקה של M. אז N פועל על U_θ דרך θ. יש העתקת מנה

$$q : U \rightarrow \frac{U}{U(\theta)} = U_\theta$$

שהיא N-מורפיזם.

לפי הדדיות פרובניוס יש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים:

$$\mathrm{Hom}_N(U, U_\theta) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_N\left(U, \mathrm{Ind}_N^M U_\theta\right)$$

q איבר בצד שמאל ומתאים לו איבר $q_* \in \mathrm{Hom}_N\left(U, \mathrm{Ind}_N^M U_\theta\right)$ הנתון בצורה מפורשת ע"י

$$(u \in U, m \in M) \qquad (q_*(u))(m) = q(mu)$$

לבסוף q_* בעצמו משרה M-הומומורפיזם של M-מודולים (צמצום של q_*):

$$(q_*)(N) : U(N) \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_N^M U_\theta\right)(N) = \mathrm{ind}_N^M U_\theta$$

משפט 26.15 $q_*(N)$ לעיל הוא איזומורפיזם של M-מודולים.

מסקנה 26.16

1. אם $U_\theta = 0$ אז N פועלת טריוואלית על U.

2. אם $u\in U$ מקיים $u\in U\left(\theta\right)$ $\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} u \in U(\theta)$ $(\forall t\in F^{\times})$ אז $Nu=u$.

הוכחה: נתון $q\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix}u\right)=0$ $(\forall t\in F^{\times})$. q הוא N־מורפיזם ולכן $q\left(\begin{pmatrix} 1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix}u\right)=0$ $(\forall t,x)$ ומכאן $u\in \mathrm{Ker}q_*$. q_* הוא M־מורפיזם ולכן $nu-u\in\mathrm{Ker}q_*$ $(\forall n\in N)$. מכאן:

$$nu-u \quad\in\quad U\left(N\right)\cap\mathrm{Ker}q_*=\mathrm{Ker}\left(q_*\left(N\right)\right)=0$$

כאשר השוויון האחרון לפי המשפט. לכן $nu=u$ לכל $n\in N$. ∎

נעבור להוכחת המשפט.

הוכחה: (מבוססת על [BH]):

נסמן M מודולים

$$\begin{aligned} W &= \mathrm{Ker}\left(q_*\left(N\right)\right)=U\left(N\right)\cap\left(\mathrm{Ker}q_*\right)\\ C &= \mathrm{Coker}\left(q_*\left(N\right)\right)=\mathrm{ind}_N^M U_\theta/\left(\mathrm{Im}q_*\right)\end{aligned}$$

צריך להוכיח $W=0$, $C=0$. די להוכיח $W_N=0$, $C_N=0$, $W_\theta=0$, $C_\theta=0$. (ראינו באופן כללי בתכונות הכלליות של החבורה של המירבולית כי אם קיים $\theta\neq 1$ כך ש$V_\theta=0$ ו$V_N=0$ אז $V=0$)

ראשית $W\hookrightarrow U\left(N\right)$ תת־M־מודול ולכן $0\to W_N\to U\left(N\right)_N$ מדויקת. אבל $U\left(N\right)_N=0$ (ראינו כי $U\left(N\right)\left(N\right)=U\left(N\right)$). לכן $W_N=0$.

מאחר וN פועל על U_θ דרך θ: $\left(\mathrm{ind}_N^M U_\theta\right)_N=0$, C_N הוא מנה של $\left(\mathrm{ind}_N^M U_\theta\right)_N$ (כי C מנה של $\mathrm{ind}_N^M U_\theta$ והפונקטור $\left(\cdot\right)_\theta$ מדויק). לכן $C_N=0$.

מאחר ש$\left(\cdot\right)_\theta$ מדויק, נובע

$$\begin{aligned} W_\theta &= \mathrm{Ker}\left(\left(q_*\left(N\right)\right)_\theta\right)\\ C_\theta &= \mathrm{Coker}\left(\left(q_*\left(N\right)\right)_\theta\right)\end{aligned}$$

לכן די להוכיח ש$q_*\left(N\right)_\theta$ איזומורפיזם. נזכור שלכל N־מודול חלק V, ההכלה $V\left(N\right)\hookrightarrow V$ משרה איזומורפיזם של N מודולים

$$\left(V\left(N\right)\right)_\theta \quad\xrightarrow{\approx}\quad V_\theta$$

(כי $\left(V_N\right)_\theta=0$ כי N פועלת טריוואלית על V_N ו $\theta\neq 1$)

לכן נקבל תרשים חילופי:

$$\begin{array}{ccc} U_\theta & \xrightarrow{(q_*)_\theta} & \left(\mathrm{Ind}_N^M U_\theta\right)_\theta\\ \approx\uparrow & & \uparrow\approx\\ \left(U\left(N\right)\right)_\theta & \xrightarrow{(q_*(N))_\theta} & \left(\left(\mathrm{Ind}_N^M U_\theta\right)\left(N\right)\right)_\theta\end{array}$$

לכן די להוכיח ש

$$\left(q_*\right)_\theta : U_\theta \quad\to\quad \left(\mathrm{Ind}_N^M U_\theta\right)_\theta$$

איזומורפיזם. נזכור שסימנו

$$\begin{aligned}\alpha : \mathrm{Ind}_N^M U_\theta &\to U_\theta\\ f &\mapsto f(1)\end{aligned}$$

(M־מורפיזם). לפי טענה קודמת מתקבל איזומורפיזם של N־מודולים:

$$\alpha_\theta : \left(\mathrm{Ind}_N^M U_\theta\right)_\theta \xrightarrow{\approx} (U_\theta)_\theta = U_\theta$$

אבל $\alpha_\theta \circ (q_*)_\theta$ הוא הזהות: לכל $u \in U$

$$\begin{aligned}(\alpha_\theta \circ (q_*)_\theta)(u + U(\theta)) &= \alpha(q_*(u)) + \underbrace{U_\theta(\theta)}_{=0}\\ &= q_*(u)(1)\\ &= q(u)\\ &= u + U(\theta)\end{aligned}$$

ומכאן $(q_*)_\theta = \alpha_\theta^{-1}$ גם הפיך. ■

26.6 מיון הצגות

תהי (σ, U) הצגה אי־פריקה חלקה של M.

1. אם $U(N) = 0$ אז N פועלת טריוואלית על U ואז U הופך לA־מודול. A חילופית, ולכן $\dim_{\mathbb{C}} U = 1$ ויש כרקטר $\eta \in \widehat{F^\times}$ כך ש

$$\begin{pmatrix} t & x \\ & 1\end{pmatrix} \mapsto t \mapsto \eta(t)$$

2. נבחר $1 \neq \theta \in \hat{N}$. נניח $U(N) \neq 0$. אז $U(N) = U$ (כי $U(N)$ תת־מודול). לפי המשפט, יש איזומורפיזם של M־מודולים

$$U = U(N) \xrightarrow{\approx} \mathrm{ind}_N^M U_\theta$$

מאי־פריקות נובע ש $\dim_{\mathbb{C}} U_\theta = 1$. כלומר $U \approx \mathrm{ind}_N^M \theta$. (כי U_θ כN מודול הוא סכום ישר של עותקים של θ, ולכן $\mathrm{ind}_N^M U_\theta$ סכום ישר של עותקים של $\mathrm{ind}_N^M \theta$, אבל מאחר ו$\mathrm{ind}_N^M U_\theta$ אי־פריק, נובע כי $\mathrm{ind}_N^M U_\theta = \mathrm{ind}_N^M \theta$)

27 $\mathrm{GL}_2(F)$

$$\mathrm{GL}_2(F) = \{A \in M_2(F) \mid \det A \neq 0\}$$

היא חבורת־l.

$$\begin{aligned} T &= \left\{\begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix} \mid t_{1,2} \in F^\times\right\} \\ N &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ B &= \left\{\begin{pmatrix} t_1 & x \\ & t_2 \end{pmatrix} \mid t_{1,2} \in F^\times, x \in F\right\} \end{aligned}$$

$N \triangleleft B$, $B/N \cong T$.

מכאן והלאה $G = \mathrm{GL}_2(F)$.

הקומפקט המקסימלי:

$$\begin{aligned} K_0 = K &:= \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \\ &= \left\{A \in G \mid A, A^{-1} \in M_2(\mathcal{O})\right\} \end{aligned}$$

תיאור שקול:

$$\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) = \left\{A \in M_2(\mathcal{O}) \mid \det A \in \mathcal{O}^\times = U_F\right\}$$

27.1 פירוק קרטן

$G = \dot{\bigcup}_{\substack{n,m\in\mathbb{Z}\\ n\le m}} K \begin{pmatrix} \pi^n & \\ & \pi^m \end{pmatrix} K$ **הוכחה:** האיחוד הוא G: תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$.

בעזרת $W = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \in K$ אפשר להניח $|a| \geq |b|, |c|, |d|$.

ע"י כפל ב$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ & 1 \end{pmatrix} \in K$ מימין וב$\begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \in K$ משמאל אפשר להניח $b = c = 0$.

כלומר $A = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$ וגם $|a| \geq |d|$. בעזרת $\begin{pmatrix} u_1 & \\ & u_2 \end{pmatrix} \in K$ מגיעים ל $A = \begin{pmatrix} \pi^n & \\ & \pi^m \end{pmatrix}$.

האיחוד הוא זר: אם $A = K \begin{pmatrix} \pi^n & \\ & \pi^m \end{pmatrix} K$ צריך להוכיח שn וm נקבעים ביחידות.

1. $\nu(\det A) = n + m$
2. $\mathcal{O}a + \mathcal{O}b + \mathcal{O}c + \mathcal{O}d = \pi^n\mathcal{O}$

■

מסקנה 27.1 G הוא σ־קומפקטי.

27.2 פירוק Iwasawa

$G = BK$ **הוכחה:** תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. בעזרת כפל מימין ע"י $W = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \in K$ אפשר להניח $|c| \leq |d|$, בפרט $|d| \neq 0$. ע"י כפל מימין ב $\begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix} \in K$ נקבל $c = 0$ ואז $A \in B$. ■

מסקנה 27.2

1. $B \setminus G$ קומפקטי, ולכן לכל הצגה חלקה σ של B מתקיים $\mathrm{ind}_B^G \sigma = \mathrm{Ind}_B^G \sigma$.
2. תהי (τ, V) הצגה חלקה של G, אז τ נוצרת סופית $\iff$ $\tau\restriction_B$ נוצרת סופית.

הוכחה: $\Longrightarrow$: ברור (כי V נוצר סופית כB מודול ולכן גם כG מודול).

$\Longleftarrow$: נניח ש $\{v_1, \ldots, v_n\}$ פורשים את V כG מודול. תהי $K_1 \subseteq K \subseteq G$ (תת־חבורה קומפקטית פתוחה) כך ש $V^K \supseteq V^{K_1} \ni v_i$ $(\forall i)$. יהיו $K = \dot\bigcup_{j=1}^{l} g_j K_1$ הקוסטים. אז:

$$\begin{aligned} V &= \sum_i \mathbb{C} G v_i \\ &= \sum_i \mathbb{C} BK v_i \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{C} B g_j K_1 v_i \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{C} B g_j v_i \end{aligned}$$

מכאן $g_j v_i$ יוצרים את V כB־מודול. ■

27.3 פירוק Bruhat

נסמן $W = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

טענה 27.3 מתקיים פירוק זר $G = B \dot\cup BWB$.

הערה 27.4 $BWB = BWTN = BTWN = BWN$, כלומר הטענה שקולה ל $G = B \dot\cup BWN$

הוכחה: <u>האיחוד שווה לG</u>: תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G - B$. אז $c \neq 0$ ומתקיים

$$BWB \quad \ni \quad \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b - ac^{-1}d \end{pmatrix} = A$$

האיחוד זר: תהי $\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & d\end{pmatrix}W\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\in BWN$ ‏$A=$. אז $a,d\neq 0$ ומתקיים

$$A \;=\; \begin{pmatrix}a & c\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & a+cx\\ d & dx\end{pmatrix}\notin B$$

■

יש העתקה

$$\begin{aligned} f:B\times N &\to BWN\\ (b,n) &\mapsto bWn \end{aligned}$$

והיא הומיאומורפיזם. $G-B=BWB$ קבוצה פתוחה (כי B סגורה).

מסקנה 27.5 אם $\Omega_2\subseteq N$, $\Omega_1\subseteq B$ פתוחות בN ובB אז

$$f\left(\Omega_1\times\Omega_2\right) \;=\; \left\{bWn \mid b\in\Omega_1, n\in\Omega_2\right\}$$

פתוחה בG (כי היא פתוחה בBWN ‏$G-B=BWB=$ ולכן גם בG).

טענה 27.6 תהי $S\subseteq G$ תת־קבוצה סגורה עם $S=BS$. התנאים הבאים שקולים:

1. $S\cap B=\emptyset$
2. קיים $j\in\mathbb{Z}$ כך ש $S\subseteq BWN_j$ ‏($N_j=\begin{pmatrix}1 & \mathcal{P}^j\\ & 1\end{pmatrix}$)

הוכחה: $2\Longleftarrow 1$: כי $(BWN_j)\cap B=\emptyset$.
$1\Longleftarrow 2$: בדרך השלילה: אם 2 לא נכון, אז לכל j יש $s_j\in S\setminus(BWN_j)$. מאחר ש$s_j\notin B$, נובע $s_j\in(BWN)\setminus(BWN_j)$.
לכן ניתן לרשום $B\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & x_j\end{pmatrix}= s_j\in BW\begin{pmatrix}1 & x_j\\ & 1\end{pmatrix}$ עם $x_j\notin\mathcal{P}^j$ ולכן $\lim_{j\to-\infty}|x_j|=\infty$. מכאן נובע ש $\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & x_j\end{pmatrix}\in S$ (כי $S=BS$ ו $S=BS\supseteq Bs_j\ni\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & x_j\end{pmatrix}$). לכן גם

$$S \;\ni\; \underbrace{\begin{pmatrix}-x_j & 1\\ & x_j^{-1}\end{pmatrix}}_{\in B}\underbrace{\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & x_j\end{pmatrix}}_{\in S}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x_j^{-1} & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[j\to-\infty]{}\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}=I_2$$

מאחר וS סגורה נובע $I_2\in S$. אבל $I_2\in B$. סתירה לכך ש$S\cap B=\emptyset$. ■

27.4 $\mathrm{SL}_2(F)$

$$\mathrm{SL}_2(F) = \{g \in \mathrm{GL}_2(F) \mid \det g = 1\}$$

תת־חבורה סגורה של G ולכן חבורת־l.

למה 27.7 $\mathrm{SL}_2(F)$ נוצרת כחבורה ע"י $N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ומטריצה כלשהי $\begin{pmatrix} 1 & \\ t & 1 \end{pmatrix}$ ($t \neq 0$).

הוכחה: זהות יסודית:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -t^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ t & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} & -t^{-1} \\ t & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -t^{-1} \\ t & \end{pmatrix}^{-1} &= I_2 + \begin{pmatrix} & -t^{-1} \\ t & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & t^{-1} \\ -t & \end{pmatrix} \\
&= I_2 + \begin{pmatrix} & -t^{-1} \\ t & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & t^{-1} \\ -t & \end{pmatrix} \\
&= I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & xt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & t^{-1} \\ -t & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \\ -xt^2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לכן כל $\begin{pmatrix} 1 & \\ y & 1 \end{pmatrix}$ נמצא בחבורה (בעזרת x).

לפי הזהות היסודית (עם כל t), $\begin{pmatrix} & -y^{-1} \\ y & \end{pmatrix}$ נמצא בחבורה ($\forall y$). בפרט $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ נמצא בחבורה ולכן (ע"י כפל משמאל והצבת $-y$ במקום y) $\begin{pmatrix} y & 0 \\ & y^{-1} \end{pmatrix}$ נמצא בחבורה. אז גם $\begin{pmatrix} y & x \\ & y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ & y^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ xy & 1 \end{pmatrix}$ נמצא בחבורה

וגם $\begin{pmatrix} y & \\ x & y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ xy^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ & y^{-1} \end{pmatrix}$ נמצא בחבורה.

לכל $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F)$, אפשר עם $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ להניח ש־$a \neq 0$ ואז עם $\begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$ (משמאל) להגיע ל־$\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}$. ■

מסקנה 27.8 אם $G_1 \subseteq G$ תת־חבורה פתוחה המכילה את N, אז $\mathrm{SL}_2(F) \subseteq G_1$ (כי יש $\begin{pmatrix} 1 & \\ t & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ $t \neq 0$).

טענה 27.9 ההומומורפיזם של חבורות־ל

$$\begin{aligned} \det : G &\longrightarrow F^\times \\ g &\mapsto \det g \end{aligned}$$

הוא העתקה פתוחה המשרה איזומורפיזם של חבורות־ל:

$$G/\operatorname{SL}_2(F) \approx F^\times$$

הוכחה: בעזרת חבורת מנה נקבל הומומורפיזם של חבורות־ל:

$$d : G/\operatorname{SL}_2(F) \longrightarrow F^\times$$

רציף חד־חד־ערכי ועל, וההופכי רציף בעזרת החתך

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(F)$$

לכן d איזומורפיזם, ו־det מתפרק ע"י

$$\det : G \overset{\text{open}}{\to} G/\operatorname{SL}_2(F) \overset{\approx}{\to} F^\times$$

■

למה 27.10 $\operatorname{GL}_2(F)' = \operatorname{SL}_2(F)' = \operatorname{SL}_2(F)$ (נכון גם לכל שדה $F \neq F_2, F_3$).

$\operatorname{SL}_2(F)' \subseteq \operatorname{GL}_2(F)' \subseteq \operatorname{SL}_2(F)$ ולכן די להראות $\operatorname{SL}_2(F)' = \operatorname{SL}_2(F)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{SL}_2(F)' \ni \quad & \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & \\ & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ & 1 \end{pmatrix} \\ = \quad & \begin{pmatrix} 1 & xt^2 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ & 1 \end{pmatrix} \\ = \quad & \begin{pmatrix} 1 & x\left(-1+t^2\right) \\ & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נקח $t \neq 0, \pm 1$. אז לכל $y \in F$ נציב $x = \frac{y}{t^2-1}$ ונסיק ש $\begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(F)$. ע"י הצמדה נסיק ש $\begin{pmatrix} 1 & \\ y & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(F)'$ ואלה יוצרות את $\operatorname{SL}_2(F)$.

27.5 מודולוס

טענה 27.11 $G = \operatorname{GL}_2(F)$ אונימודולרית.

הוכחה: נשתמש באוטומורפיזם $\varphi : G \to G$ ע"י

$$A \quad \mapsto \quad \left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$$

מאחר ש $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$, נובע ש $\delta\left(\varphi\right)^{2} = \delta\left(\varphi \circ \varphi\right) = 1$ ולכן $\delta\left(\varphi\right) = 1$. תהי μ מידת האר משמאל, מנורמלת כך ש $\mu\left(K_0\right) = 1$ ($K_0 = \mathrm{GL}_2\left(\mathcal{O}\right)$). נסמן $g = \begin{pmatrix} \pi & \\ & 1 \end{pmatrix}$. אז:

$$\begin{aligned}
\delta\left(g\right) &= \frac{\mu\left(gK_0g^{-1}\right)}{\mu\left(K_0\right)} \\
&= \mu\left(gK_0g^{-1}\right) \\
\underbrace{}_{\delta(\varphi)=1} &= \mu\left(\varphi\left(gK_0g^{-1}\right)\right) \\
&= \mu\left(\varphi\left(g\right)\varphi\left(K_0\right)\varphi\left(g\right)^{-1}\right) \\
&= \mu\left(\varphi\left(g\right)\varphi\left(K_0\right)\varphi\left(g\right)^{-1}\right) \\
&= \mu\left(g^{-1}K_0g\right) \\
&= \frac{\mu\left(g^{-1}K_0g\right)}{\mu\left(K\right)} \\
&= \delta\left(g^{-1}\right)
\end{aligned}$$

לכן $\delta\left(g\right)^{2} = 1$ ומכאן $\delta\left(g\right) = 1$. מאחר שK_0 קומפקטית ו$\delta \geq 0$, נובע ש $\delta \restriction_{K_0} = 1$.

$$\begin{aligned}
\delta\begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi \end{pmatrix} &= \delta\left(W\begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi \end{pmatrix}W^{-1}\right) \\
&= \delta\begin{pmatrix} \pi & \\ & 1 \end{pmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}$$

מפירוק קרטן נובע ש$\delta\left(z\right) = 1$ לכל $z \in G$. ■

27.5.1 המודולוס של פעולת B על N

$N = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}$. $N \lhd B$. כל $\xi \in B$ יוצר אוטומורפיזם

$$\begin{aligned}
C_{\xi} : W &\to N \\
n &\mapsto \xi n \xi^{-1}
\end{aligned}$$

אם $\xi = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ אז $\delta\left(C_{\xi}\right) = \left|\frac{a}{d}\right|$.

אכן: אם $\xi = \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix}$ אז $C_{\xi} = \mathrm{id}$ ולכן $\delta\left(C_{\xi}\right) = 1$. עבור $\xi = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$ נסמן

$n=\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}$, אז $C_\xi\left(n\right)=\begin{pmatrix}1 & \frac{a}{d}x\\ & 1\end{pmatrix}$ ובעזרת האיזומורפיזם של חבורות־l

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\approx} & F\\ \begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix} & \mapsto & x \end{array}$$

נקבל שC_ξ מתאים לכפל ב$\frac{a}{d}$ בF, וראינו שהמודולוס של אוטומורפיזם זה של F הוא $\left|\frac{a}{d}\right|$.

27.5.2 המודלוס של B

טענה 27.12 $\delta_B\begin{pmatrix}a & b\\ & d\end{pmatrix}=\left|\frac{a}{d}\right|$

הוכחה:

1. מתקיים $\delta_B\restriction_N\geq 0$ וN איחוד חבורות־קבוצות קומפקטיות ולכן $\delta_B\restriction_N=1$.
2. $\begin{pmatrix}\mathcal{O}^\times & \\ & \mathcal{O}^\times\end{pmatrix}$ קומפקטית ולכן $\delta_B=1$ עליה. לכן נותר לבדוק את $\delta\begin{pmatrix}\pi & \\ & 1\end{pmatrix}$ ו$\delta\begin{pmatrix}1 & \\ & \pi\end{pmatrix}$. תהי $R\subseteq F$ קבוצת נציגים של $\mathcal{O}/\mathcal{P}$. אז $|R|=\frac{1}{|\pi|}$. נסמן

$$K_1=\begin{pmatrix}\mathcal{O}^\times & \pi\mathcal{O}\\ & \mathcal{O}^\times\end{pmatrix}\quad\subseteq\quad K=\begin{pmatrix}\mathcal{O}^\times & \mathcal{O}\\ & \mathcal{O}^\times\end{pmatrix}$$

תת־חבורה קומפקטית פתוחה.
השוויון

$$\begin{pmatrix}1 & r\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \pi b\\ & d\end{pmatrix}\quad=\quad\begin{pmatrix}a & \pi b+rd\\ & d\end{pmatrix}$$

מראה ש

$$K\quad=\quad\dot{\bigcup_{r\in R}}\begin{pmatrix}1 & r\\ & 1\end{pmatrix}K_1$$

אכן, אם $\begin{pmatrix}a & \pi b+rd\\ & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ & z\end{pmatrix}$ אז $a=x,d=z$ ו $rd=y\left(\mod\pi\mathcal{O}\right)$
$\Longleftarrow$ $r=d^{-1}y\left(\mod\mathcal{O}\right)$ קובע את r. לבסוף, $b=\frac{y-rd}{\pi}$.
לכן $(K:K_1)=|R|=\frac{1}{|\pi|}$. אם μ מידת האר (מימין או משמאל) אז

$$\frac{\mu\left(K_1\right)}{\mu\left(K\right)}\quad=\quad\frac{1}{|R|}=|\pi|$$

ולבסוף

$$\begin{aligned}\delta\begin{pmatrix}\pi & \\ & 1\end{pmatrix}\quad&=\quad\frac{\mu\left(\left(\begin{pmatrix}\pi & \\ & 1\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\pi & \\ & 1\end{pmatrix}^{-1}\right)\right)}{\mu\left(K\right)}\\ &=\quad\frac{\mu\left(K_1\right)}{\mu\left(K\right)}=|\pi|\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned} \delta\begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi^{-1} \end{pmatrix} &= \frac{\mu\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi^{-1} \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi \end{pmatrix}\right)}{\mu(K)} \\ &= \frac{\mu(K_1)}{\mu(K)} = |\pi| \end{aligned}$$

■

28 תכונות כלליות של הצגות חלקות של $\mathrm{GL}_2(F)$ [BH]

28.1 כרקטרים

תהי (π, V) הצגה אי־פריקה חלקה של G כך ש $\mathrm{SL}_2(F) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ אז $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ ויש כרקטר $\chi \in \widehat{F^\times}$ כך ש $\pi = \chi \circ \det$ על V. (כלומר $\pi(g) = \chi(\det g) \cdot \mathrm{id}_V$) **הוכחה:** יש תרשים חילופי

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \swarrow & \downarrow \det & \searrow \pi & \\ \frac{G}{\mathrm{SL}_2(F)} & \overset{\approx}{\to} & F^\times & \overset{\sigma}{\to} & \mathrm{GL}(V) \end{array}$$

(כי $\mathrm{SL}_2(F) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ ולכן אפשר לחשוב על π כהעתקה מ $\frac{G}{\mathrm{SL}_2(F)}$). מאחר ש$\det$ פתוחה, σ הצגה חלקה של $F^\times$ ואי־פריקה. לפי הלמה של שור (G σ־קומפקטית), נובע שיש $\chi \in \widehat{F^\times}$ כך ש$\chi = \sigma$ ו$\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ ולכן $\pi = \chi \circ \det$. ■

מקרה פרטי אם $\theta : G \to \mathbb{C}^\times$ כרקטר, יש $\chi \in \widehat{F^\times}$ כך ש $\theta = \chi \circ \det$. אכן, $\mathrm{SL}_2(F) = G' \subseteq \operatorname{Ker}\theta$ ו$(\theta, \mathbb{C})$ אי־פריקה.

טענה 28.1 תהי (π, V) הצגה חלקה אי־פריקה של G. נניח שקיים וקטור $V \ni v \neq 0$ שמור ביחס ל$\pi(N)$. אז יש כרקטר חלק $\chi \in \widehat{F^\times}$ כך ש$\pi = \chi \circ \det$. (ו$\dim_{\mathbb{C}} V = 1$)

הוכחה: $N \subseteq \mathrm{Stab}_G\, v$ ומכילה $K \subseteq G$ פתוחה (נקח $v \in V^K$). לכן $\mathrm{SL}_2(F) \subseteq Stab_G v$. לכל $g \in G$:

$$gv \in gV^{\mathrm{SL}_2(F)} = V^{g\,\mathrm{SL}_2(F) g^{-1}} = V^{\mathrm{SL}_2(F)}$$

מאחר ש $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{gv \mid g \in G\} = V$ נובע ש $V = V^{\mathrm{SL}_2(F)}$ ולכן $\mathrm{SL}_2(F) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ וראינו שמכאן נובעת המסקנה. ■

מימד סופי

טענה 28.2 תהי (π, V) הצגה חלקה אי־פריקה של G כך ש $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$. אז $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ ו $\pi = \chi \circ \det$ $\left(\chi \in \widehat{F^{\times}}\right)$.

הוכחה: בעזרת בסיס של V רואים ש $\operatorname{Ker}(\pi)$ פתוחה לכן יש $F \ni t, t_1 \neq 0$ כך ש $\operatorname{Ker}(\pi) \ni \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ t_1 & 1 \end{pmatrix}$. $\operatorname{Ker}(\pi)$ נורמלית, ולכן (ע"י הצמדה ב $\begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix}$) $\operatorname{Ker}(\pi) \ni \begin{pmatrix} 1 & at \\ & 1 \end{pmatrix}$ (לכל a). לכן $N \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ ולכן $\mathrm{SL}_2(F) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ וראינו שנובעת המסקנה. ■

הערה 28.3 תהי (σ, V) הצגה חלקה של B. אז פונקציה $f : G \to V$ שייכת ל$\operatorname{Ind}_B^G \sigma$ (שווה גם ל$\operatorname{ind}_B^G \sigma$ כי $B \setminus G$ קומפקטית) ומקיימת $f(1) = 0$ $\Longleftrightarrow$

1. $f(bg) = \sigma(b) f(g)$ (לכל $b \in B$, $g \in G$)
2. f חלקה
3. קיים $j \in \mathbb{Z}$ כך ש $\operatorname{supp} f \subseteq BWN_j$.

כאן $N_j = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{P}^j \\ & 1 \end{pmatrix}$ ו $W = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. **הוכחה:** ראשית $f \in \operatorname{Ind}_B^G \sigma = \operatorname{ind}_B^G \sigma \Longleftrightarrow$ 1 ו2.

נניח כי תנאים אלה מתקיימים. אז

$$\begin{aligned} f(1) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f\restriction_B = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{supp} f \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

נסמן $S = \operatorname{supp} f$. אז $S = BS$, S סגורה וראינו שבמצב זה $\operatorname{supp} f \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow 3$ מתקיים. ■

סימונים

- $W = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$
- אם (σ, V) הצגה חלקה של $T = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$ נסמן

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_B^G \sigma &= \operatorname{Ind}_B^G \sigma' \\ \operatorname{ind}_B^G \sigma &= \operatorname{ind}_B^G \sigma' \end{aligned}$$

כאשר (σ', V) ההצגה החלקה של B:

$$\sigma' \begin{pmatrix} a & b \\ & d \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} a & b \\ & d \end{pmatrix}$$

- אם (σ,V) הצגה חלקה של B, נסמן ב$\left(\sigma^{W},V\right)$ את ההצגה החלקה של T.

$$\sigma^{W}\left(t\right)=\sigma\left(Wt\underbrace{W^{-1}}_{=W}\right)\qquad\left(t\in T\right)$$

משפט השראה צמצום תהי (σ,U) הצגה חלקה של T, ונרחיב אותה לB. אז $U\left(N\right)=0$ ולכן $U_{N}=U$ (ונכתוב גם $\sigma_{N}=\sigma$). כעת נסתכל על $\mathrm{Ind}_{B}^{G}\sigma$. קיים B-מורפיזם

$$\begin{aligned}\alpha:\mathrm{Ind}_{B}^{G}\sigma & \rightarrow U\\ f & \mapsto f\left(1\right)\end{aligned}$$

מכאן נקבל B-מורפיזם

$$\alpha_{N}:\left(\mathrm{Ind}_{B}^{G}\sigma\right)_{N}\rightarrow U_{N}=U$$

נסתכל על α_{N} כT-מורפיזם.

הערה 28.4 α על ולכן α_{N} על (כי α_{N} מתקבלת ממנה).

אכן, יהי $u\in U$. תהי $K_{1}\subseteq B$ כך ש$u\in U^{K_{1}}$, אז יש $K\subseteq G$ כך $B\cap K\subseteq K_{1}$. קיימת $f\in\left(\mathrm{Ind}_{B}^{G}\sigma\right)^{K}$ כך ש$f=0$ מחוץ ל BK (=BgK עם $g=1$) ו $f\left(1\right)=u$. אכן:

$$u\in V^{K_{1}}\subseteq V^{B\cap K}=\underbrace{V^{B\cap gKg^{-1}}}_{g=1}$$

משפט 28.5 בסימונים לעיל, יש איזומורפיזם של T-מודולים $\alpha_{N}\approx\delta_{B}\cdot\sigma^{W}$ ולכן יש סדרה מדויקת של T-מודולים:

$$0\rightarrow\delta_{B}\sigma^{W}\rightarrow\left(\mathrm{Ind}_{B}^{G}\sigma\right)_{N}\overset{\alpha_{N}}{\rightarrow}\sigma\rightarrow0$$

(וN פועלת טריוואלית על כולם)

הוכחה: $\mathrm{Ker}\,\alpha$ הוא התת B-מודול $V\subseteq\mathrm{Ind}_{B}^{G}\sigma$ המורכב מכל הפונקציות $f\in\mathrm{Ind}_{B}^{G}\sigma$ המקיימות $f\left(1\right)=0$.

תהי $f:G\rightarrow U$. מתקיים $f\in V$ אם ורק אם: f חלקה, $f\left(bg\right)=\sigma\left(b\right)f\left(g\right)$ (לכל $b\in B$ ו$g\in G$) וקיים $j_{0}\in\mathbb{Z}$ כך ש $\mathrm{supp}\,f\subseteq BWN_{j_{0}}$.

נמצא את הT-מודול V_{N}. תהי $f\in V$. לפי קריטריון האינטגרל, $f\in V\left(N\right)$ אם ורק אם קיים $j\in\mathbb{Z}$ כך ש

$$F:=\int_{N_{j}}\rho\left(n\right)fd\mu^{N_{j}}\left(n\right)=0$$

ראינו שאפשר להגדיל את N_{j}, כלומר להקטין את j, ונדרוש גם $j\leq j_{0}$.

$N_j \subseteq N$ פתוחה ולכן אם μ מידת האר על N אז $\mu^{N_j} = \mu \restriction_{N_j}$. כמו כן, $F \in V$ (חלקה כי f אינווריאנטית להזזות בN משמאל). לכל $g \in G$

$$\begin{aligned} F(g) &= \int_{N_j} (\rho(n) f)(g)\, d\mu^{N_j}(n) \\ &= \int_{N_j} f(gn)\, d\mu(n) \end{aligned}$$

כמו כן, $F \restriction_B = 0$ (אוטומטית, כי $F \in V$). לכן די לבדוק $F \restriction_{BWN} = 0$.
תהי $x_0 = b_0 W n_0 \in BWN$. אז

$$F(b_0 W n_0) = \int_{N_j} f(b_0 W n_0 n)\, d\mu(n)$$

אם $n_0 \notin N_j$ אז $b_0 W n_0 n \notin BWN_j$ אבל $\operatorname{supp} f \subseteq BWN_{j_0} \subseteq BWN_j$ ולכן האינטגרל הוא 0.
נניח $n_0 \in N_j$:

$$\begin{aligned} F(b_0 W n_0) &= \int_{N_j} f(b_0 W n_0 n)\, d\mu(n) \\ &= \int_{N_j} f(b_0 W n)\, d\mu(n) \\ &= \sigma(b_0) \int_{N_j} f(Wn)\, d\mu(n) \end{aligned}$$

כאשר המעבר השני מתבצע ע"י שימוש בכך שμ מידת האר. מאחר ש$f(Wn) = 0$ עבור $n \notin N_j$, נקבל

$$\begin{aligned} (n_0 \in N_j) \qquad F(b_0 W n_0) &= \sigma(b_0) \int_{N_j} f(Wn)\, d\mu(n) \\ &= \sigma(b_0) \int_N f(Wn)\, d\mu(n) \end{aligned}$$

אז סה"כ עבור $f \in V$ מתקיים $f \in V(N) \iff F = 0 \iff$ $\int_N f(Wn)\, d\mu(n) = 0$.
לכן נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} \varphi : V &\to U \\ \varphi(f) &= \int_N f(Wn)\, d\mu(n) \end{aligned}$$

ואז φ משרה טרנספורמציה לינארית <u>חד־חד־ערכית</u>:

$$V_N = \frac{V}{V(N)} = \frac{V}{\operatorname{Ker} \varphi} \hookrightarrow U$$

כאשר החץ מושרה מφ. נבדוק בסוף ש $\operatorname{Im}\varphi = U$ ונקבל איזומורפיזם של מרחב וקטוריים המושרה מφ:

$$\operatorname{Ker}\alpha_N \quad = \quad V_N = \frac{V}{\operatorname{Ker}\varphi} \overset{\approx}{\to} U$$

(נשים לב כי $Ker\alpha_N = V_N$ כי זו תמונת $Ker\alpha$ תחת העתקת המנה)

יש לתרגם את פעולת T על איברי U. תהי $f \in V$ נציגה של $f + V(N) \in V_N$. נסמן $u = \varphi(f)$. יהי $t \in T$. צריך למצוא

$$t \cdot u \quad = \quad u' = \varphi(\rho(t) f)$$

(כאשר צד שמאל הוא פעולת t על u, כלומר $\sigma(t) u$)

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho(t) f) &= \int_N (\rho(t) f)(Wn)\, d\mu(n) \\
&= \int_N f(Wnt)\, d\mu(n) \\
&= \int_N f\left(Wt\left(t^{-1}nt\right)\right) d\mu(n) \\
&= \int_N f(Wtn)\, d\mu\left(t^{-1}nt\right) \\
&= \delta(t) \int_N f\left(\left(WtW^{-1}\right)(Wn)\right) d\mu(n) \\
&= \delta(t)\, \sigma\left(WtW^{-1}\right) \int_N f(Wn)\, d\mu(n) \\
&= \delta(t)\, \sigma^W(t) \int_N f(Wn)\, d\mu(n) \\
&= \left(\delta(t)\, \sigma^W(t)\right)(\varphi(f)) \\
&= \left(\delta\sigma^W\right)(t)(u)
\end{aligned}$$

לכן ההצגה של T על $\operatorname{Ker}\alpha_N = V_N$ שקולה ל $\delta\sigma^W$.

נבדוק שφ על. אכן $B \times N_1 \subseteq B \times N$ פתוחה ולכן $BWN_1 \subseteq BWN \subseteq G$ פתוחה (בG). וBWN_1 סגורה בG (כמכפלה של קבוצה קומפקטית עם קבוצה סגורה). לאור ההומיאומורפיזם

$$\begin{aligned}
B \times N &\to BWN \\
(b, n) &\mapsto bWn
\end{aligned}$$

אפשר להגדיר $f(bWn) = \sigma(b) u$ על BWN_1 ו$f = 0$ מחוץ לBWN_1.
מאחר שσ חלקה, f חלקה, ולכן $f \in V$ ולבסוף

$$\varphi(f) \quad = \quad \int_N f(Wn)\, d\mu(n) = \underbrace{\mu(N_1)}_{>0} \cdot u$$

■

28.2 הצגות חוד

:$\hat{T}$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in F^\times \right\} \cong F^\times \times F^\times$$

לכן יש איזומורפיזם של חבורות $\hat{T} \cong \widehat{F^\times} \times \widehat{F^\times}$.

$$\chi \begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix} = \chi_1 (t_1) \cdot \chi_2 (t_2)$$

כאשר $\chi_{1,2} \in \widehat{F^\times}$, $\chi \in \hat{T}$.

נרחיב לB: $\chi \begin{pmatrix} t_1 & x \\ & t_2 \end{pmatrix} = \chi_1 (t_1) \chi_2 (t_2)$, $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$.

28.2.1 שילוב הדדיות פרובניוס ומודול ז'קה

תהיינה (π, V) הצגה חלקה של G, (χ, U) (או $(\chi, \mathbb{C})$) כרקטר חלק של T ($\dim_{\mathbb{C}} U = 1$).
אז (χ, U) הופך לכרקטר של B, לפי הדדיות פרובניוס:

$$\mathrm{Hom}_G \left(\pi, \mathrm{Ind}_B^G \chi \right) \approx \mathrm{Hom}_B (\pi \restriction_B, \chi)$$

אבל כל B־מורפיזם $f : V \to U$ מתאפס על $V(N)$ (כי $U(N) = 0$) ולכן יש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_B (\pi \restriction_B, \chi) &= \mathrm{Hom}_B (V, U) \\ &= \mathrm{Hom}_B (V_N, U) \\ &= \mathrm{Hom}_T (V_N, U) \\ &= \mathrm{Hom}_T (\pi_N, \chi) \end{aligned}$$

בסה"כ:

$$\mathrm{Hom}_G \left(\pi, \mathrm{Ind}_B^G \chi \right) \approx \mathrm{Hom}_T (\pi_N, \chi)$$

משפט 28.6 תהי (π, V) הצגה חלקה אי־פריקה של G. התנאים הבאים שקולים:

1. $\pi_N \neq 0$
2. קיים כרקטר $\chi \in \hat{T}$ כך שπ שקולה לתת־הצגה של $\mathrm{Ind}_B^G \chi$.

הוכחה: $2 \Longleftarrow 1$: לפי

$$0 \neq \mathrm{Hom}_G \left(\pi, \mathrm{Ind}_B^G \chi \right) \approx \mathrm{Hom}_T (\pi_N, \chi)$$

ולכן $\pi_N \neq 0$.

$1 \Longleftarrow 2$: V נוצר סופית כ־G־מודול, ולכן גם כ־B־מודול. לכן גם המנה V_N נוצרת סופית כ־B־מודול. מאחר ש־N פועלת טריוואלית על V_N, V_N נוצרת סופית כ־T־מודול.
$V_N \neq 0$, אז ראינו (צורן) שקיימת ל־V_N (כ־T־מודול) מנה T־אי־פריקה.
כלומר, קיימת סדרה מדויקת של T־מודולים:

$$V_N \quad \to \quad W \to 0$$

עם W אי־פריק כ־T־מודול. מאחר ש־T חילופית, $W \approx (\chi, \mathbb{C})$ (לפי שור, כי T σ־קומפקטית).
כלומר, $\pi_N \restriction_T \to \chi \to 0$ מדויקת. לפי פרובניוס:

$$0 \neq \operatorname{Hom}_T(\pi_N, \chi) \quad \approx \quad \operatorname{Hom}_G\left(\pi, \operatorname{Ind}_B^G \chi\right)$$

ולכן קיימת $0 \neq f \in \operatorname{Hom}_G\left(\pi, \operatorname{Ind}_B^G \chi\right)$. מאחר ש־$\pi$ אי־פריקה ו־$\operatorname{Ker} f \neq V$, נובע $\operatorname{Ker} f = 0$ ולכן f חד־חד־ערכית ו־π משוכנת ב־T־תת־הצגה של $\operatorname{Ind}_B^G \chi$. לכן 2 נכון. ■

הגדרה 28.7 (מינוח): בסימונים לעיל (π, V) הצגה חלקה אי־פריקה של G נקראת הצגת חוד (Supercuspidal) אם $V_N = 0$. אם $V_N \neq 0$, אומרים ש־π שייכת לסדרה הראשית (Principal series). כלומר, π תת־הצגה של $\operatorname{Ind}_B^G \chi$ ($\chi \in \hat{T}$). לעתים (Bump) דורשים שכבר ההצגה $\operatorname{Ind}_B^G \chi$ אי־פריקה.

29 מודל ויטקר (ללא הוכחת יחידות)

(π, U) הצגה חלקה <u>אי־פריקה ממימד אינסופי</u> של $G = \operatorname{GL}_2(F)$. $1 \neq \theta \in \hat{N}$. אז יש $\tau \in \hat{F}$ עם $\theta \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} = \tau(x)$. נסמן $\theta = \left(\theta, \mathbb{C}^\theta\right)$, כלומר $\mathbb{C}^\theta = \mathbb{C}$ עם פעולת n דרך θ:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad nz = \theta(n) z$$

<u>ידוע $U_\theta \neq 0$</u>: אכן, U G־מודול ולכן M־מודול. ראינו שיש איזומורפיזם

$$q_*(N) : U(N) \quad \xrightarrow{\approx} \quad \left(\operatorname{Ind}_N^M U_\theta\right)(N) = \operatorname{ind}_N^M U_\theta$$

אם $U_\theta = 0$ אז $U(N) = 0 \Longleftarrow N$ פועלת טריוואלית על $U \Longleftarrow N \subseteq \operatorname{Ker} \pi$ (אבל $G \supseteq \operatorname{Ker} \pi$ נורמלית) $\Longleftarrow \operatorname{SL}_2(F) \subseteq \operatorname{Ker} \pi \Longleftarrow \dim_{\mathbb{C}} U = 1$. סתירה.

משפט 29.1 (יחידות מודל ויטקר (גרסה ראשונה)): $\dim U_\theta \leq 1$ ולכן $\dim U_\theta = 1$.

ראה גם [[G.H.] p.252], [[Godement 1.11]] ($\dim X = 1$, $X = U_\theta$ כאן).

פונקציונל ויטקר הוא פונקציונל לינארי

$$\lambda : U \quad \to \quad \mathbb{C}$$

כך ש

$$(n \in N, u \in U) \qquad \lambda(nu) = \theta(n) \lambda(u)$$

או

$$(x \in F) \qquad \lambda\left(\pi\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}u\right)=\tau(x)\,\lambda(u)$$

קשר עם U_θ**:** פונקציונלי ויטקר הם איברי $\mathrm{Hom}_N\left(U,\mathbb{C}^\theta\right)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_N\left(U,\mathbb{C}^\theta\right) &\approx \mathrm{Hom}_N\left(U_\theta,\mathbb{C}^\theta\right)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(U_\theta,\mathbb{C}\right)=U_\theta'\end{aligned}$$

כאשר השוויון הראשון נכון כי $\lambda\left(nv-\theta\left(n\right)v\right)=0$.

מסקנה 29.2 $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_N\left(U,\mathbb{C}^\theta\right)=\dim_{\mathbb{C}}U_\theta=1$ = מימד מרחב פונקציות ויטקר.

משפט 29.3 (יחידות מודל ויטקר (גרסה שניה)): כל שני פונקציונלי ויטקר $(\neq 0)$ הם פרופורציונליים אחד לשני (ולכן קיים פונקציונל ויטקר אחד עד כדי סקלר $\neq 0$).

ראה גם [[Bump] p.453. Th.4.4.1].

מודל ויטקר מפרוּבניוס

$$\mathrm{Hom}_G\left(U,\mathrm{Ind}_N^G\theta\right) \quad\approx\quad \mathrm{Hom}_N\left(U,\mathbb{C}^\theta\right)$$

לכן $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G\left(U,\mathrm{Ind}_N^G\theta\right)=1$. וכמו כן, אם $\lambda\neq 0$ פונקציונל ויטקר (כלומר $\lambda\in\mathrm{Hom}_N\left(U,\mathbb{C}^\theta\right)$) אז $W:U\to\mathrm{Ind}_N^G\theta$ המתאים לו נתון ע"י

$$\left(W\left(u\right)\right)\left(g\right) \quad=\quad W_u\left(g\right)=\lambda\left(gu\right)$$

$W\neq 0$ כי $\lambda\neq 0$. W חד־חד־ערכית כי $W\neq 0$ ו־U אי־פריקה.

הגדרה 29.4 $\mathcal{W}=\underbrace{\mathrm{Im}\,W}_{\neq 0}\subseteq\mathrm{Hom}_G\left(U,\mathrm{Im}\,\theta\right)$ נקרא מודל ויטקר של U.

$$\mathcal{W} \quad=\quad \left\{W_u \mid u\in U\right\}$$

תכונה $\mathcal{W}$ שמור ביחס להזזות מימין ע"י G וההצגה איזומורפית ל־U.

30 הסדרה הראשית

- $\mathrm{Ind}_B^G\chi=\mathrm{ind}_B^G\chi$ $(\chi\in\hat{T})$ (כי $B\setminus G$ קומפקטית).
- מותרת (כי $B\setminus G$ קומפקטית ו־χ מותרת)
- $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ind}_B^G\chi=\infty$ (?)

30.1 צמצום לB או לM

$\chi^W(t)=\chi(WtW)$ כאשר $W=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\alpha:\operatorname{Ind}_B^G\chi &\to \chi\\ f &\mapsto f(1)\\ \alpha_N:\left(\operatorname{Ind}_B^G\chi\right)_N &\to \chi_N=\chi\end{aligned}$$

נסמן

$$\begin{aligned}V &= \operatorname{Ker}\alpha\\ &= \{f\mid f(1)=0\}\\ &= \{f\mid f\restriction_B=0\}\end{aligned}$$

נקבל את הסדרות המדויקות

$$\begin{array}{ccccccccc}0 & \to & V & \to & \operatorname{Ind}_B^G\chi & \overset{\alpha}{\to} & \chi & \to & 0\\ 0 & \to & \underbrace{V_N}_{\approx\delta_B\chi^W} & \to & \left(\operatorname{Ind}_B^G\chi\right)_N & \overset{\alpha_N}{\to} & \chi & \to & 0\end{array}$$

מסקנה 30.1 (ראה גם [B.H.]):

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\left(\left(\operatorname{Ind}_B^G\chi\right)_N\right) &= 2\\ \dim_{\mathbb{C}}V_N &= 1\end{aligned}$$

טענה 30.2 $V(N)$ אי־פריק מעל M (וB).

הוכחה: נסמן $W=V(N)$, ויהי $1\neq\theta\in\hat{N}$. יש איזומורפיזם של M מודולים

$$q_*(N):V(N)\ \overset{\approx}{\to}\ \operatorname{ind}_N^M V_\theta$$

די להוכיח $\dim_{\mathbb{C}}V_\theta=1$, אז $V_\theta\cong\theta$ (כי $\operatorname{ind}_N^M\theta$ אי־פריק - ראינו). (לא מצאתי איפה הוכחנו ש$\operatorname{ind}_N^M\theta$ אי־פריקה, יש הוכחה ב[BH] - page 59])

די להוכיח שקיים איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים $V_N\approx V_\theta$. (כי $\dim_{\mathbb{C}}V_N=1$ מהמסקנה הקודמת)

לכל $f\in V$ נגדיר $\theta f:G\to V$ ע"י $\theta f\restriction_B=0$ ו

$$\begin{aligned}&(\theta f)(bWn) && (n\in N,b\in B)\\ =\ &\theta(n)f(bWn)\\ =\ &\theta(n)\chi(b)f(Wn)\end{aligned}$$

θf חלקה: θ חלקה, f $\operatorname{supp}f$ סגור בG ומוכל בBWN.

ברור ש $(\theta f)(b_1) = \chi(b_1)(\theta f)(g)$ ולכן $\theta f \in V$. קיבלנו איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים:

$$\begin{aligned} \theta\cdot : V &\rightarrow V \\ f &\mapsto \theta f \end{aligned}$$

מראים ש

$$n(\theta f) = \underbrace{\theta(n)}_{\in\mathbb{C}} \cdot \theta(nf)$$

ובעזרת שוויון זה מראים

$$\theta(V(N)) = V(\theta)$$

ומסיקים איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$V_N = \frac{V}{V(N)} \longrightarrow \frac{V}{V(\theta)} = V_\theta$$

המושרה מθ. ■

מסקנה 30.3

1. סדרת JH של $\mathrm{Ind}_B^G \chi$ כM־מודול או כB־מודול נתונה ע"י

$$0 \subsetneqq V(N) \subsetneqq V \subsetneqq \mathrm{Ind}_B^G \chi$$

אכן:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathrm{Ind}_B^G \chi}{V}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} &= 1 \\ \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{V}{V(N)}\right) = \dim_{\mathbb{C}}(V_N) &= 1 \end{aligned}$$

ולכן המנות הנ"ל אי־פריקות, וראינו כי $V(N)$ אי־פריק. (מקיים $\dim_{\mathbb{C}} V(N) = \infty$)

2. $l_G\left(\mathrm{Ind}_B^G \chi\right) \le 3$ ובכל סדרת JH של $\mathrm{Ind}_B^G \chi$ ביחס לG יש בדיוק מנה אחת ממימד ∞.

3. בסדרת JH של V (מעל B או M) יש מנה אחת ממימד 1 ויש מנה אחת ממימד ∞.

$$l_B(V) = l_M(V) = 2$$

30.2 וקטורים עצמיים ביחס לN

טענה 30.4 נסמן $\chi=\chi_1\otimes\chi_2\in\hat{T}$. התנאים הבאים שקולים:

1. ל$\mathrm{Ind}_B^G\chi$ יש תת־מרחב N שמור ממימד 1.
2. $\chi_1=\chi_2$.

ובמקרה זה נסמן $\chi'=\chi_1=\chi_2$. אז תת־המרחב מ1 נתון ע"י $\mathbb{C}\cdot\chi'\circ\det$. בפרט הוא יחיד והוא G־שמור ואינו מוכל בV (כי $\chi'\circ\det(I_2)=1\neq 0$).

הוכחה: $2 \Longleftarrow 1$: מיידי. (כי $\mathbb{C}\cdot\chi'\circ\det$ הוא G־שמור)
$1 \Longleftarrow 2$: תהי $0\neq f\in\mathrm{Ind}_B^G\chi$ פורשת את התת־מרחב. אז יש $\theta\in\hat{N}$ כך ש $nf=\theta(n)f$ (לכל $n\in N$). נסמן $S=\operatorname{supp}f$, אז $S=BSN$. (כי $(nf)(g)=f(gn)=\theta(n)f$)
מתקיים $G=B\uplus BWN$ ולכן אם $S\neq G$ ייתכן רק $S=B$ (אבל B לא פתוחה) או $S=BWN$ (אבל BWN לא סגורה). לכן $S=\operatorname{supp}f=G$, ובפרט $f\notin V$.
כעת לכל $n\in N$ מתקיים

$$\theta(n)\underbrace{f(1)}_{\neq 0} = (nf)(1)=f(n)=\chi(n)f(1)=f(1)$$

נובע ש$\theta=1$ ולכן $nf=f$ (לכל $n\in N$).
כלומר, $N\subseteq\mathrm{Stab}_G f$. אבל $\mathrm{Stab}_G f$ פתוחה (מחלקות) ולכן $\mathrm{SL}_2(F)\subseteq\mathrm{Stab}_G f$.
כעת לכל $t\in F^\times$

$$\begin{aligned} f(1) &= \left(\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1}\end{pmatrix} f\right)(1)\\ &= \chi_1(t)\chi_2\left(t^{-1}\right)f(1)\end{aligned}$$

ולכן $\chi_1(t)=\chi_2(t)$. (ולכן 2 נכון)
לבסוף, לכל $g\in G$ יש פירוק $g=\begin{pmatrix}\det g & \\ & 1\end{pmatrix}g_1$ כאשר $g_1\in\mathrm{SL}_2(F)$. מכאן

$$\begin{aligned} f(g) &= f\left(\begin{pmatrix}\det g & \\ & 1\end{pmatrix}g_1\right)\\ &= \chi'(\det g)f(g_1)\\ &= \chi'(\det g)\left(\underbrace{g_1 f}_{=f}\right)(1)\\ &= \left(\chi'(\det g)\right)f(1)\end{aligned}$$

כלומר $f\in\mathbb{C}\cdot\chi'\circ\det$. ■

מסקנה 30.5 לV יש תת־מרחב M (או B) שמור יחיד והוא $V(N)$.

הוכחה: $l(V)=2$ ומימדי מנות JH הם $1,\infty$. יהי $0\neq W\subsetneqq V$ תת־מודול. אז $\dim W=1$ או $\dim W=\infty$.
אם $\dim_{\mathbb{C}}W=1$, אז $W\subseteq \mathrm{Ind}_B^G\chi$ תת־מרחב N שמור ממימד 1, וראינו שהוא לא מוכל ב־V - סתירה.

לכן $\dim_{\mathbb{C}}W=\infty$ ו־$\dim_{\mathbb{C}}\frac{V}{W}=1$. במקרה זה $W\cap V(N)\neq 0$ (כי $W,V(N)$ ממימד אינסופי, אבל $\dim_{\mathbb{C}}\frac{V}{W}=1$), ונקבל

$$0\neq W\cap V(N)\subseteq W\subsetneqq V$$

משיקולי אורך: $W\cap V(N)=W \Longleftarrow W=V(N)$ (משיקולי קו־מימד). ■

30.3 הומוגניות

יהי $\varphi\in\widehat{F^{\times}}$ ואז $\varphi\circ\det$ כרקטר חלק של G. ראינו שיש שקילות הצגות

$$\begin{array}{ccc}(\varphi\circ\det)\cdot\mathrm{Ind}_B^G\chi & \xrightarrow{\approx} & \mathrm{Ind}_B^G((\varphi\circ\det)\cdot\chi)\\ f & \mapsto & (\varphi\circ\det)\cdot f\end{array}$$

נניח ש $\chi=\chi_1\otimes\chi_2$ אז

$$\begin{aligned}((\varphi\circ\det)\cdot\chi)\begin{pmatrix}a & b\\ & d\end{pmatrix} &= \varphi(ad)\chi_1(a)\chi_2(d)\\ &= (\varphi\cdot\chi_1)(a)\cdot(\varphi\cdot\chi_2)(d)\end{aligned}$$

מסמנים

$$\begin{aligned}\varphi\cdot\mathrm{Ind}_B^G\chi &= (\varphi\circ\det)\cdot\mathrm{Ind}_B^G\chi\\ \varphi\cdot\chi &= (\varphi\circ\det)\cdot\chi\end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}\varphi\cdot\mathrm{Ind}_B^G\chi &\approx \mathrm{Ind}_B^G(\varphi\cdot\chi)\\ \varphi\cdot(\chi_1\otimes\chi_2) &= (\varphi\chi_1)\otimes(\varphi\chi_2)\end{aligned}$$

מסקנה 30.6 תהי $\Gamma\subseteq G$ תת־חבורה ו $Z\subseteq\mathrm{Ind}_B^G\chi$ תת־מרחב, ו

$$\varphi Z = \{(\varphi\circ\det)\cdot f \mid f\in Z\}$$

אז Z Γ־שמור ביחס ל$\mathrm{Ind}_B^G\chi$ אם ורק אם $\varphi\cdot Z$ Γ־שמור ביחס ל$\mathrm{Ind}_B^G(\varphi\cdot\chi)$.

30.4 קריטריון לאי־פריקות

למה 30.7 יהי $\chi=\chi_1\otimes\chi_2\in\hat{T}$. התנאים הבאים שקולים:

1. ל$\mathrm{Ind}_B^G\chi$ יש תת G־מודול ממימד סופי.

2. $\chi_1 = \chi_2$

ובמקרה זה מתקיים $l_G\left(\operatorname{Ind}_B^G \chi\right) = 2$.

הערה 30.8 נניח ש1 ו2 מתקיימים ונסמן $\chi' = \chi_1 = \chi_2$. אז $\mathbb{C}\cdot\chi'\cdot\det$ הוא תת־מודול. ולכן מימדי מנות JH של $\operatorname{Ind}_B^G \chi$ (במקרה זה) הן 1 ו∞.

הוכחה: $1 \Longleftarrow 2$: כי N חילופית ופועלת על התת־מודול ממימד סופי ולכן יש לN וקטור עצמי.

$2 \Longleftarrow 1$: ראינו ש $\mathbb{C}\cdot\chi'\circ\det$ תת־G־מודול (וממימד 1)

נניח כעת 1 ו2 ונוכיח $l = l_G\left(\operatorname{Ind}_B^G \chi\right) = 2$. ברור ש $l \geq 2$ (מ1) וראינו $l \leq 3$. לכן נניח בשלילה $l = 3$ ונגיע לסתירה. האורך לא משתנה עם שינוי $\chi_{1,2} \mapsto \varphi\chi_{1,2}$. לכן נניח $\chi_1 = \chi_2 = 1$.

בסה"כ: מניחים $l_G\left(\operatorname{Ind}_B^G 1\right) = 3$ וצריך להגיע לסתירה. נסמן $L = \{\text{constant functions}\}$.

אז L תת־מודול G־שמור. נסמן $Y = \frac{\operatorname{Ind}_B^G 1}{L}$. זהו G־מודול. העתקת המנה משרה איזומורפיזם של B־מודולים:

$$\eta : V \quad \xrightarrow{\approx} \quad \frac{\operatorname{Ind}_B^G 1}{L} = Y$$

כמו כן, $\dim_{\mathbb{C}} L = 1$ ומתוך $0 \neq L \subseteq \operatorname{Ind}_B^G 1$ נובע $l(Y) = l\left(\frac{\operatorname{Ind}_B^G 1}{L}\right) = 2$. לכן קיים תת־$G$־מודול $0 \subsetneq W \subsetneq Y$ לכן $0 \subsetneq \eta^{-1}(W) \subsetneq V$. ולכן $\eta^{-1}(W) = V(N)$.

מכאן שη משרה איזומורפיזם של B־מודולים:

$$V_N = \frac{V}{V(N)} \quad \xrightarrow{\approx} \quad \frac{Y}{W}$$

בפרט $\dim_{\mathbb{C}} \frac{Y}{W} = \dim_{\mathbb{C}} V_N = 1$. לכן $\frac{Y}{W}$ הוא G־מודול עליו G פועלת דרך $\chi'\circ\det$ עם χ' מתאים. לכן B (וT) פועלות על V_N גם דרך $\chi'\circ\det$, אבל $V_N \approx \delta_B\chi^W = \delta_B$ (כי $\chi = 1$) כT־מודול:

$$\delta_B \restriction_T \quad = \quad \chi'\circ\det\restriction_T$$

כלומר

$$\frac{|t_1|}{|t_2|} \quad = \quad \delta_B\begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix} = \chi'(t_1)\,\chi'(t_2)$$

ואז $\chi' = |\cdot|^{-1}$, $\chi' = |\cdot|$. סתירה. ∎

(ההוכחה מבוססת על [BH])

דואליות אם $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ אז

$$\begin{aligned} \widetilde{\operatorname{Ind}_B^G \chi} &= \widetilde{\operatorname{ind}_B^G \chi} \\ &= \operatorname{Ind}_B^G(\delta_B\tilde{\chi}) \\ &= \operatorname{Ind}_B^G\left(\delta_B\chi^{-1}\right) \end{aligned}$$

ו

$$\delta_B \cdot \chi^{-1} = \left(|\cdot| \cdot \chi_1^{-1}\right) \otimes \left(|\cdot|^{-1} \cdot \chi_2^{-1}\right)$$

(כי ראינו $\frac{|t_1|}{|t_2|} = \left(\delta_B \begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix}\right)$)

משפט 30.9 (קריטריון אי־פריקות): יהי $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2 \in \hat{T}$. אז $l = l_G\left(\operatorname{Ind}_B^G \chi\right) = 1 \text{ or } 2$ (ראה הסבר דרך דואליות ב[BH] p.65-67]). $l = 2$ מתקיים אם ורק אם אחת משתי האפשרויות (הזרות) הבאות מתקיימות:

1. $\chi_1\chi_2^{-1} = 1$, כלומר יש $\varphi \in \widehat{F^\times}$ כך ש $\chi = \varphi \cdot 1$ אם ורק אם ל$\operatorname{Ind}_B^G \chi$ תת־מרחב שמור ממימד 1 (או ממימד סופי) ואז המנה ממימד ∞.
2. $\chi_1\chi_2^{-1} = |\cdot|^2$, כלומר יש $\varphi \in \widehat{F^\times}$ כך ש $\chi = \varphi \cdot \delta_B$ אם ורק אם ל$\operatorname{Ind}_B^G \chi$ יש מנה מקו־מימד 1 (או סופי) ביחס לתת־מודול ממימד ∞.

בפרט, אם $\operatorname{Ind}_B^G \chi$ פריק אז כל סדרת JH מכילה מנה ממימד 1 ומנה ממימד ∞.

הוכחה: אם $\chi = \varphi \cdot 1$, ראינו שיש תת־מודול ממימד 1. אם $\chi = \varphi \cdot \delta_B$ אז

$$\delta_B \cdot \chi^{-1} = \delta_B \cdot \varphi^{-1} \cdot \delta_B^{-1} = \varphi^{-1} \cdot 1$$

ולכן ל$\operatorname{Ind}_B^G\left(\delta_B\chi^{-1}\right)$ יש תת־מודול ממימד 1 ולכן ל

$$\begin{aligned} \widetilde{\operatorname{Ind}_B^G\left(\delta_B\chi^{-1}\right)} &= \operatorname{Ind}_B^G\left(\delta_B\left(\delta_B\chi^{-1}\right)^{-1}\right) \\ &= \operatorname{Ind}_B^G \chi \end{aligned}$$

מנה ממימד 1.

לבסוף, נניח ש$\operatorname{Ind}_B^G \chi$ פריקה. ראינו שיש לכל היותר מנת JH ממימד ∞. לכן תיתכן אחת מהאפשרויות הבאות:

- ל$\operatorname{Ind}_B^G \chi$ תת־מודול ממימד סופי ו $l\left(\operatorname{Ind}_B^G \chi\right) = 2$.
- ל$\operatorname{Ind}_B^G \chi$ מנה ממימד סופי, ואז ל $\widetilde{\operatorname{Ind}_B^G \chi} = \operatorname{Ind}_B^G\left(\delta_B\chi^{-1}\right)$ תת־מודול ממימד סופי, ואז $|\cdot|\,\chi_1^{-1} = |\cdot|^{-1}\,\chi_2^{-1}$, כלומר $\chi_1\chi_2^{-1} = |\cdot|^2$ ו

$$\begin{aligned} 2 &= l\left(\operatorname{Ind}_B^G\left(\delta_B\chi^{-1}\right)\right) \\ &= l\left(\widetilde{\operatorname{Ind}_B^G \chi}\right) \\ &= l\left(\operatorname{Ind}_B^G \chi\right) \end{aligned}$$

■

מסקנה 30.10 אם $\operatorname{Ind}_B^G \chi$ פריק אז יש תת G־מודול יחיד עם $0 \neq W \subsetneqq \operatorname{Ind}_B^G \chi$.

30.5 הומומורפיזמים

טענה 30.11 יהיו ξ,χ כרקטרים חלקים של T. אז:

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{Ind}_B^G\chi,\mathrm{Ind}_B^G\xi\right) = \begin{cases}1 & \left(\xi=\chi\text{ or }\delta_B\chi^W\right)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

הוכחה: ראינו מפרובניוס

$$\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{Ind}_B^G\chi,\mathrm{Ind}_B^G\xi\right) = \mathrm{Hom}_T\left(\left(\mathrm{Ind}_B^G\chi\right)_N,\xi\right)$$

כמו כן יש סדרה מדויקת

$$0 \to \delta_B\chi^W \to \left(\mathrm{Ind}_B^G\chi\right)_N \to \chi \to 0$$

אם $\chi\neq\delta_B\chi^W$, הסדרה מתפצלת (?), ונקבל סדרה מדויקת

$$0 \to \mathrm{Hom}\left(\chi,\xi\right) \to \mathrm{Hom}\left(\left(\mathrm{Ind}_B^G\chi\right)_N,\xi\right) \to \mathrm{Hom}\left(\delta_B\chi^W,\xi\right) \to 0$$

והטענה נכונה.

נניח $\chi=\delta_B\chi^W$ כלומר $\left(|\cdot|^{-1}\chi_1\right)\otimes\left(|\cdot|\chi_2\right)=\chi_1\otimes\chi_2$, אז $\chi_1=|\cdot|\chi_2$ ולכן $\chi_1\chi_2^{-1}=|\cdot|\neq1,|\cdot|^2$. לכן $\mathrm{Ind}_B^G\chi$ אי־פריקה. אם $\xi=\chi=\delta_B\chi^W$ הטענה נכונה לפי שור.

נניח $\xi\neq\chi=\delta_B\chi^W$ מהסדרה

$$0 \to \mathrm{Hom}\left(\chi,\xi\right) \to \mathrm{Hom}\left(\left(\mathrm{Ind}_B^G\chi\right)_N,\xi\right) \to \mathrm{Hom}\left(\delta_B\chi^W,\xi\right) \to 0$$

נקבל

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Hom}\left(\chi,\xi\right)}_{=0} \to \mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{Ind}_B^G\chi,\mathrm{Ind}_B^G\xi\right) \to \underbrace{\mathrm{Hom}\left(\chi,\xi\right)}_{=0} \to 0$$

ולכן הטענה נכונה. ■

30.6 הצגת שטיינברג

הגדרה 30.12 $\mathrm{St}=\mathrm{St}_G$ היא המנה (הלא טריוואלית) היחידה של Ind_B^G1 (אז $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{St}=\infty$).

הערה 30.13

1. אם $\chi=\phi\cdot1$ אז המנה של $\mathrm{Ind}_B^G\left(\phi\cdot1\right)$ היא $\phi\cdot\mathrm{St}$.

2. יש סדרה מדויקת

$$0 \to \underbrace{1_G}_{\text{constant functions}} \to \mathrm{Ind}_B^G 1 \to \mathrm{St} \to 0$$

נקח את הדואלי:

$$0 \to \breve{\mathrm{St}} \to \mathrm{Ind}_B^G(\delta_B) \to 1_G \to 0$$

ו־St אי־פריקה (כי St מותרת).
לפי הטענה יש G הומומורפיזם

$$0 \neq \varphi : \mathrm{Ind}_B^G 1_G \to \mathrm{Ind}_B^G(\delta_B)$$

חייב להתקיים $1_G \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ ולכן $\operatorname{Im}\varphi$ תת־מודול אי־פריק של $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_B)$ (?). לכן $\operatorname{Im}\varphi = \breve{\mathrm{St}}$ וקיבלנו $\breve{\mathrm{St}} \cong \mathrm{St}$.

30.7 נירמול

[[Bump] p. 467-471]

הגדרה 30.14 (סימון):

$$B(\chi_1,\chi_2) = \mathrm{Ind}_B^G\left(\delta_B^{\frac{1}{2}}\chi\right)$$

עבור $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2 \in \hat{T}$.

דואליות

$$\widetilde{B(\chi_1,\chi_2)} = B\left(\chi_1^{-1},\chi_2^{-1}\right)$$

אי־פריקות: $B(\chi_1,\chi_2)$ אי פריק $\iff \chi_1\chi_2^{-1} \neq |\cdot|^{\pm 1}$
ל־$B(\chi_1,\chi_2)$ תת־מודול ממימד 1 $\iff \chi_1\chi_2^{-1} = |\cdot|^{-1}$
ל־$B(\chi_1,\chi_2)$ מנה ממימד 1 $\iff \chi_1\chi_2^{-1} = |\cdot|$

הומומורפיזמים

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_G\left(B(\chi_1,\chi_2), B(\mu_1,\mu_2)\right)\right) = \begin{cases} 1 & {\scriptstyle (\mu_1,\mu_2)=(\chi_1,\chi_2) \atop \text{or } (\mu_1,\mu_2)=(\chi_2,\chi_1)} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משפט 30.15 רשימת ההצגות החלקות האי־פריקות של $\mathrm{GL}_2(F)$ נתונה להלן כאשר $\varphi \in \widehat{F^\times}$ כרקטר כלשהו:

1. הצגות חוד
2. כרקטרים $\varphi \circ \det$
3. $B\left(\chi_1, \chi_2\right)$ כאשר $\chi_1 \chi_2^{-1} \neq |\cdot|^{\pm 1}$
4. $\varphi \cdot \mathrm{St}$

השקילויות היחידות הן בסעיף 3 כאשר $B\left(\chi_2, \chi_1\right) \cong B\left(\chi_1, \chi_2\right)$.